

Detlev Schönauer

SKRIPT



PHYSIK FÜR
NATURWISSENSCHAFTLER

zum LERNEN und zur PRÜFUNGSVORBEREITUNG

(zu deutsch : für Leute mit "null Ahnung")

Herausgeber : FACHSCHAFT CHEMIE
der Universität des Saarlandes

30. Sept. '84

statt eines Vorwortes....

HALLO LEUTE...

Ich weiß nicht, wie Ihr dazu kamt, Euch dieses Skript auszuleihen oder zu kaufen - ist auch egal. Ich will Euch trotzdem an dieser Stelle erst einmal begrüßen und versuchen Euch mit dem, was Ihr da in der Hand haltet etwas vertrauter zu machen. Zunächst - oberflächlich betrachtet - ein Bündel Kleinbedruckter Papiere. Mit Informationen, Bildchen und Tippfehlern. O.K.

Dieses Skript entstand vor etwa drei Jahren in handschriftlicher Form, als ich mit einigen Chemie-Studenten für das Physik-Vordiplom gelernt habe. Diese Lernerei hat sich auch bewährt und ich habe mich entschlossen - gegen Ende sogar eher widerwillig - diesen Ordner handgeschriebener Zettel (so etwa 600 bis 700 Stück) in eine etwas ansprechendere Form zu bringen, in eine Form, mit der auch jemand klarkommt, dem ich nicht bei jeder zweiten Zeile mündlich erklären muß, wie das heißt oder wo jene Gleichung herkommt.

Mittlerweile haben schon einige Nebenfachstudenten (also Chemiker, Pharmazeuten, E-Techniker, Biologen, Mediziner) mit diesem Skript gearbeitet und ihr Vordiplom bestanden. Das kann drei Ursachen haben: entweder sie waren eh gut und haben mit dem Skript nur wiederholt, oder sie hatten Glück und wurden gerade über die zwei Formeln befragt, die sie noch aus der Schule herübergerettet haben - vielleicht lag's auch in manchen Fällen an diesem Skript selbst. Nun - sei's wie es ist. In erster Linie dient dieses Skript also denjenigen, die von Physik bisher wenig oder nichts gehört haben und die ein Grundlagenwissen (für z.B. Vordiplom oder Zwischenprüfung) anstreben. Es ist in vielen Bereichen nicht detailliert genug, um als Lehrbuch bei Vorlesungen oder gar zur Praktikumsvorbereitung verwendet zu werden. Es soll nur einen allgemeinen

Überblick, möglichst ein umfangreiches, Teilgebieteübergreifendes physikalisches Grundlagenwissen schaffen. Dazu ist am Anfang ein kleiner mathematischer Exkurs vorausgesetzt (der ist noch handschriftlich - irgend etwas Nostalgisches soll auch hier erlaubt sein!). Dieser soll allerdings mehr die Funktion einer Formelsammlung haben. Im Text selbst werden viele Dinge (vor allem die wichtigen) mehrfach an verschiedenen Stellen erklärt. Viele Quer- und Rückverweise sollen überdies dazu helfen, manches im Gedächtnis doch Hängengebliebene zu wiederholen, zu ergänzen und plausibler werden zu lassen. Dazu dienen auch - so hoffe ich - die vielen Beispiele die - wenn's ging - häufig dem täglichen Leben entnommen sind. Da es lange dauert, bis man Wichtiges von Unwichtigem unterscheiden kann, sind wichtige Gleichungen, die man können sollte eingerahmt, wichtige Begriffe sind unterstrichen. Mathematische Herleitungen braucht man i.A. nicht im Kopf zu haben. Es genügt meist der Ansatz und natürlich das Ergebnis. Man muß wissen, von welcher Größe eine andere Größe abhängig ist und wie (also z.B. linear oder quadratisch). Konstanten oder feste Zahlen in Formeln sind nicht so wichtig, da sie nur am quantitativen Ergebnis etwas ändern, physikalisch aber meist weniger relevant sind.

So - dann möchte ich an dieser Stelle einigen treuen Mitbegründern dieses Skriptes ganz herzlich danken, vor allem Peter Schmidt, Linda Dargot, Dieter Anschütz, Michael Altmeyer, Monika Müller, Bärbel Placzek und vielen späteren Benutzern, die mich immer - oft mit einem Quäntchen Schadenfreude - aber immerhin - auf Fehler aufmerksam gemacht haben. P. Schmidt, L. Dargot danke ich für die Rohabfassung einiger Kapitel.

Der Fachschaft Chemie, die dieses Skript herausgeben wird, und ganz besonders Reinhold Mäck danke ich für immer wiederkehrendes Aufstacheln und für die schon fast zum geflügelten Wort werdende Frage: "Wann ist denn endlich das Skript fertig?" Nun - jetzt ist es fertig - und ich wünsche allen Benutzern viel Spaß dabei und vor allem viel Erfolg - beim Lernen und natürlich bei den diversen Prüfungen !!

Also - so long

Dieter Anschütz

P.S. : Fehlermeldungen werden weiterhin entgegengenommen !

L i t e r a t u r

Im folgenden soll eine Aufstellung der Bücher gemacht werden, die für dieses Skript mitverwendet wurden. Außerdem möchte ich einige Literaturtips geben und auf gute Lehrbücher und weiterreichende Literatur verweisen.

Benutzte Literatur :

- Horst Kuchling - Taschenbuch der Physik ,
Harri Deutsch Verlag Thun / Frankfurt 1978
- Gerthsen-Kneser-Vogel - Physik, 12. Aufl. Berlin 1974
- Edgar Lüscher - Experimentalphysik, BI-Verlag Mannheim
I/1. (BI 111), I./2. (BI 114), II. (BI 115), III/1. (BI 116), III/2. (BI 117)
- Dorn-Bader - Physik, Schroedel-Verlag Hannover
- F. Kneubühl - Repetitorium der Physik, Teubner Verlag
Stuttgart 1975
- Bernd Mirow - Physik-Examen gut vorbereitet ,
Dümmler-Verlag Bonn 1978
- Mentor-Repetitorien der Physik, Bd. I, II, III
- Alonso-Finn - Fundamental University-Physics, Vol. III
Addison-Wesley 1968
- Feynman-Leighton-Sands - The Feynman Lectures on Physics ,
Addison-Wesley 1975 , Bd. I, II
- Trautwein-Kreibig-Oberhausen - Physik für Mediziner ,
Springer-Verlag

Hier will ich kurz einige Tips anschließen :

Aus der obigen Reihe kann ich die Bände von Edgar Lüscher ebenso die Feynman Lectures on Physics (die es auch in einer übersetzten Ausgabe gibt) als Lehrbücher, d.h. um einen neuen Stoff zu erlernen, wärmstens empfehlen.

Ebenso sind von den Lehrbüchern fürs Lernen gut zu gebrauchen: Alonso-Finn, Trautwein-Kreibig-Oberhausen und das Schulbuch von Dorn-Bader.

Um einen gelernten Stoff zu wiederholen ist das Kneubühl-Repetitorium und auch der Gerthsen-Kneser-Vogel, für die kurze Prüfungswiederholung ist der Mirow hervorragend geeignet.

Weitere sehr gute Lehrbücher sind das einbändige Werk von Fleischmann : 'Einführung in die Physik' und das Schulbuch von Höfling.

Ein Lehrbuchtipp allgemein : Kaufe nicht gleich das erste Lehrbuch, das Dir von irgendjemand empfohlen wird. Schreibe Dir empfohlene Lehrbücher auf, gehe in eine Buchhandlung oder Bibliothek (Uni-Bibliothek oder besser Physik-Bibliothek im Physikgebäude) und schau Dir die Bücher an. Am besten arbeitest Du ein kleines abgeschlossenes Kapitel durch. Denn mit Lehrbüchern ist es wie mit Musik : es ist Geschmacksache. Ein Lehrbuch kann so gut sein wie es will; wenn es aber langweilig geschrieben ist, unübersichtlich gegliedert oder wirt in Bildern und Figuren ist, dann taugt es nichts! Also erst ausprobieren, dann kaufen.

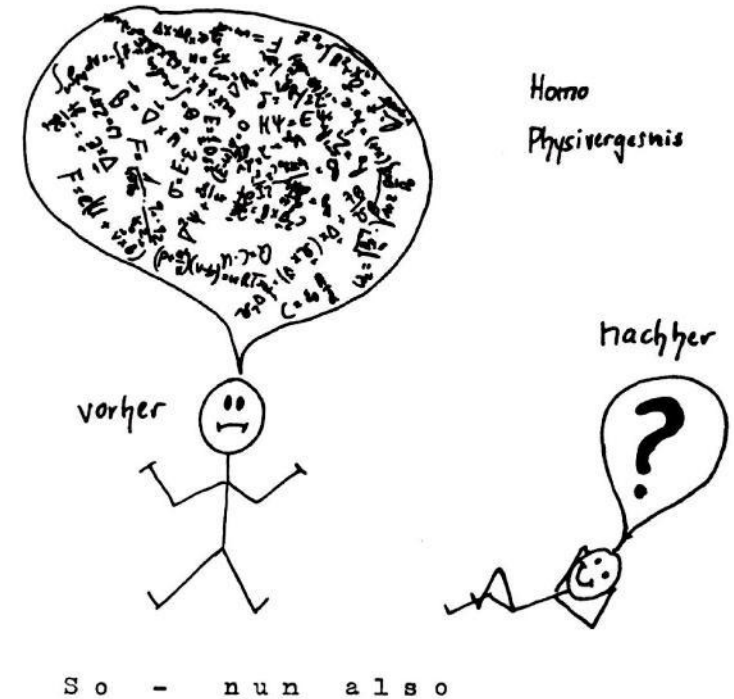
Ich rate auf jeden Fall jedem dringend dazu, ein gutes (für ihn ansprechendes und vor allem verständliches) Lehrbuch zu besitzen. Vorlesungsgebrauch, Praktikum, Prüfungsvorbereitung machen ein solches notwendig. Das wichtigste bei einem Lehrbuch das ist die Verständlichkeit. Physikalisch und wissenschaftlich gute, genaue und detaillierte Bücher kann jeder schreiben. Aber physikalisch unvorbelastete und vor allem - schlimm genug - unwillige und lustlose Studenten, die gezwungen sind, zwei oder vier Semester lang Physik zu machen, zu motivieren, anzusprechen und ihnen einen komplizierten Vorgang gründlich und verständlich zu erklären, ohne daß sie sich wie die letzten Idioten vorkommen, das ist schon schwieriger und wird nur von wenigen Lehrbüchern erfüllt. Deshalb - Vorsicht !

Wenn man nämlich erst einmal über die schwierige und oft trockene Hürde 'Grundlagen' hinweg ist, dann entpuppt sich das Fach Physik als etwas Interessantes und sogar Faszinierendes. Jeder Mensch hat mit Physik zu tun, ob er will oder nicht. Und nicht nur mit Physik : mit allen Naturwissenschaften. Denn diese Fächer sind die Grundlagen seiner Umwelt, seines Lebens und seiner Existenz.

Um nun auch den weniger Willigen und denen, die - weil sie Physik nebenher machen müssen und sie ablehnen - die Physik als Hilfswissenschaft abqualifizieren, die Faszination näherzubringen, die auf physikalischem Gebiet von unserer Umwelt ausgeht, möchte ich hier vier Bücher (die auch erschwinglich sind) empfehlen. Es sind dies keine sogenannten Fachbücher, sie gehören eher in die sogenannte populärwissenschaftliche Ecke. Diese Ecke wird zwar auf der Uni meist verpönt; warum? Keine Ahnung; ich denke weil sich viele Akademiker zu fein (oder vielleicht zu bequem) dazu sind, unvorbereiteten Menschen komplizierte Zusammenhänge in einfachen verständlichen Worten und mit passenden simplen Beispielen nahezubringen. Und das können diese Bücher, die ich hiermit jedem ans Herz lege :

1. Harald Fritzsche : "Quarks" - Urstoff unserer Welt neuerdings als Taschenbuch der Reihe Piper erschienen (Piper Bd. 332, München 1984), Preis DM 14.90 - das Buch befaßt sich mit dem interessanten Gebiet der modernen Elementarteilchenphysik und schildert in verständlicher Form die neuesten Erkenntnisse).
2. Walter R. Fuchs "Knaurs Buch der modernen Physik" Knaur Taschenbuch 255. Ein Buch (Preis etwa 18 DM), das eine Chronologie der modernen Physik und einen guten allgemeinen Überblick über das ganze Fach gibt.
3. J. Andrade e Silva / G. Lochak "Wellen und Teilchen" - Probleme der Quantenmechanik. Kindlers Universitäts Bibliothek, 1969. In verblüffend logischer und klarer Darstellung werden die so kompliziert anmutenden Zusammenhänge der Quantenmechanik nahegebracht.
4. Engelbert Brode (Hrsg.) - Ludwig Boltzmann "Populäre

Schriften", Vieweg Verlag Braunschweig 1979, Preis etwa 30 DM. Dies ist mehr für die philosophisch interessierten Leser zu empfehlen. Boltzmann war ein Physiker, der sich über viel mehr als nur die Physik Gedanken gemacht hat. In dem Buch sind Essays, Vorträge, Gespräche usw. zusammengestellt.



G U T E S G E L I N G E N ! ! !



A. MECHANIK

I. MECHANIK DES MAssENPUNKTES	1	4
1. Bewegungen	4	4
2. Newton'sche Axiome	7	7
3. Kreisbewegung	8	8
4. Einfache Bewegungen	13	13
a) gleichförmige geradlinige Bewegung	13	13
b) gleichmäßig beschleunigte Bewegung	13	13
c) allgemein : ungleichförmig beschl. Beweg.	14	14
d) Sonderfälle und zusammengesetzte Bewegungen	14	14
α) freier Fall	14	14
β) senkrechter Wurf	14	14
γ) waagrechter Wurf	15	15
δ) schräger Wurf	16	16
5. Arbeit, Energie, Leistung	17	17
a) Die Arbeit	17	17
α) Hubarbeit	19	19
β) Reibungsarbeit	19	19
γ) Beschleunigungsarbeit	20	20
δ) Verformungsarbeit	20	20
b) Energie	21	21
α) potentielle Energie	22	22
β) kinetische Energie	23	23
γ) Energieerhaltungssatz	23	23
c) Leistung	24	24
6. Der Impuls	25	25
a) Begriff	25	25
b) Anwendungen	27	27
α) Rakete	27	27
β) Stoßprobleme	28	28
- elastischer Stoß	28	28
- inelastischer Stoß	30	30
7. Reibung	31	31
8. Gravitation	32	32
a) Gravitationsgesetz	32	32
b) Arbeit im Gravitationsfeld	33	33
c) astronautische Geschwindigkeiten	33	33
d) Kepler'sche Planetengesetze	34	34
II. MECHANIK DES STARREN KÖRPERS	35	35
1. Schwerpunkt	35	35
a) Starrer Körper	35	35
b) Drehmoment	35	35
c) Kräftepaar	38	38
2. Arbeit, Leistung	40	40
3. Drehbewegungen	41	41
a) gleichförmige Rotation	41	41
b) gleichmäßig beschleunigte Rotation	41	41
4. Kräfte bei der Rotation, Scheinkräfte	42	42
a) Zentripetalkraft	42	42
b) Coriolis - Kraft	43	43

5. Dynamisches Grundgesetz der Rotation	45
a) Massenträgheitsmoment	45
b) Rotationsenergie	46
c) Steiner'scher Satz	49
d) Hauptträgheitsachsen	49
e) Analogien	50
6. Rollbewegungen	51
7. Der Drehimpuls	52
8. Der Kreisel	54
a) Kräftefreier Kreisel	54
b) Nutation	55
c) Präzession	55

III. HYDROMECHANIK UND ELASTIZITÄT

1. Ruhende Flüssigkeiten	56
a) Der Druck	56
b) Kompressibilität	58
c) Auftrieb	58
2. Strömende Flüssigkeiten	59
a) Ausflußgeschwindigkeit	60
b) Durchfluß durch Röhren	60
c) Dynamische Viskosität	60
d) Laminare Strömung durch ein Rohr	61
e) Laminare Strömung um eine Kugel	63
3. Molekularkräfte	63
a) Oberflächenspannung	64
b) Kapillarität	65
c) Molekularkräfte	66
4. Aerostatik	66
a) Luftdruck	66
b) Luftdruckmessung	67
5. Elastizität fester Körper	67
a) Dehnung	68
b) Querkontraktion	69
c) Kompressibilität	69

B. SCHWINGUNGEN

I. ANALOGIE : KREISBEWEGUNG - SCHWINGUNG	70
1. Anwendung : Pendel	73
2. Schwingungsenergie	75
3. Energieerhaltungssatz	75
II. ALLGEMEINE SCHWINGUNGEN - DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	76
1. Harmonische ungedämpfte Schwingung	76
2. Gedämpfte harmonische Schwingung	79
3. Erzwungene Schwingung	82
4. Erzwungene gedämpfte Schwingung	86
5. Mathematisches Pendel	89
6. Drehpendel	92
7. Physikalisches Pendel	92

III. SUPERPOSITION	93	6. Influenz	128
1. Schwebung, Interferenz	94	7. Der Kondensator	130
2. Gekoppelte Pendel	96	a) Kapazität	130
3. Eigenschwingungen	98	b) Kugelkondensator	131
		c) Plattenkondensator	131
		d) Millikan-Versuch	132
		8. Energie des elektrischen Feldes	133
		a) Energie auf einem geladenen Leiter	133
		b) Energie im elektrischen Feld	133
		c) Kirchhoff'sche Spannungswaage	133
<u>C. W E L L E N</u>	99	II. DIELEKTRIKA	134
I. EINFÜHRUNG	99	1. Polarisation	134
1. Begriffe	99	2. Piezoelektrizität	137
2. Mathematische Beschreibung	100	III. GLEICHSTROM	138
3. Wellenarten	102	1. Stromstärke	138
II. WELLENGLEICHUNGEN	103	2. Elektrischer Widerstand	139
1. Longitudinalwellen	103	3. Kirchhoff'sche Gesetze	141
2. Transversalwellen	104	4. Energie und Leistung des Stromes	143
3. Schrödingergleichung	105	IV. STROMLEITUNG	143
III. ÜBERLAGERUNG VON WELLEN	106	1. Stromleitung in Metallen	143
1. Interferenz	106	2. Stromleitung in Halbleitern	144
a) bei gleicher Frequenz	106	a) Eigenleitung	144
b) bei verschiedener Frequenz	108	b) Fremdleitung	144
2. Gruppen- und Phasengeschwindigkeit	108	c) Diode	145
3. Dispersion	110	d) Transistor	146
4. Ebene Wellen	110	e) Halbleiter-Technologie	146
5. Doppler - Effekt	111	3. Stromleitung in Flüssigkeiten	147
6. Überschall	113	a) Elektrolyse	147
IV. SCHALLWELLEN	113	b) Galvanische Elemente	149
1. Stehende Schallwellen	114	c) Volta'sche Spannungsreihe	149
2. Schallgeschwindigkeiten	116	4. Stromleitung in Gasen	150
a) Messung	116	a) Glimmentladung	150
b) Schallgeschwindigkeit im festen Körper	116	b) Bogen- und Funkenentladung	151
c) Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten	116	c) Kathoden- und Kanalstrahlen	151
d) Schallgeschwindigkeit in Gasen	117		
3. Akustische Begriffe	119	E. M A G N E T I S M U S	152
		I. MAXWELL'SCHE GLEICHUNGEN	152
<u>D. E L E K T R I Z I T Ä T</u>	121	1. Mathematischer Einschub	152
I. ELEKTRISCHES FELD	121	a) Felder	152
1. Ladungen	121	b) Partielle Differentiation	152
2. Kräfte zwischen Ladungen	121	c) Gradient	154
3. Elektrisches Feld	123	d) Divergenz	155
4. Elektrostatistisches Potential	125	e) Rotation	155
5. Elektrische Dipole	126	f) Nabla, Zusammenfassung	156
a) Dipolmoment	127		
b) Dipol im elektrischen Feld	128		

2. Maxwell'sche Gleichungen	157
a) Begriff	157
b) Gedanken zu den Gleichungen	158
c) Integralform	159
3. Magnetfelder	160
a) um einen geraden Draht	160
b) in einer stromdurchflossenen Spule	161
c) Magnetische Feldstärke	163
d) Richtung der Feldstärke	164
II. ELEKTROMAGNETISCHE INDUKTION	164
1. Faradays Versuche	164
2. Induktionsgesetz	165
a) magnetischer Fluß	166
b) Lenz'sche Regel	166
c) Anwendung : magnetischer Tonabnehmer	167
III. SELBSTINDUKTION	167
1. Induktivität	167
2. Ein- und Ausschaltvorgänge	168
3. Energiedichte des magnetischen Feldes	170
IV. KRÄFTE IM MAGNETFELD	171
1. Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter	171
2. Drehmoment auf eine Stromschleife	171
3. Kräfte zwischen parallelen Leitern	172
4. Lorentzkraft	172
5. Anwendung : Hall-Effekt	173
6. Wirbelströme	174
V. MATERIE IM MAGNETFELD	174
1. Magnetisierung	174
2. Arten der Magnetisierung	175
a) Diamagnetismus	175
b) Paramagnetismus	175
c) Ferromagnetismus	176
d) Hystereseschleife	176
3. Elektrische Meßinstrumente	176
a) Drehspulinstrument	176
b) Weicheiseninstrument	177
VI. FREIE ELEKTRONEN UND IONEN	177
1. Freie Teilchen	177
a) Glühelktrischer Effekt	178
b) Photoeffekt	178
c) Elektronen im elektrischen Feld	179
d) Elektronen im magnetischen Feld	180
e) Massenspektrometer	181
f) Braun'sche Röhre	181

2. Elektronenröhre	183
a) Raumladungen	183
b) Die Triode	184

VII. WECHSELSTROM 185

1. Erzeugung von Wechselstrom	185
2. Effektivwerte	186
3. Arbeit des Wechselstroms	187
4. Wechselstromwiderstände	187
a) kapazitiver Widerstand	188
b) induktiver Widerstand	188
5. Wechselstromkreise	189
6. Der Transformator	190

F. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN -

OPTIK 191

I. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN 191

1. Elektrischer Schwingkreis	191
2. Abstrahlung elektromagnetischer Wellen	194
3. Licht	197
a) Messung der Lichtgeschwindigkeit	197
α) Methode nach Olaf Römer	197
β) Methode nach Fizeau	197
γ) Drehspiegelmethode nach Foucault	198

II. OPTIK 198

1. Wellenoptik	198
a) Huygens-Fresnel'sches Prinzip	198
b) Fermat'sches Prinzip	199
c) Interferenz	200
α) Fresnel'scher Spiegelversuch	201
β) Interferenz an planparallelen Platten	201
γ) Michelson-Interferometer	202
δ) Stehende Lichtwellen	202
d) Beugung	203
α) Beugung am Spalt	203
β) Beugung am Doppelspalt	204
γ) Beugung am Gitter	204
δ) Auflösungsvermögen optischer Instrumente	204
e) Polarisiertes Licht	

2. Geometrische Optik	205
a) Ausbreitung von Licht	205
b) Reflexion	205
c) Brechung	206
d) Totalreflexion	207
e) Abbildung durch Linsen	207
α) Dicke Linsen	207
β) Dicke Linsen	207

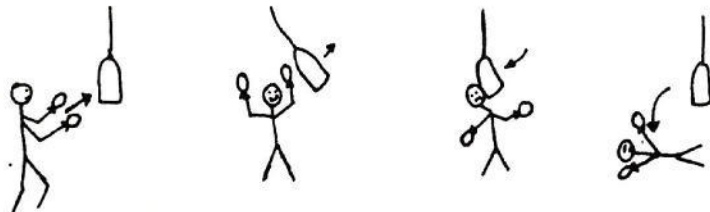
d) Zerstreulinse	208		
e) Kombination mehrerer Linsen	208		
f) Linsenfehler	208		
f) Optische Geräte	209		
g) Beleuchtungsarten	209		
G. WÄRME	210		
I. TEMPERATUR, WÄRME	210		
1. Temperatur	210		
2. Wärmemenge	211		
a) Wärmeenergie	211		
b) Wärmekapazität	211		
II. IDEALES GAS	213		
1. Zustandsgrößen	213		
2. Zustandsgleichung des idealen Gases	213		
III. KINETISCHE GASTHEORIE	215		
1. Grundgleichung	215		
2. Temperatur	216		
3. Wärmekapazität	216		
4. Äquipartitionsprinzip	218		
5. Boltzmann-Verteilung	219		
IV. 1. HAUPTSATZ DER WÄRMELEHRE	220		
1. Energiebilanz	220		
2. Zustandsänderungen	220		
3. Umkehrbarkeit von Prozessen	222		
a) Carnot-Prozeß	222		
b) Entropie	225		
4. Enthalpie	226		
V. 2. UND 3. HAUPTSATZ	226		
1. Zweiter Hauptsatz	226		
2. Dritter Hauptsatz	227		
3. Freie Energie und Enthalpie	227		
VI. THERMODYNAMISCHE EIGENSCHAFTEN VON MATERIE	228		
1. Thermische Ausdehnung	228		
2. Wärmetransport	228		
a) Wärmeleitung	228		
b) Konvektion	229		
c) Wärmestrahlung	229		
		3. Phasenübergänge	229
		a) Umwandlungswärmen	229
		b) Lösungswärme	230
		c) Reaktionswärme	230
		d) Koexistenzen	230
		d) Flüssigkeit-Dampf	230
		e) Festkörper-Flüssigkeit	231
		f) drei Phasen	231
		g) Verdampfung	231
		h) Reales Gas	232
		e) Joule-Thomson-Effekt	233
		f) Fixpunktverschiebungen	233
		H. ATOMPHYSIK	234
		1. Photonen	234
		2. Dualismus des Lichtes	235
		3. Bohr'sches Atommodell	236
		a) Bohr'sche Postulate	237
		b) Bohr'scher Radius	239
		c) Energiestufen des Wasserstoffatoms	239
		d) Spektralserien des Wasserstoffatoms	240
		e) Quantenzahlen	240
		f) Pauli-Prinzip	241
		4. Quantenmechanisches Atommodell	241
		a) Schrödinger-Gleichung	241
		b) Wellenfunktionen	242
		J. KERNPHYSIK	244
		1. Radioaktivität	244
		2. Detektoren	244
		3. α - Zerfall	245
		4. β - Zerfall	245

A. MECHANIK

Mechanik ! Darunter verstehen wir das Teilgebiet der Physik, der sich mit Bewegungen von makroskopischen Körpern befaßt. Und nicht nur mit diesen! Es geht vor allem um die Kräfte, die diese Bewegungen verursachen. Wir behandeln also in der Mechanik vor allem große, makroskopische Gebilde, im Gegensatz zu mikroskopischen, wie Atomen, Molekülen, Ionen und kleineren. Bei letztgenannten kommen noch andere Wechselwirkungen, wie elektrische oder magnetische Kräfte hinzu.

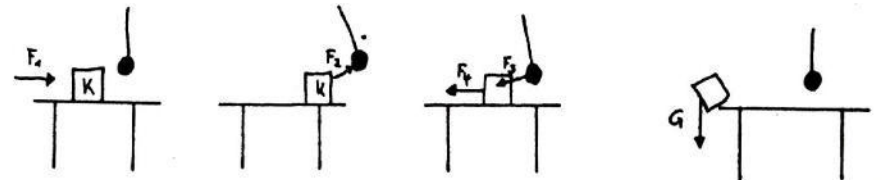
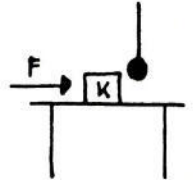
Es geht somit zunächst um die Kräfte auf Körper und deren Auswirkungen. Was sind nun physikalisch gesprochen Kräfte? Nun - im Grunde genommen bestehen zwischen physikalischen Kräften, und denen des Alltags kein großer Unterschied. Nur müssen wir hier etwas genauer arbeiten. Dazu ein Beispiel :

Ein Boxer trainiert am Sandsack. Nehmen wir an, er sei noch neu im Metier, und physikalisch unvorbelastet. Er schlägt gegen den Sandsack, und er denkt nicht daran, daß der Sandsack darauf ähnlich reagiert. Er haut zurück, so daß der Boxer das Gleichgewicht verliert und zu Boden stürzt.



Das haben wir nun mit Worten beschrieben und zur Verdeutlichung ein Bildchen dazu gemalt. In der Physik wollen wir das nun ein wenig deutlicher machen, ein wenig einfacher, wir schematisieren.

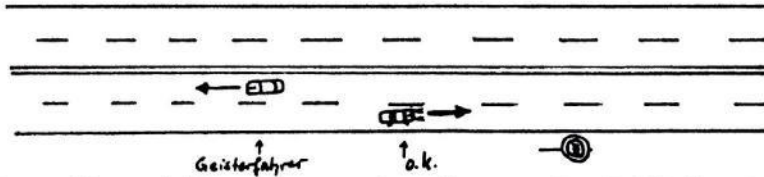
Bevor jemand glaubt, die Physik würde sich an Unschuldigen vergreifen und diese leiden lassen, lassen wir den Boxer weg, zeichnen einen Pfeil und sagen, das sei eine Kraft F . Den Pfeil zeichnen wir deshalb, damit man weiß, wohin die Kraft wirkt, denn das ist für die nachfolgende Bewegung von ausschlaggebender Bedeutung. Außerdem ersetzen wir den Boxer, der am Ende des Experimentes zu Boden stürzen soll, was wir ja nun im Gedankenexperiment - menschenfreundlich - tunlichst vermeiden wollten, durch einen Körper K . Meinetwegen einen Würfel. Aus dem Sandsack machen wir ein sogenanntes Pendel. Das ist praktisch nichts anderes, als eine Kugel, die an einer Schnur aufgehängt ist.



Nun wirken also folgende Kräfte :

- F_1 , beispielsweise eine boxende Hand,
- F_2 , die Kraft, die jetzt der Würfel auf das Pendel ausübt,
- F_3 , die Kraft, mit der der Pendel wieder zurück"schlägt",
- F_4 , die Kraft, die den Würfel bis zur Tischkante bewegt und
- G , die Kraft, die ihn nach unten zieht, die sogenannte Schwer- oder Gewichtskraft. Alle Kräfte sind durch Pfeile gekennzeichnet, deren Richtung uns angeben, wohin sie wirken und deren Länge, die uns eine Information darüber geben, wie groß (also wie stark) sie sind.

Wie wir noch sehen werden gibt es in der Physik viel mehr Größen, die wir so durch Pfeile kennzeichnen können. Nämlich alle die, bei denen die Richtung eine Rolle spielt. Zum Beispiel die Geschwindigkeit. Es ist ein Unterschied, ob ich mit 100 km/h die Autobahn entlangfahre, in der erlaubten Richtung, oder ob ich als Geisterfahrer mit der gleichen aber entgegengesetzten Geschwindigkeit -100 km/h die Autobahn frequentiere.



Welche weitere Größen kennen wir, die man durch Pfeile darstellen kann? Zum Beispiel eine Beschleunigung hat eine Richtung. Ist die Richtung der Beschleunigung gleich der der Geschwindigkeit, so wird die Geschwindigkeit größer. Wird eine Ampel rot, so treten wir (falls wir uns an die StVO halten, nüchtern und bei der Sache sind) auf die Bremse, werden langsamer, wir "beschleunigen negativ", bzw. wir verzögern. Auch hier sind die Richtungen von Geschwindigkeit und Beschleunigung entgegengesetzt. Wir werden noch viele Beispiele sehen, wo die Größe, die wir beschreiben wollen, nur durch einen Pfeil dargestellt werden kann. Solche Größen nennen wir Vektoren. Wir stellen sie graphisch durch Pfeile dar, in unseren Berechnungen durch einen kleinen waagrechten Pfeil über dem Symbol der Größe. z.B. \vec{F} , \vec{v} , \vec{a} , \vec{E} , \vec{B} usw. Es gibt aber auch noch andere Größen, die man nicht durch Vektoren (so nennt man diese Pfeile mathematisch) darstellen kann. Oder kann mir jemand sagen, welche Richtung die Temperatur in einem abgeschlossenen Raum hat? Sie hat keine Richtung. Ebensovienig, wie zum Beispiel die Zeit eine Richtung hat. Solche Größen nennt man im Gegensatz zu den Vektoren Skalare.

Bevor wir in die Mechanik der Kräfte eindringen, müssen wir uns kurz mit Vektoren befassen, da sie uns dauernd über den Weg laufen. Vektorielle Größen sind vollständig charakterisiert durch Angabe von Größe, Richtung und Einheit (denn die Einheit gehört zu jeder physikalischen Größe dazu - es macht schon einen Unterschied, ob man von 100 Grad Celsius oder von 100 km/h spricht).

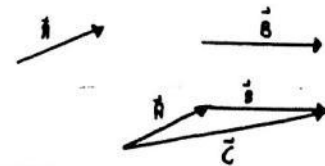
Falls nun bei einer vektoriellen Größe die Richtung unwichtig ist, zum Beispiel, weil sie konstant bleibt, oder nicht interessiert, so betrachtet man nur den Betrag des Vektors, das heißt, nur seine Länge. Man schreibt dann $|\vec{F}|$ oder einfach F .

Vielfach können Vektoren parallel verschoben werden, ohne daß sich irgendetwas ändert, allerdings ist dies nicht immer so, wir werden das am jeweiligen Beispiel sehen.

Im folgenden werden wir mit physikalischen Größen "rechnen", obwohl das eigentlich kaum geht. Man benutzt aber die Mathematik als sprachliche Vereinfachung. Nun - wie rechnet man mit Vektoren?

1. Addition von Vektoren

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{C}$$



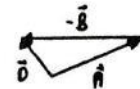
Man reht geometrisch die beiden Vektoren hintereinander. C geht dann vom Ende des einen zur Spitze des anderen Pfeiles.

2. Differenz zweier Vektoren

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{D}$$



Man bildet zunächst den Gegenvektor und addiert dann einfach.



3. Produkt Skalar · Vektor

Multipliziert man einen Vektor mit einem Skalar, so bleibt dir Richtung des Vektors beibehalten, nur die Größe, also der Betrag ändert sich, hier um das λ -fache:

$$\vec{B} = \lambda \cdot \vec{A} \quad \text{also auch} \quad |\vec{B}| = \lambda \cdot |\vec{A}|$$



4. Einheitsvektor

Multipliziert man einen Vektor mit dem Kehrwert seines Betrages, so erhält man den Einheitsvektor, der den Betrag 1 hat.



$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \vec{A}^0$$

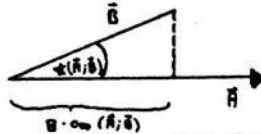
Man schreibt \vec{A}^0 , das heißt nichts anderes als A hoch Null, und das ist ja, wie wir wissen, gleich eins.

5. Skalarprodukt

Man kann auch zwei Vektoren miteinander multiplizieren. Hier gibt es zwei Möglichkeiten. Das Skalarprodukt ergibt einen Skalar als Ergebnis, das Vektor-(oder auch Kreuz-)produkt ergibt einen Vektor.

Unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren versteht man das Produkt des Betrages des einen Vektors und der Projektion des andern auf ihn.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(A;B) = \vec{B} \cdot \vec{A}$$



also: \vec{A} Punkt \vec{B} (beim Skalarprodukt schreiben wir einen Punkt!) ist gleich dem Produkt der beiden Beträge mal dem Kosinus des von beiden eingeschlossenen Winkels.

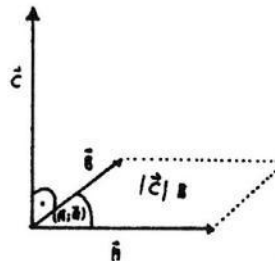
$$\Rightarrow \text{auch } \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = A^2 \quad \text{und} \quad \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = A^2 \quad \text{da } \cos 0^\circ = 1$$

6. Vektorprodukt

Unter einem Vektorprodukt zweier Vektoren A und B verstehen wir den Vektor C, der senkrecht auf einer Fläche eines von A und B gebildeten Parallelogramms steht und dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms ist.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \sin(A;B) \cdot \vec{C}^0 = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Dieses Produkt schreiben wir zur Verdeutlichung mit einem Kreuz.



Man sieht nun, daß, falls A und B parallel sind, gilt

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = AB; \quad \vec{A} \times \vec{B} = 0$$

und falls beide senkrecht aufeinander stehen:

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{A} \times \vec{B} = AB$$

Beim Vektorprodukt kommt es sehr auf die Reihenfolge der Faktoren an, denn

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A} \quad \text{sondern} \quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Außerdem steht der Vektor $(\vec{A} \times \vec{B})$ immer senkrecht auf einer Ebene, die durch \vec{A} und \vec{B} aufgespannt wird.

Wir können uns die Richtung von $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ leicht merken: Wir benutzen die Dreifingerregel der Rechten Hand

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

Daumen Zeigef. Mittelfinger



Stellen wir also die Richtungen von \vec{A} und \vec{B} durch Daumen, bzw. Zeigefinger dar, so gibt uns der rechtwinklig gespreizte Mittelfinger die Richtung von \vec{C} an.

So - wenden wir uns nun wieder der Mechanik zu. Wie wir bereits sagten, befassen wir uns dort mit Kräften und deren Auswirkungen auf Körper.

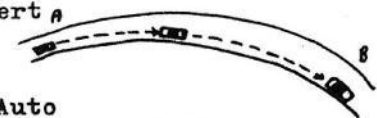
Diese ganzen Auswirkungen können wir in zwei Bewegungsgruppen aufteilen, nämlich in die Geradeaus- und in die Drehbewegungen. Wissenschaftlich formuliert man das etwas anders: Translations- und Rotationsbewegungen.

Beispiel: Ein Auto fährt auf einer geraden Straße - der Fall liegt klar, es handelt sich um eine Translationsbewegung.

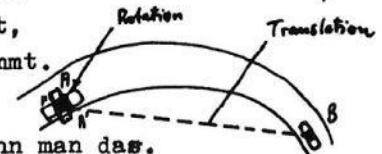
Das Auto steht auf einer Hebebühne, die sich drehen kann, also klar eine Dreh- oder Rotationsbewegung. Gut - aber nun soll das Auto ganz normal auf einer Kurve fahren. Was geschieht?

Wir können das auf zwei Arten zeichnen

1. So wie es auch passiert



2. Wir drehen erst das Auto und verschieben es so weit, daß es im Endpunkt B ankommt.



Nun kann man das? Klar kann man das.

Wie wollen ja hier nicht autofahren, sondern Bewegungen

untersuchen, und da darf man das.

Unser Auto hat jetzt eine Form, die nicht so ganz einfach physikalisch zu beschreiben ist. Was tun?

Bei welcher Bewegung kommt es auf die Form des Autos an? Nur bei der Drehbewegung. Wieso?

Nun - da spielt es zum Beispiel eine Rolle, durch welchen Punkt des Wagens die Drehachse verläuft, denn das hängt mit der Form zusammen, wie wir später noch sehen werden.

Wie sieht es mit der Translationsbewegung aus? Kommt es da auf die Form an? Eigentlich nicht. Ob ich jetzt einen Würfel verschiebe, oder ein gleich schweres Auto, ist egal, wenn wir auf die Reibung verzichten, d.h. wenn wir sagen, es gäbe keine Reibung zwischen Boden und unserem Körper.

Deshalb machen wir eine Idealisierung bei der Translation. Wir behalten die Masse (das ist das Maß für die Schwere des Körpers) bei und vernachlässigen sein Volumen. Wir zeichnen ihn also nur noch als Punkt:

I. MECHANIK DES MASENPUNKTES

1. Bewegungen

Unter einem Massenpunkt versteht man Körper endlicher Masse, deren räumliche Ausmaße man vernachlässigt.

Wann kann man das tun? Nun - immer dann, wenn eine Änderung der räumlichen Ausmaße keine Wirkung zeigen würde.

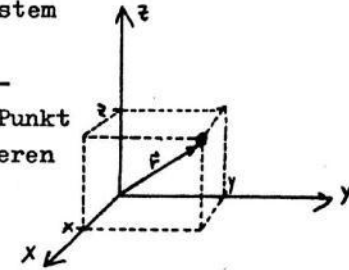
Zum Beispiel können wir die Erde als Massenpunkt ansehen. Aber nur dann, wenn wir uns ins Weltall hinaus begeben und auch andere Himmelskörper als Massenpunkte betrachten. Sagen wir, wir wollen wissen, wie sich die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne verhält. Dann können wir beide als Massenpunkte behandeln. Anders ist es, wenn wir nahe bei der Erde (oder einem anderen Himmelskörper) sind.

Betrachten wir zum Beispiel den Fall eines Fallschirmspringers aus 3000 m Höhe. Dann ist die Erde kein Massenpunkt mehr, wo soll denn der Fallschirmspringer landen?! Allerdings können wir bei diesem Problem den Fallschirmspringer zum Massenpunkt degradieren. Denn dieser fällt

geradlinig nach unten. Beim Fall kommt es nicht auf seine Länge, seinen Brustumfang oder seine Schuhgröße an (wenn wir die Luftreibung am Mann - nicht am Fallschirm! - vernachlässigen). Sondern einzig und allein auf seine Masse und auf die Luftreibung des Fallschirmes kommt es an.

Zunächst wollen wir uns also mit Bewegungen von Massenpunkten beschäftigen. Diese beschränken sich auf geradlinige und auf kreisförmige Bahnen. Denn jede andere Bahn kann man aus geraden und kreisförmigen Bahnelementen zusammenstückeln.

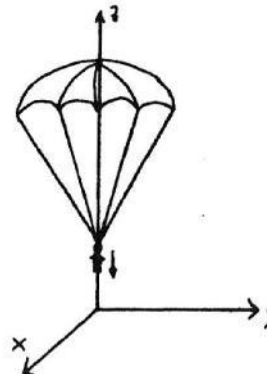
Um nun eine Bewegung beschreiben zu können, brauchen wir ein Bezugssystem. Wir wählen dazu in den meisten Fällen ein kartesisches Koordinatensystem mit x-, y-, und z-Achse. Hierin kann man durch Angabe der Koordinaten genau angeben, wo der Punkt ist, und bei Angabe einer weiteren Zahl von Koordinaten kann man auch angeben, was er macht. Den Vektor, der vom Ursprung



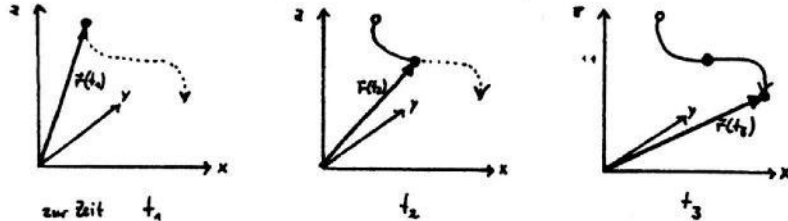
zu unserem Massenpunkt geht, nennen wir Ortsvektor \vec{r} . Wo ist nun der Ursprung? das kommt ganz auf das gestellte Problem an, wohin man den Ursprung, und damit das ganze Koordinatensystem setzt. Bei unserem Fallschirmspringer zum Beispiel ist es am günstigsten, den Ursprung genau unter ihn zu legen, und zwar auf die Erdoberfläche.

Das heißt also, wir legen die x-y-Ebene auf die Erdober-

fläche, den Ursprung in den Punkt, auf dem der Fallschirmspringer landen wird, und haben nun den Fall, daß sich (Windstille sei vorausgesetzt) der fallschirmspringer nur auf der z-Achse bewegt. Hier handelt es sich also um eine leicht zu beschreibende - Bewegung in einer Dimension.



Zurück zur allgemeinen Bewegung. Wir sprachen vom Ortsvektor \vec{r} . Dieser Ortsvektor muß zeitabhängig sein, denn er soll Bewegungen beschreiben, er soll sich also mit der Zeit ändern können. Denn seine Spitze "klebt" am Massenpunkt, der sich ja irgendwie bewegen soll.

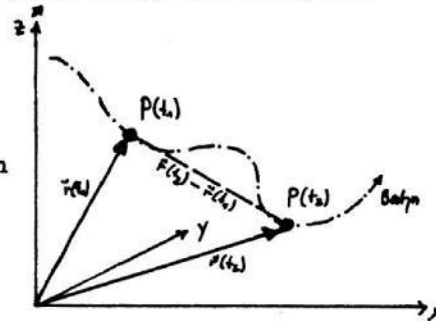


Wovon hängt also \vec{r} nun ab? Vom Ort und der Zeit, das bedeutet, von x , y , und z ebenso von der Zeit t . So eine Abhängigkeit schreiben wir folgendermaßen

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z, t)$$

Unser Massenpunkt bewege sich jetzt längs der Bahn, die eingezeichnet ist.

Zu zwei verschiedenen Zeiten hat der Punkt zwei verschiedene Orte $P(t_1)$ und $P(t_2)$. (Mit $P(t)$ bezeichnen wir einen Punkt zur bestimmten Zeit t). Wie lange braucht der Punkt um von $P(t_1)$ zu $P(t_2)$ zu gelangen, wir fragen also, welche Geschwindigkeit der



Punkt hat. Am Punkt $P(t_1)$ nimmt der Massenpunkt den Ort ein, der durch $\vec{r}(t_1)$ beschrieben wird. Am Punkt $P(t_2)$ analog liegt er bei $\vec{r}(t_2)$. Er braucht also für den Weg $\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ die Zeit $t_2 - t_1$. Schon aus dem Alltag wissen wir, daß Geschwindigkeit zurückgelegter Weg pro dafür gebrauchter Zeit ist:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{benötigte Zeit}}$$

Hier bei uns also
$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Bei den Größen \vec{r} und \vec{v} handelt es sich um Vektoren.

Die Richtung der Geschwindigkeit \vec{v} ist somit mit der Richtung des Vektors $\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ identisch. Schön und gut - aber stimmt denn das? Sehen wir einmal genau hin, so erkennen wir, daß die tatsächliche Bahn eine andere ist.

Dazu ein Alltagsvergleich. Wir fahren von Frankfurt nach München über Karlsruhe - Stuttgart - Ulm. Für die Fahrstrecke von ca. 395 km brauchen wir meinetwegen 5 Stunden. Also fahren wir mit einer Geschwindigkeit von

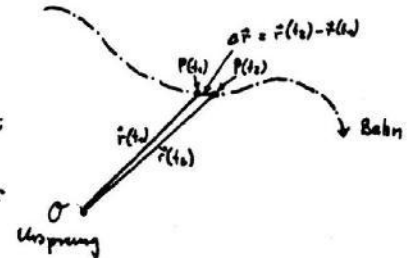
$$\frac{395}{5} = 79 \text{ km/h. Stimmt denn das?}$$

Ja und nein. In diesem Fall handelt es sich um die Durchschnittsgeschwindigkeit. Schauen wir auf den Tacho, so fahren wir mal mit 60 km/h (Baustelle zwischen Stuttgart-Vaihingen und Stuttgart-Degerloch), mal mit 130 km/h (wo's geht), manchmal müssen wir aber auch auf 30 km/h heruntergehen (Stau am Aichelberg); dafür holen wir (zwischen Merklingen und Ulm-West) mit 150 km/h wieder auf.

Diese ganzen Geschwindigkeiten waren sogenannte Momentangeschwindigkeiten. Sie geben uns den Geschwindigkeitswert für eine ganz bestimmte Zeit an. Zurück zu unserem Massenpunkt. Betrachten wir eine viel kürzere Zeitspanne, so nähert sich der Durchschnittsgeschwindigkeitswert der tatsächlichen Momentangeschwindigkeit schon beträchtlich an, da die Wegabweichung nicht mehr so groß ist. Hier also

$$\vec{v}(t_1, t_2) = \frac{\Delta \vec{r}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Es geht aber noch viel genauer. Wir lassen die verstrichene Zeit Δt gegen Null gehen, also ganz klein werden. Dann gilt, wie wir aus der Mathematik noch wissen:

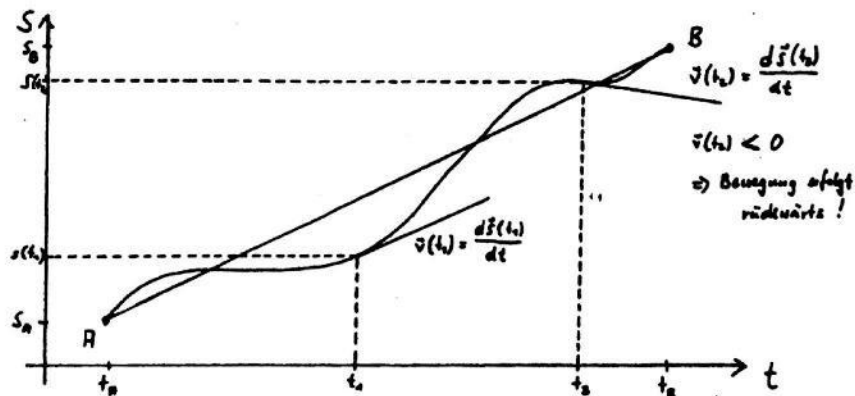


$$\vec{v}(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t_1)$$

Wir sehen also:

Die Momentangeschwindigkeit zu einer Zeit t ist gerade die Zeitableitung des Ortsvektors zur Zeit t .

Wir zeichnen dies nun als Weg-Zeit-Diagramm:



Rechts ist die Zeit aufgetragen, nach oben die Strecke. Bei A geht der Massenpunkt los, bei B kommt er an. Eine Mittlere Geschwindigkeit ist die Strecke \overline{AB} . Wir wollen aber die genaue Geschwindigkeit wissen. Für die Zeiten t_1 und t_2 ist sie eingezeichnet. Sie ist gerade so groß, wie die Steigung der Tangente zur jeweiligen Zeit (und das ist ja nichts anderes als die Ableitung).

Noch kurz etwas zur Einheit der Geschwindigkeit. Vorhin sagten wir km/h, also Kilometer pro Stunde. In der Physik wird heute das sogenannte SI-System verwendet (Système Internationale). Seine Grundgrößen sind Meter, Kilogramm, Sekunde und Ampère. In der Mechanik brauchen wir nur die ersten drei: Meter (m), Kilogramm (kg) und Sekunde (sec). So schreiben wir also km/h in m/sec um:

$$1 \text{ km/h} = 1000 \text{ m/h} = 1000 \text{ m in } 3600 \text{ sec, also}$$

$$1 \text{ km/h} = 0,277 \text{ m/sec} \quad \text{und} \quad 1 \text{ m/sec} = 3,6 \text{ km/h.}$$

So weiter - Falls nun $\vec{v}(t) = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$, bzw. $\vec{r} = \text{const.}$ Somit bleibt der Ortsvektor unverändert stehen. Das ist ja auch ganz klar: Wenn sich ein Massenpunkt oder irgendwas anderes nicht bewegt, ist die Geschwindigkeit gleich Null. Wenn $\vec{r}(t)$ den Ort des Massenpunktes zur Zeit t beschreibt, so beschreibt $\vec{v}(t)$ die Geschwindigkeit des Massenpunktes während dieser Zeit t . Diese ist konstant, wenn ihre Zeitableitung gleich Null ist.

$$\vec{v}(t) = \text{const.} \iff \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a} = 0.$$

Die Änderung der Geschwindigkeit ist also gleich Null. Das bedeutet, daß der Massenpunkt überall die gleiche Geschwindigkeit hat. Er wird somit nirgends schneller oder langsamer. Die Größe des "Schneller- oder Langsamerwerdens" heißt Beschleunigung \vec{a} .

- Ist $\vec{a} = 0$ (keine Beschleunigung) \rightarrow Geschwindigkeit ist konstant
- $\vec{a} > 0$ (Beschleunigung ist positiv) \rightarrow Geschwindigkeit wird größer
- $\vec{a} < 0$ (Beschleunigung ist negativ; Verzögerung) Geschwindigkeit wird kleiner

Also - Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Falls $d\vec{v}/dt = \text{const.}$, somit die Beschleunigung konstant kann man auch einfacher schreiben:

$$\vec{a} = \vec{v}/t$$

Also lauten die Einheiten

$$\left[\frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Zeit}} \right] = \frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot \frac{1}{\text{sec}} = \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

Die Geschwindigkeit stellen wir durch einen Vektor dar. Was kann sich nun bei der Geschwindigkeit ändern, daß eine von Null verschiedene Beschleunigung herauskommt?

Nun- die Geschwindigkeit kann sich in Richtung und in Betrag ändern. Oder auch in Beidem! Hat die Beschleunigung die gleiche Richtung (bzw. die Gegenrichtung) von der Geschwindigkeit, oder stehen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor parallel zueinander, so ändert die Beschleunigung nur den Betrag von $|\vec{v}|$. Sie heißt Bahnbeschleunigung oder Tangentialbeschleunigung. Wir begegnen ihr, wenn wir im Auto fahren und Gasgeben (so werden wir schneller) oder bremsen (dann werden wir langsamer, falls das Auto in Ordnung ist).

Ändert allerdings die Beschleunigung nur die Richtung der Geschwindigkeit, nicht aber ihren Betrag, so spricht man von Radialbeschleunigung. Eine solche werden wir bald bei der Behandlung der Kreisbewegung berechnen.

Meist ist eine Beschleunigung aus Radial- und Tangentialanteil zusammengesetzt; deshalb kann man jede Beschleunigung in ihre Radial- und Tangentialkomponente zerlegen.

2. Newtonsche Axiome

Die Newtonschen Axiome befassen sich mit Kräften an Körpern und Massenpunkten. Aristoteles (384- 322 v.Chr.) sagte über Kräfte an einem Körper :

"Die Geschwindigkeit eines Körpers nimmt stets ab, wenn keine treibenden Kräfte wirken."

Dies scheint auch richtig zu sein; man denke nur an seinen Benzinverbrauch, wenn man mit konstanter Geschwindigkeit von 120 km/h von Mannheim nach Saarbrücken fährt. Dabei verbraucht man zur Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit Energie, in unserem Falle Benzin.

Physikalisch gesehen ist es allerdings falsch. Galilei erkannte schon früh den Einfluß der Reibung auf die Bewegung von Körpern und Newton formulierte die Grundlagen der Mechanik in den Axiomen seiner "Philosophiae naturalis principia mathematica" 1686 (für unsere Lateiner!)

① **JEDER KÖRPER BEHART IM ZUSTAND DER RUHE ODER DER GERADLINIGEN GLEICHFÖRMIGEN BEWEGUNG, WENN KEINE (ÄUSSEREN) KRÄFTE AUF IHN WIRKEN!**

Dieses Axiom gilt für geschlossene Systeme (z.B. Planetensystem) wie auch auf Teile eines Körpers (z.B. einige Wassertropfen in einem Bach). Das heißt nichts anderes, als daß ein Körper, einmal angeschubst,

sich immer weiter gleichförmig und geradlinig weiterbewegt. Dies ist im Alltag kaum zu beobachten, da immer irgendwelche hemmenden Kräfte (nämlich in der Hauptsache Reibungskräfte) auf ihn wirken.

Aus ① folgt:

- Eine Kraft ist die Ursache jeder Bewegungsänderung und jeder Verformung eines Körpers.
- Jeder Körper hat das Bestreben, seinen Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung beizubehalten. Diese Eigenschaft heißt Trägheit oder Beharrungsprinzip.

Die Trägheit ist eine Eigenschaft, die allen Körpern zukommt (gleichgültig ob fest, flüssig oder gasförmig).

Man definiert die "Masse" als Maß für die Trägheit.

Einheit der Masse m ist im SI-System das Kilogramm (kg).

② **DIE BESCHLEUNIGUNG \vec{a} IST DER BESCHLEUNIGENDEN KRAFT \vec{F} DIREKT PROPORTIONAL UND HAT IHRE RICHTUNG**

Die Beschleunigung wird bei gleichen Kräften durch den Einfluß des bewegten Körpers mitbestimmt. Dieser Einfluß beruht auf seiner Trägheit und wird durch die Masse m gemessen. Also

$F \sim m$ und $\vec{F} \sim \vec{a}$ somit können wir insgesamt sagen **$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$**

da $[m] = \text{kg}$ und $[a] = \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ folgt daraus :

Die Einheit für eine Kraft ist $\frac{\text{kgm}}{\text{sec}^2} = \text{N}$ (Newton)

1 Newton ist die Kraft, die eine Masse von 1 kg auf $1 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ beschleunigt.

Beispiel:

Ein zu Boden fallender Körper von $m = 1 \text{ kg}$ erhält durch die Gewichtskraft G die Beschleunigung \vec{g} . In einem späteren Kapitel werden wir die Gravitationskraft G , also die Anziehungskraft zwischen zwei Massen erörtern. Wir nehmen hier etwas vorweg. Mit seiner Hilfe können wir die Beschleunigung \vec{g} errechnen, die ein zur Erde fallender Körper erhält:

$$\vec{G} = \gamma \cdot \frac{M_{\text{Erde}} \cdot M_{\text{Körper}}}{r_{\text{Erde-Körper}}^2}$$

wobei $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kgsec}^2}$ Gravitationskonstante

M_{Erde} und $M_{\text{Körper}}$ sind die Massen der Erde bzw. des Körpers

$r_{\text{Erde-Körper}}$ = Entfernung der Schwerpunkte beider Körper.

$r_{\text{Erde-Körper}}$ = Erdradius + Höhe unseres fallenden Körpers über der Erdoberfläche.

Da nun der Erdradius wesentlich größer als die Höhe ist, können wir letztere vernachlässigen, denn:

Erdradius = 6371 km

Höhe sei = 0,003 km = 3m

$r_{\text{Erde-Körper}} = 6371003 \text{ m}$
 Erdradius = 6371000 m } Fehler ca. 0,00005 % !!!

mit $M_{\text{Erde}} = 5,971 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$M_{\text{Körper}} = 1 \text{ kg}$

folgt

$$\vec{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,974 \cdot 10^{24} \cdot 1}{(6,371 \cdot 10^6)^2} \left[\frac{\text{m}^3 \cdot \text{kg}^2}{\text{kgsec}^2 \cdot \text{m}^2} \right]$$

$$\vec{G} = 9,8169 \frac{\text{kgm}}{\text{sec}^2} \approx 9,81 \text{ N}$$

und da $\vec{G} = m \cdot \vec{g} \implies \vec{g} = \frac{\vec{G}}{m} = \frac{9,81 \text{ kgm}}{1 \text{ kgsec}^2}$

somit ist $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

Ein Körper der Masse $m = 1 \text{ kg}$ wird von der Erdschwerkraft (in der Nähe der Erdoberfläche) auf $9,81 \text{ m/sec}^2$ beschleunigt.

Im cgs-System wird oft noch die Einheit Kilopond verwendet. Kilopond ist keine Massen- sondern eine Gewichts- und damit eine Krafteinheit

es gilt : 1 Newton = 0,102 kp oder 1kp = 9,81 N .

③

DIE VON ZWEI KÖRPERN AUF EINANDER AUSGEÜBTEN KRÄFTE HABEN DEN GLEICHEN BETRAG UND ENTGEGENGESETZTE RICHTUNG (ACTIO = REACTIO) - (REAKTIONSPRINZIP).

zum Beispiel zieht ein Magnet ein Stück Eisen mit der gleichen Kraft an, mit der er selbst vom Eisen angezogen wird.

Das 3. Newtonsche Axiom gilt natürlich nur dann, wenn keine äußeren Kräfte zusätzlich wirken. Ein System, in dem äußere Kräfte von vorneherein ausgeschlossen werden, ist ein sogenanntes abgeschlossenes System : Unter einem abgeschlossenen System versteht man ein System von Körpern, auf das keine äußeren Kräfte wirken.

Da jedoch jede Bewegungsänderung nur durch Wirksamwerden einer Kraft ermöglicht wird, gilt:

Ein Körper oder ein abgeschlossenes System von Körpern kann den Bewegungszustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung nicht ändern, wenn keine äußeren Kräfte einwirken.

Zum Beispiel kann sich Münchhausen nie aus dem Sumpf herausziehen.

④

ZWEI (ODER MEHRERE) VONEINANDER UNABHÄNGIGE BEWEGUNGEN, DIE GLEICHZEITIG STATTFINDEN, KÖNNEN GETRENNT UND NACHEINANDER UNTERSUCHT WERDEN, OHNE DASS SICH AM ENDERGEBNIS ETWAS ÄNDERT (PRINZIP DER UNABHÄNGIGKEIT DER BEWEGUNG).

Dieses Axiom wird oft - aber nicht immer - mit zu den 3 Newton'schen Axiomen ①, ②, und ③ dazugerechnet.

3. Kreisbewegung

Die Kreisbewegung, also die Bewegung von Massen auf einer Kreisbahn wird uns noch öfter begegnen. Zunächst beziehen wir uns, wie überhaupt in diesem Kapitel auf Massenpunkte und lassen solch einen Massenpunkt auf einer Kreisbahn umlaufen. Als erstes wollen wir uns fragen, wieso ein solcher Massenpunkt denn überhaupt auf einer Kreisbahn bleibt. Sehen wir uns das 1. Newtonsche Axiom an : Ein Körper be-

harret in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn keine Kräfte auf ihn wirken. Eine Kreisbahn ist natürlich keine geradlinige Bahn. Also muß auf unseren Massenpunkt eine Kraft (vielleicht auch mehrere) wirken. Betrachten wir uns ein Beispiel:

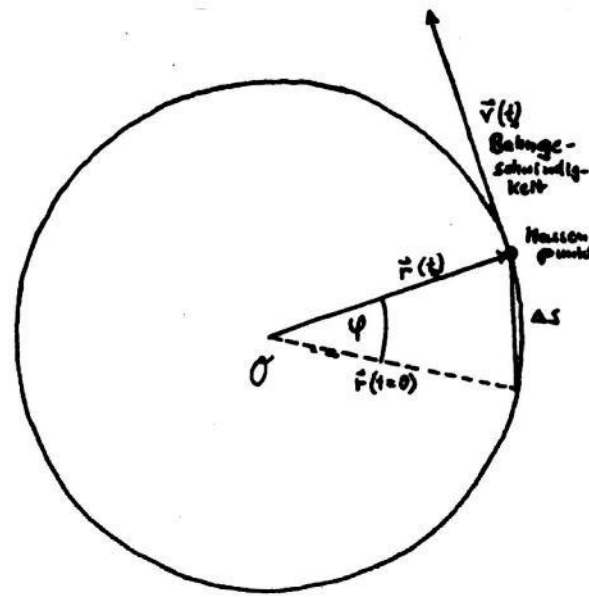
Schauen wir der bayrischen Zenzi zu, die, von Langeweile geplagt, einen Eimer mit frischer Kuhmilch mit einer Hand und ausgestrecktem Arm herumschleudert. Der Eimer beschreibt eine Kreisbewegung. Er soll nun die Stelle unseres Massenpunktes einnehmen. Wieso bewegt er sich nicht gleichförmig und geradlinig weiter? Nun - die Zenzi hält ihn ja fest. Physikalisch ausgedrückt: ihr Arm übt auf den Eimer eine Kraft aus. Daß er das tut, spürt man - führt man den Versuch selbst aus - spätestens nach einer Stunde: der Arm wird schmerzen. Natürlich ist dieses Experiment nicht auf Bayern beschränkt. Es kann ebensogut vom Meisje in Apeldoorn oder vom Martha in Dudweiler durchgeführt werden. Außerdem muß der Eimer nicht mit Milch gefüllt sein, sondern er kann Wasser, Wein oder sonst irgendetwas Flüssiges enthalten. Was geschieht beim Schleudern mit der Flüssigkeit? Nichts! Sie bleibt im Eimer, selbst wenn er gerade am oberen Scheitelpunkt der Kreisbahn ist. Aber warum fließt die Flüssigkeit nicht heraus? Das kann nur deshalb der Fall sein, weil eine zweite Kraft wirkt, die die Flüssigkeit im Eimer festhält. Wir werden im folgenden sehen, daß zwei Kräfte dafür verantwortlich sein müssen, daß sich irgendwelche Massen auf Kreisbahnen bewegen.

Sehen wir uns die Sache genau an:
Es bewege sich ein Massenpunkt auf einer Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit v . Nur der Betrag von v ist konstant. Nicht die Richtung, sonst könnte es keine Kreisbewegung sein. $|\vec{v}| = \text{konst.} = \text{Bahngeschwindigkeit}$

Mit v zu rechnen, wie man es bei den geradlinigen Bewegungen tut, ist hier allerdings etwas kompliziert, da sich dieses v laufend ändert. Wir führen deshalb eine neue Größe ein: die Winkelgeschwindigkeit ω .

Wir hatten $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ oder auch $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$

was das gleiche ist.



Früher verwendeten wir

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

hier nennen wir das Bahnstück nicht $\Delta \vec{r}$, sondern $\Delta \vec{s}$, schon allein aus dem Grund, um zu dokumentieren, daß es sich um ein gekrümmtes Bahnstück handelt.

Wir könnten also die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

nennen. Dies ist die Bahngeschwindigkeit, also die Länge, die der Massenpunkt

pro Zeit zurücklegt.

Für unsere Zwecke ist es nun aber viel besser, den Drehwinkel φ mit ins Spiel zu bringen, denn Δs ist durch diesen Winkel φ eindeutig bestimmt.

Wir wissen: Umfang = $2\pi r \hat{=} 360^\circ$ ($r = \text{Kreisradius}$)
 $U = \text{Umfang}$

Wie hängen nun Δs und der Drehwinkel zusammen?

Es ist $U \hat{=} 360^\circ$ und $\Delta s \hat{=} \varphi$

$$\Rightarrow \Delta s = \frac{U \cdot \varphi}{360^\circ} = \frac{2\pi r \varphi}{360^\circ} = b \varphi \text{ denn } \frac{2\pi r}{360^\circ} = \text{const.} = b$$

Also können wir definieren:

Geschwindigkeit = $\frac{\text{durchlaufenes Winkelstück}}{\text{Zeit}}$

exakt: $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

Hierbei wird φ im Bogenmaß angegeben:

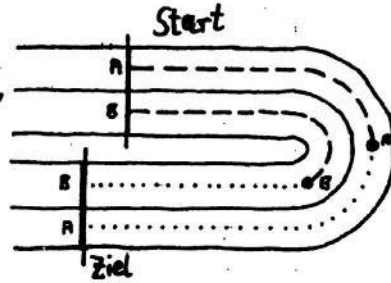
$0^\circ = 0$ $90^\circ = \pi/2$ und $360^\circ = 2\pi$
 $180^\circ = \pi$ $270^\circ = 3\pi/2$ d.h. bei $360^\circ \Rightarrow b = r$.

Nun haben wir für die Bewegung im Kreis eine neue Geschwindigkeit

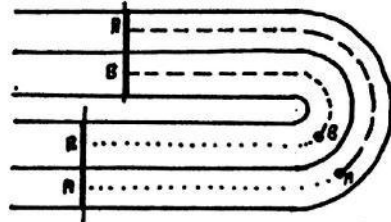
keit eingeführt, die die Winkeländerung pro Zeit angibt. Wir fragen uns, wie nun die Winkelgeschwindigkeit mit der Bahngeschwindigkeit zusammenhängt.

Aber zuvor wollen wir uns den Begriff der Winkelgeschwindigkeit etwas klarer machen.

Wir betrachten zwei Läufer in einem Stadion. Sie sollen beide gleich schnell sein. Beide laufen am Start los. Wer kommt als erster im Ziel an? Natürlich B, der Läufer, der die Innenbahn hatte. Sie haben zwar beide die gleiche Geschwindigkeit (nämlich Bahngeschwindigkeit) kommen aber verschieden spät an.



Falls wir nun annehmen, daß beide mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die Kurve laufen, kommen sie gleich schnell an, denn: Gleiche Winkelgeschwindigkeit bedeutet gleicher Winkel (hier 180°) in gleicher Zeit.



Ein anderes Beispiel: Eine Reihe von 10 nebeneinander marschierenden Soldaten soll bei einer Parade um eine 90° -Kurve gehen, dafür stehen ihnen 8 sec zur Verfügung. Sie sollen innerhalb der Kurve jeweils nebeneinander auf gleicher Linie sein. Dann ist es selbstverständlich, daß der außen marschierende Soldat viel schneller gehen (d.h. größere Schritte machen) muß als der innere. Aber: Alle 10 Soldaten legen in 8 sec den gleichen Winkel 90° zurück. Das heißt sie haben alle die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{16} \approx 0,2 \text{ sec}^{-1}$$

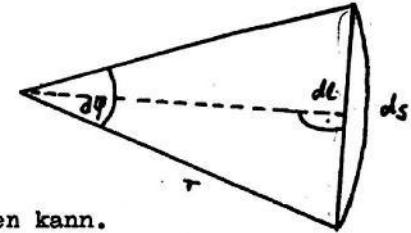
Kommen wir noch kurz zur Einheit der Winkelgeschwindigkeit. Winkelgeschwindigkeit ist Winkel (im Bogenmaß) pro Zeit. Da das Bogenmaß dimensionslos ist und die Zeit die Einheit [sec]

hat, hat die Winkelgeschwindigkeit $1/\text{sec} = \text{sec}^{-1}$.

Zurück zu unserer Frage über den Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit.

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Wir betrachten hier das Winkelstück $d\varphi$. Dies ist ein infinitesimal kleiner Winkel, also ein Winkel, der so klein ist, daß man ihn überhaupt nicht mehr zahlenmäßig ausdrücken kann. Deshalb können wir zwei Näherungen machen:



①. $d\ell \approx ds$

②. $\sin d\varphi \approx d\varphi$

In unserer Zeichnung haben wir den Winkel $d\varphi$ natürlich viel größer gezeichnet, sonst würden wir überhaupt nichts erkennen.

$$\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{dl/2}{r} = \frac{dl}{2r} \Rightarrow dl = 2r \sin \frac{d\varphi}{2}$$

somit gilt: $dl \stackrel{\text{①}}{\approx} ds = 2r \sin \frac{d\varphi}{2}$

also $ds = 2r \sin \frac{d\varphi}{2} \stackrel{\text{②}}{\approx} 2r \frac{d\varphi}{2} = r d\varphi$

wenn $ds = r d\varphi \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \frac{r d\varphi}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r\omega \Rightarrow \boxed{v = r \cdot \omega}$

Die Bahngeschwindigkeit hängt also direkt mit der Winkelgeschwindigkeit über der Radius zusammen. Dies ist auch ganz logisch, denn die Bahngeschwindigkeit wird immer größer, je weiter der bewegte Körper vom Mittelpunkt entfernt (d.h. je größer der Radius) ist.

Wenn sich der Massenpunkt einmal im Kreis herum bewegt, so braucht er dazu eine bestimmte Zeit. Bisher verwendeten wir dafür das Symbol t . Das war für uns Zeit an sich. Jetzt handelt es sich um eine ganz bestimmte Zeit, nämlich die Umlaufzeit (oder auch Periode) T . Hier verwenden wir das Symbol groß T .

Wie groß ist nun diese Periode T ?

$v = \frac{s}{t}$: Weg/Zeit, d.h. für eine ganze Umdrehung gilt also
Geschwindigkeit = Kreisumfang / Umlaufzeit :

$$v = \frac{U}{T} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \cdot \frac{r}{v} = 2\pi \frac{1}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad \begin{array}{l} \text{Umlaufzeit,} \\ \text{Periode} \end{array}$$

Den Kehrwert der Periode, nämlich $1/T$ nennen wir ν , die
Frequenz = Zahl der Umdrehungen pro Sekunde

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\omega = 2\pi \nu}$$

Oftmals nennt man ν auch Drehzahl. Nur bezieht sich die Dreh-
zahl auf die Umdrehungen pro Minute.

ω und ν unterscheiden sich nur um 2π ; das heißt, daß auch ω
eine Frequenz ist. Aus diesem Grund nennen wir ω auch Kreis-
frequenz. Genau wie ν hat auch ω die Einheit $1/\text{sec} = \text{sec}^{-1}$
Zu Ehren des großen Physikers Heinrich Hertz nennt man
 $1/\text{sec} = 1$ Hertz (1 Hz).

Eine Frequenz von 10 Hz bedeutet 10 Schwingungen pro Se-
kunde (aber zu den Schwingungen kommen wir später).

Eine Kreisfrequenz von 50 Hz heißt : 50 Umdrehungen/sec
= 3000 Umdr./Min.

Nun haben wir über die Geschwindigkeit bei der Kreisbe-
wegung genügend gesprochen und wenden uns jetzt der Beschleu-
nigung zu, die bei der Kreisbewegung auftritt.
Gibt es überhaupt Beschleunigungen bei der Kreisbewegung, wenn
die Winkelgeschwindigkeit konstant ist?

Wir haben am Anfang von den Kräften kurz gesprochen, die bei
Kreisbewegungen eine Rolle spielen. Und jetzt führen wir uns
das 2. Newtonsche Gesetz vor Augen, $\vec{F} = m\vec{a}$, bei welchem eine
Kraft auf eine Masse immer mit einer Beschleunigung verbunden
ist. Hier in der Kreisbewegung wirken Kräfte auf den bewegten
Körper, deshalb müssen auch Beschleunigungen auftreten, die
diese Kräfte verursachen. Jetzt wollen wir uns mit diesen
Beschleunigungen etwas näher beschäftigen.

Beschleunigungen treten dann auf, wenn Geschwindigkeiten
geändert werden. Hier soll aber die Geschwindigkeit konstant
sein. Also doch keine Beschleunigung?

Doch !! Zwar bleibt der Betrag der Geschwindigkeit konstant.

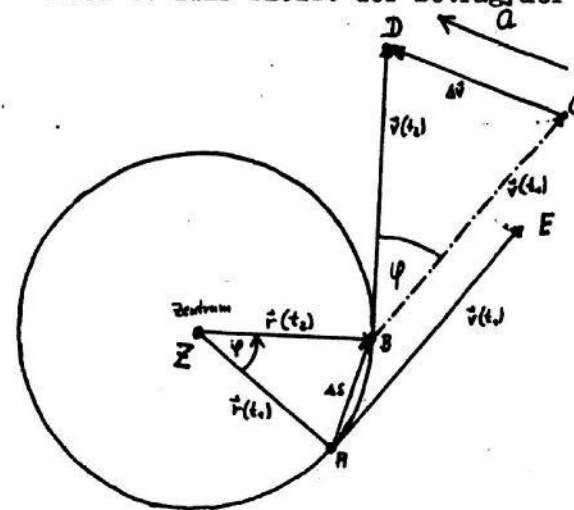
Aber \vec{v} besteht aus Betrag
und Richtung.

Die Beschleunigung ist also

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Wir betrachten die Be-
wegung, d.h. die zeit-
liche Veränderung des
Massenpunktes vom Ort A
zum Ort B. Der Radius-
vektor \vec{r} überstreicht
in der Zeit Δt den Winkel
 φ . Die Zeit Δt ist
die Zeit, die bei der

$$\Delta t = t_2 - t_1$$



Bewegung von A nach B verstreicht.

In die obenstehende Skizze sind zu den Radiusvektoren
 $\vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}(t_2)$ auch die jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren
 $\vec{v}(t_1)$ und $\vec{v}(t_2)$ eingetragen. Die resultierende Geschwindig-
keit $\Delta \vec{v}$ ergibt sich als vektorielle Differenz $\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$.
Um dieses geometrisch zu ermitteln, müssen wir beide Vektoren
 $\vec{v}(t_1)$ und $\vec{v}(t_2)$ im gleichen Punkt beginnen lassen. Also ver-
schieben wir einen der beiden (hier $\vec{v}(t_1)$) parallel in den
Anfangspunkt des andern.

$$\text{Wir suchen nun } \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Aus der Zeichnung ersehen wir, daß die beiden Dreiecke ZAB
und BCD ähnlich sind. Dazu ist zu bemerken, daß die eine Drei-
ecksseite $\overline{AB} = s$ von unserem Massenpunkt überhaupt nicht
durchlaufen wird. Da wir aber später, bei der Ausrechnung von
 \vec{a} den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ durchführen, heißt das ja auch,
daß wir φ, s ebenso gegen Null gehen lassen. Somit kann man
ruhig die gekrümmte Strecke \widehat{AB} mit der geraden $\overline{AB} = s$ gleich-
setzen.

$$\Rightarrow \frac{\frac{|\overline{AB}|}{|\vec{r}|}}{\Delta t} = \frac{\frac{|\Delta \vec{v}|}{|\vec{v}|}}{\Delta t} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} \cdot \frac{|\vec{r}|}{|\vec{v}|} \quad | : \Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{|\Delta s|}{r}}{\Delta t} = \frac{\frac{|\Delta v|}{v}}{\Delta t} \quad \text{oder} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{r \Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{v \Delta t}$$

oder aber auch $\frac{v}{r} = \frac{a}{v} \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$ $f^0 = \text{Einheitsvektor in radialer Richtung}$

Die Kreisbeschleunigung ist somit $\vec{a} = \frac{-v^2 \vec{f}^0}{r} = -\omega^2 \vec{r}$
 Das negative Vorzeichen, da \vec{a} nach innen zeigt $|\vec{f}^0| = 1$

$$\vec{a} = \frac{-v^2 \vec{f}^0}{r} = -\omega^2 \vec{r}$$

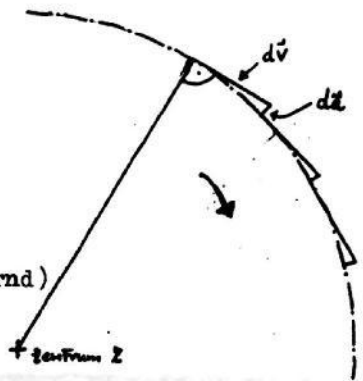
\Rightarrow Die Größe der Beschleunigung ist konstant. Wie ist die Richtung der Kreisbeschleunigung? Da natürlich auch hier gilt

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ und } d\vec{v} \text{ ein infinitesimal kleines Stück von}$$

$\Delta \vec{v}$ ist, muß \vec{a} die gleiche Richtung haben wie $\Delta \vec{v}$.
 Wenn man den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ macht, bedeutet das ja, daß $B \rightarrow A$ und $D \rightarrow E$ geht. $\vec{r}(t)$ steht senkrecht auf $\vec{v}(t)$, das infinitesimale Stück $\lim \Delta \vec{v}$ steht wiederum senkrecht auf $\vec{v}(t)$, sodaß $\vec{a} (\hat{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{v})$ die gleiche Richtung hat, wie $\vec{r}(t)$. Nur der Orientierungssinn von \vec{a} ist entgegengesetzt. Folglich ist die Richtung von \vec{a} vom Massenpunkt zum Ursprung hin gerichtet.

Der Massenpunkt wird zum Ursprung hin beschleunigt. In infinitesimal kleinen Stücken betrachtet, würde der Massenpunkt jeweils ein kurzes Stück gerade weiterfliegen, um dann von der Beschleunigung wieder zum Ursprung hin abgelenkt zu werden.

Nach dem 2. Newton'schen Axiom, dem sogenannten Newtonschen Gesetz (so wollen wir es auch weiterhin nennen - denn es begegnet uns andauernd)



$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ muß es zu unserer Kreisbeschleunigung eine Kraft \vec{F} geben, die von der Masse zum Zentrum hin gerichtet ist. Diese Kraft gibt es auch. Es ist gerade die, die vorhin im einfachen Beispiel der Zenzi Arm zum Schmerzen brachte.

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{v^2 \vec{f}^0}{r} = -m \omega^2 \vec{r} = \vec{F}_{zp}$$

Diese Kraft nennt man Zentripetalkraft. Es ist die Kraft, die vom Zentrum aus an dem Körper zieht, daß er nicht aus der

Kreisbahn heraus geradlinig weiterfliegt. Läßt man zum Beispiel ein Gewicht an einem Faden kreisen, so übt der Faden auf das Massestück eine Zentripetalkraft aus. Dies kann man sehen, wenn man einen elastischen Faden verwendet. Vergrößert man die Winkelgeschwindigkeit ω d.h. läßt man das Gewicht schneller kreisen, so wird F_{zp} größer und deshalb dehnt sich der elastische Faden (z.B. Gummischnur) weiter aus. Also noch einmal : Die Zentripetalkraft hält den Körper auf der Kreisbahn.

Ohne Zentripetalkraft keine Kreisbewegung
 Ohne Kreisbewegung keine Zentripetalkraft

Wenden wir nun das 3. Newtonsche Axiom an, nämlich actio = reactio, so heißt das, daß es eine gleichgroße entgegengesetzte Kraft zur Zentripetalkraft geben muß.

$$\vec{F}_{zf} = -\vec{F}_{zp} \text{ Diese Kraft nennen wir Zentrifugalkraft.}$$

Das ist die Kraft, die vom Zentrum nach außen wirkt, und die dafür sorgt, daß der Massenpunkt nicht nach innen, der Zentripetalkraft folgend auf einer Spiralbahn in das Zentrum "stürzt".

$$\vec{F}_{zf} = + \frac{mv^2 \vec{f}^0}{r} = + m \omega^2 \vec{r}$$

Eine Kreisbewegung also, wird nur durch das gleichzeitige Dasein der Zentripetal- und der gleichgroßen, entgegengesetzten Zentrifugalkraft ermöglicht.

Beide Kräfte beschleunigen den Körper mit der Kreisbeschleunigung $a = \pm \frac{v^2}{r} = \pm \omega^2 r$ (+ für Zentrifugal, - für Zentripetalbeschleunigung).

4. Einfache Bewegungen

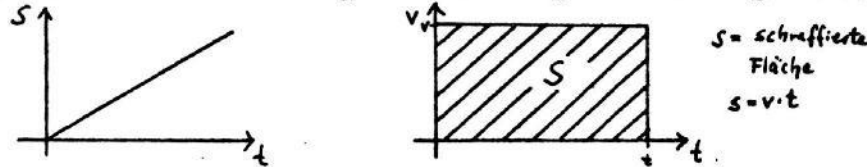
a) gleichförmige geradlinige Bewegung

Bei einer gleichförmigen Bewegung soll $\vec{v} = \text{const.}$ sein.

Also gilt

$$v = \frac{s}{t} \left[\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right] \quad \Rightarrow \quad s = v \cdot t$$

Das Weg-Zeit-Diagramm zeigt eine Gerade und das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eine Waagrechte.

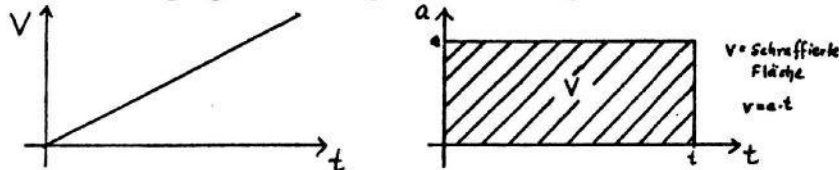


b) gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung soll die Beschleunigung $\vec{a} = \text{const.}$ sein, d.h. die Geschwindigkeit ändert sich linear.

$$a = \frac{v}{t} \quad \Rightarrow \quad v = a \cdot t$$

Hier zeigt das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eine Gerade (Die Geschwindigkeit ändert sich linear mit der Zeit) und das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm eine Waagrechte ($a = \text{const.}$!)

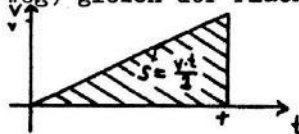


Wir unterscheiden 2 Fälle :

Zum einen soll die Bewegung aus der Ruhe heraus erfolgen, d.h. es gibt keine Anfangsgeschwindigkeit v_0 ; zum andern setzen wir eine konstante Anfangsgeschwindigkeit voraus.

Fall ① $v_0 = 0$

Die Geschwindigkeit nimmt aus der Ruhelage heraus gleichmäßig zu. Wir zeichnen das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. Da gilt; $s = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}$, muß s (der zurückgelegte Weg) gleich der Fläche unter der Geraden sein. Dies ist eine Dreiecksfläche mit



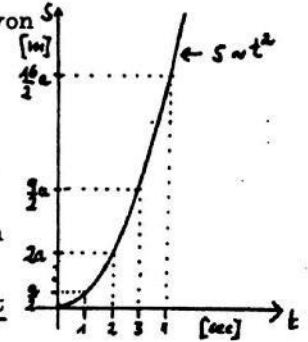
$$s = \frac{vt}{2} \quad \text{und da} \quad v = a \cdot t \quad \Rightarrow \quad s = \frac{a}{2} t^2$$

Das heißt, daß der Weg quadratisch von der Zeit abhängt. Die Funktion $s(t)$ ist also eine Parabel.

Wir können noch eine sogenannte Zeitfreie Gleichung aufstellen, mit der wir die Geschwindigkeit aus Weg und Beschleunigung berechnen können :

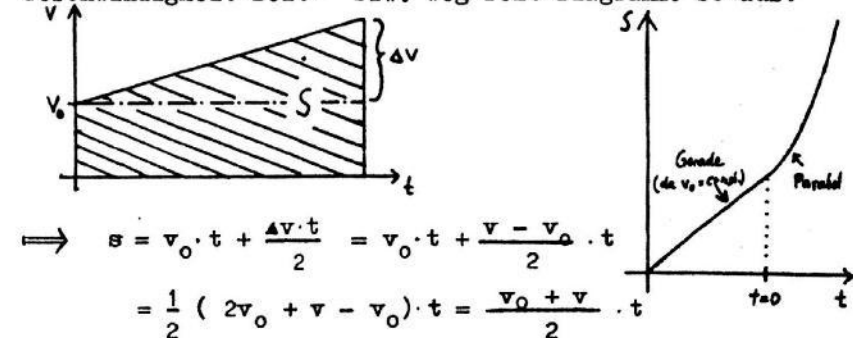
$$v = a \cdot t \quad t = \frac{v}{a} \quad \text{mit} \quad s = \frac{v \cdot t}{2}$$

$$\text{folgt} \quad s = \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{a} = \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2as}$$



Fall ② $v_0 \neq 0$, $v_0 = \text{const.}$ (mit Anfangsgeschwindigkeit)

Wir haben einen Körper, der eine konstante Geschwindigkeit hat und der von $t = 0$ an bis $t = T$ mit konstanter Geschwindigkeit Δ beschleunigt wird. Somit sehen die Geschwindigkeit-Zeit- bzw. Weg-Zeit-Diagramme so aus:



$$\begin{aligned} \Rightarrow s &= v_0 \cdot t + \frac{\Delta v \cdot t}{2} = v_0 \cdot t + \frac{v - v_0}{2} \cdot t \\ &= \frac{1}{2} (2v_0 + v - v_0) \cdot t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

Da $v = a \cdot t$ gilt $s = v_0 \cdot t + \frac{\Delta v}{2} t = v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$

Somit folgt für den zurückgelegten Weg s (Fläche des schraffierten Vierecks) gleichförmig beschleunigter Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit

$$s = v_0 t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Berechnung der zeitfreien Gleichung :

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + a \cdot t$$

also $v - v_0 = a \cdot t$ oder $t = \frac{v - v_0}{a}$

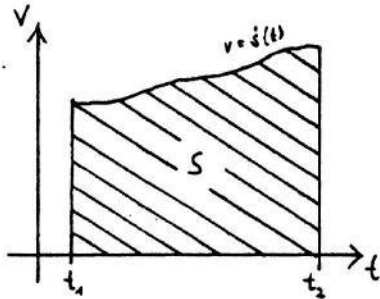
in $s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$ eingesetzt : $s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right)$

$$s = \frac{v_0 v - v_0^2 + v^2 - v_0 v}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\Rightarrow 2as = v^2 - v_0^2 \quad \text{bzw.} \quad \boxed{v = \sqrt{2as + v_0^2}}$$

c) allgemein: ungleichförmig beschleunigte Bew.

Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm :

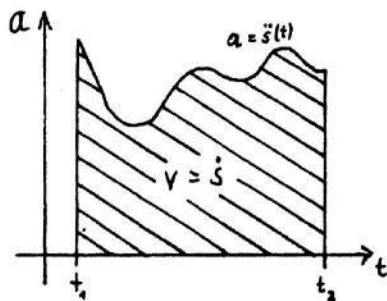


$$v = \dot{s}(t) \Rightarrow \boxed{v = \frac{ds}{dt}} \Rightarrow ds = v dt$$

$$\int ds = \int v dt$$

oder $s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$

Beschleunigungs-Zeit-Diagramm :



$$a = \ddot{s}(t) \Rightarrow \boxed{a = \frac{d^2s}{dt^2}} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt$$

$$\int dv = \int a dt$$

oder $v = \int_{t_1}^{t_2} a dt$

d) Sonderfälle und zusammengesetzte Bew.

α) freier Fall

Der freie Fall ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit, deren Richtung zum Erdmittelpunkt hinweist.

Im Kapitel über gleichmäßig beschleunigte Bewegungen hatten wir die Bewegungsgleichung $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$. Der freie Fall ist genauso eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Nur nennen wir jetzt einige Größen anders.

Die zurückgelegte Strecke s entspricht hier der Fallhöhe h , die Beschleunigung a wird hier durch die Erd- oder Schwerebeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ gegeben. Diese ist gleich $9,81 \text{ m/sec}^2 (= \text{const.})$ nur in kleinen Höhen, nur in der Nähe der Erdoberfläche). Auf Seite -1- haben wir g berechnet und dabei die Höhe h gegenüber dem Erdradius vernachlässigt. g hängt von h ab. Das ist auch ganz klar, denn nach dem Kraftgesetz $G = m \cdot g$ müsste die Schwerkraft (falls $g = \text{const.}$ wäre) auch konstant sein, d.h. überall gleich stark. Dann wäre allerdings der Mond längst auf die Erde gefallen !

Nennen wir jetzt also die Größen der Gleichungen von gleichmäßig beschleunigten Bewegungen um und erhalten dann die Beziehungen für den freien Fall :

$h = \frac{v \cdot t}{2}$	$h = \frac{g t^2}{2}$	$v = g \cdot t$	und $v = \sqrt{2gh}$
---------------------------	-----------------------	-----------------	----------------------

hier sind also:

v = Fallgeschwindigkeit nach Ablauf der Zeit t

g = Fallbeschleunigung = $9,81 \text{ m/sec}^2$

h = Fallhöhe (= in der Zeit t durchfallener Weg)

t = Fallzeit.

β) senkrechter Wurf

Der senkrechte Wurf nach oben (nach unten) ist wiederum eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 (hervorgerufen durch die Wurfbewegung) und mit der Beschleunigung $a = -g$ (bz. beim Wurf nach unten $a = g$)

Mit v_0 = Abwurfgeschwindigkeit (Anfangsgeschwindigkeit)

v = Endgeschwindigkeit zur Zeit t

g = Erdbeschleunigung = $9,81 \text{ m/sec}^2$

h = Höhe, die in der Zeit t durchflogen wird,

und bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes werden aus den Gleichungen der gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit

gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit	senkrechter Wurf nach oben	senkrechter Wurf nach unten
$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$	$h = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$	$h = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$
$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$	$h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$	$h = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$
$v = v_0 + a \cdot t$	$v = v_0 - g \cdot t$	$v = v_0 + g \cdot t$
$v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$	$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$	$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

Beim senkrechten Wurf nach oben gibt es eine maximale Steighöhe und die dazu benötigte maximale Steigzeit. Das sind die Höhe und Zeit, bei denen $v = 0$ geworden ist. Wirft man einen Stein senkrecht nach oben, wird er immer langsamer. Ist seine Geschwindigkeit = Null geworden, beginnt er zu fallen und dann wird er (nach den Bedingungen des freien Falles) immer schneller.

Wir nehmen

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad , \quad \text{da wir zur Berechnung von } h_{\max} \text{ eine Gleichung brauchen, in der } t \text{ nicht auftritt, denn } h_{\max} \text{ ist nicht zeitabhängig}$$

$$0 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

$$\Rightarrow 2gh = v_0^2$$

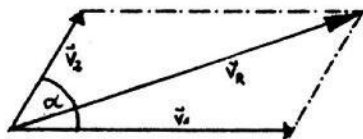
somit gilt

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\text{und mit } v = v_0 - gt = 0 \Rightarrow v_0 = gt \text{ also } t_{\max} = \frac{v_0}{g}$$

1) waagrechtlicher Wurf

Zunächst noch etwas über zusammengesetzte Bewegungen. Ein Körper kann gleichzeitig mehrere Translationsbewegungen (geradlinige oder lineare Bewegungen) ausführen. Geschwindigkeit, Beschleunigung und Weg können vektoriell addiert werden. Beispiel: Geschwindigkeit



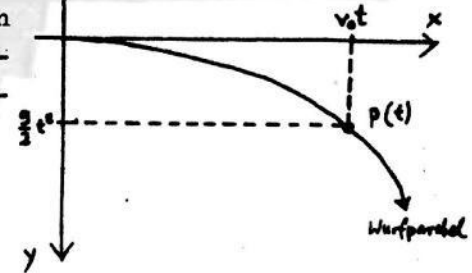
$$\vec{v}_R = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{analog} \quad \begin{matrix} \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_R \\ \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_R \end{matrix}$$

Betrag von v_R ist nach dem cos-Satz

$$v_R = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}$$

Der waagrechte Wurf ist zusammengesetzt aus zwei senkrecht zueinander stehenden Translationen

- waagrecht: gleichförmige Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit
- senkrecht: freier Fall



Am besten wird es sein, wir ermitteln die Funktion $y(x)$, also die Funktion, wie die waagrechte von der senkrechten Bewegung abhängt. Wie aus dem Bild zu ersehen, muß dies eine Parabel sein. Dies ist einsichtig, denn die waagrechte Bewegung ist gleichförmig (sie hat nur die Anfangsgeschwindigkeit v_0 , danach wirkt keine beschleunigende Kraft in waagrechter Richtung mehr); die senkrechte Bewegung ist ein freier Fall, also eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Wir nehmen irgendeinen beliebigen Punkt und suchen von ihm die x- und die y-Koordinate:

$$\begin{aligned} \text{waagrecht: } s &= v \cdot t \quad (\text{da gleichförmig}) \quad v = \text{const.} = v_0 \\ s &\text{ ist der zurückgelegte Weg, hier in unserem Koordinatensystem also } x \\ &\Rightarrow x = v_0 \cdot t \end{aligned}$$

$$\text{senkrecht: } h = \frac{g}{2} t^2 \quad (\text{gleichmäßig beschleunigt von } g, \text{ ohne senkrechte Anfangsgeschwindigkeit})$$

Bei uns ist $h = y$, also

$$\Rightarrow y = \frac{g}{2} t^2$$

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= \frac{g}{2} t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{daraus erhalten wir die Bahngleichung des waagrechtlichen Wurfes, die Funktion } y = f(x)$$

Aus beiden Gleichungen eliminieren wir t , denn die Funktion $y = f(x)$ hängt nur von x , nicht aber von t ab:

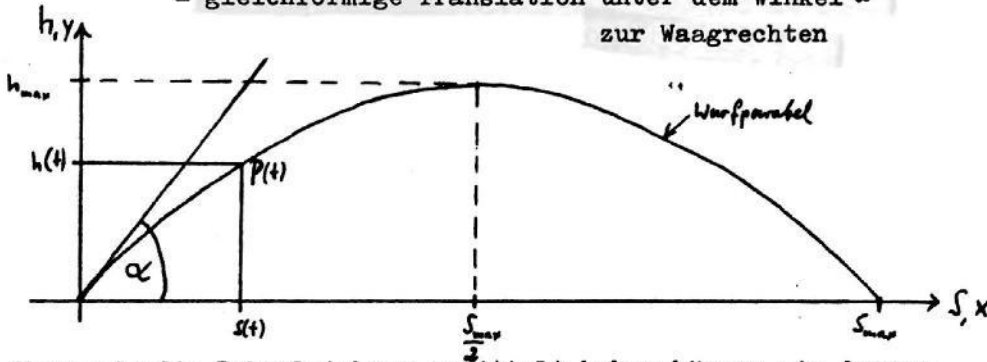
$$t = \frac{x}{v_0} \quad \text{und dies in } y = \frac{g}{2} t^2 \text{ einsetzen}$$

$$\Rightarrow y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad \text{d.h. } y \sim x^2 \quad (\text{Wurfparabel})$$

δ) schräger wurf

Der schräge Wurf ist zusammengesetzt aus

- freiem Fall in senkrechter Richtung
- gleichförmige Translation unter dem Winkel α zur Waagrechten

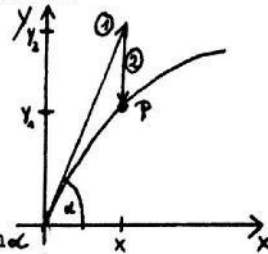


Wenn wir die Bahngleichung ermittelt haben, können wir daraus viele Informationen bezüglich der Bewegung erhalten.

Wir suchen wiederum die Koordinaten eines beliebigen Punktes P.

- Vektor ① ist (gleichf. Bew.) $\sim v_0 t$
- Vektor ② ist (freier Fall) $\sim \frac{g}{2} t^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{x-Komponente} &= v_0 t \cos \alpha \\ \text{y-Komponente (Ursprung bis } y_2) &= v_0 t \sin \alpha \\ \text{y-Komponente (Ursprung bis } y_1) &= v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$



also sind die Koordinaten für den Punkt P

$$P(v_0 t \cos \alpha \mid v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2)$$

$$\text{aus x-Komp.} \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$\text{also } y = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha \cdot x}{v_0 \cdot \cos \alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\text{oder } y = x \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Gleichung der
Wurfparabel des
schrägen Wurfes

Nun wollen wir daraus noch $s(t)$, $h(t)$, Steigzeit t_s , größte Steighöhe h_{\max} und die größte Wurfweite s_{\max} ermitteln:

s(t) $S(t)$ ist nichts anderes als unsere x-Komponente, denn x-Achse ist ja gleich s-Achse

$$s(t) = v_0 t \cdot \cos \alpha$$

h(t) Für $h(t)$ gilt das analoge. Da die h-Achse gleich der y-Achse ist, nehmen wir die y-Komponente:

$$h(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$$

Steigzeit t_s Im oberen Gipfelpunkt ist die y-Komponente der Geschwindigkeit = 0

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \sin \alpha - gt$$

$$\text{Somit } v_0 \cdot \sin \alpha - gt_s = 0 \Rightarrow$$

$$t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Wurfzeit T Die Wurfzeit T ist die Zeit, die für den gesamten Wurf gebraucht wird.

$$\text{Da Steigzeit} = \text{Fallzeit} \Rightarrow$$

$$T = \frac{2 \cdot v_0 \sin \alpha}{g}$$

größte Wurfweite S_{\max}

Die Hälfte der größten Wurfweite ist gerade der Punkt auf der s-Achse, über dem der Scheitelpunkt liegt. Und diesen Punkt können wir leicht berechnen. Wir suchen den Extremwert unserer Funktion $y = f(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{für Extremwert})$$

$$\Rightarrow \text{da } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$x = \frac{v_0^2 \cos \alpha}{g} \sin \alpha \quad \text{mit } \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\text{und } S_{\max} = 2 \cdot x$$

größte Wurfhöhe h_{\max}

Wir setzen $\frac{S_{\max}}{2}$ in die Funktion $y = f(x)$ ein, denn

$$h_{\max} = y \left(x = \frac{S_{\max}}{2} \right)$$

$$h_{\max} = \tan \alpha \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} - \frac{g v_0^4 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{2v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot g^4}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha \cdot v_0^2}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

also $h_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$..

Auch hier ist wieder der Luftwiderstand unberücksichtigt gelassen.

Nun wollen wir noch kurz auf eine Frage eingehen, die sich so mancher Sportler (Kugelstoßer, Speerwerfer etc.) stellen wird. Es geht darum, bei welchem Winkel α die Wurfweite S_{\max} am größten wird.

Um dies zu ermitteln müssen wir berechnen, für welchen α s_{\max} maximal wird, also müssen wir $S_{\max}(\alpha)$ nach α ableiten. Dies dann Null setzen und nach α auflösen:

$$\frac{dS_{\max}}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{d \sin 2\alpha}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{d.h.} \quad \cos 2\alpha = 0$$

Dies liegt dann vor, wenn $\alpha = 45^\circ$.

Also wird die Wurfweite maximal, wenn der Wurfwinkel 45° beträgt.

Das ganze kann man auch viel einfacher sehen. Betrachten wir uns die Größe

$$S_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Dies wird dann maximal, wenn der Sinus maximal wird. Der kann höchstens 1 werden. Wenn $\sin 2\alpha = 1$ gilt natürlich $\alpha = 45^\circ$!

Noch etwas zur Berechnung der Wurfweite S_{\max} . Wir leiteten unsere Funktion $y = f(x)$ nach x ab und ermittelten so den Maximalwert.

Eine etwas andere Art ist die Berechnung der Nullstellen von $y = f(x)$. Die eine Nullstelle, die man bei der Ausrechnung erhält ist der Nullpunkt. Die andere Nullstelle aber ist gerade unser S_{\max} !

5. Arbeit, Energie, Leistung

Im folgenden müssen wir einige wichtige Begriffe definieren und diskutieren. Ohne sie ist eine Beschreibung physikalischer Vorgänge kaum oder überhaupt nicht möglich. Diese Begriffe sind nicht nur Grundlagen aller mechanischen Betrachtungen, sondern fundamentale Größen aller Bereiche der Physik, zusätzlich tauchen sie noch in Biologie, Chemie, E - Technik und vielen weiteren naturwissenschaftlichen Gebieten auf :

a) Die Arbeit

Arbeit - Was ist das ? Jeder glaubt zu wissen, was Arbeit ist : Dieses Skript zu lesen beispielsweise ist Arbeit, (es zu schreiben nicht minder !!), den ganzen Tag hinterm Ladentisch zu stehen oder 8 Stunden unter Tage Kohle abzubauen ist Arbeit. Dies ist wohl für den allgemeinen Sprachgebrauch richtig. Ein Beispiel : Ein pflichteifriger Student (auch das gibt es !) eilt des Montags Morgens um 9.00 Uhr zur Physikvorlesung. Er betritt den Hörsaal, sucht sich einen freien Platz, setzt sich, schreibt und - was noch viel wichtiger ist - denkt mit; schließlich, wenn die Vorlesung zu Ende ist erhebt er sich, verläßt den Hörsaal und geht seiner Wege. Ist das Arbeit oder ist das keine. Sehr viele werden stöhnend sagen : Das ist der Inbegriff der Arbeit ! Das müssen dann allerdings die Studenten sein, die entweder diese Arbeit gescheut haben (und deshalb auch nicht wissen, was Arbeit ist) oder solche, die sich in den Vorlesungen schlafend von der vermeintlichen Arbeit erholt haben.

Das einzige, was bei diesem Beispiel physikalisch gesehen wirklich Arbeit ist, ist ein Vorgang, der dann erst eintritt (hoffentlich!!), wenn die Vorlesung schon vorbei ist - nämlich das Sicherheben.

Unter einer physikalischen Arbeit versteht man eine Größe, die aus einer verrichteten Kraft und dem dazu zurückgelegten Weg zusammengesetzt ist:

$$\text{Arbeit (W)} = \text{Kraft} \times \text{zurückgelegter Weg}$$

Damit ist auch schon die Einheit klar :

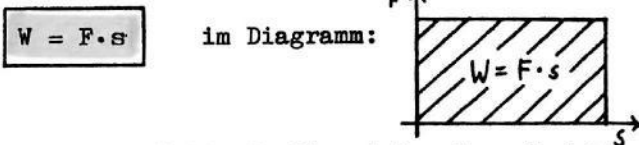
$$[W] = [F] \cdot [s] = \text{Newton} \cdot \text{Meter} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J (Joule)}$$

$$= \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{sec}^2}$$

(Einige andere Einheiten :	1 kWh (Kilowattstunde)	= $3,6 \cdot 10^6$ J
		1 kpm (Kilopondmeter)	= 9,81 J
		1 erg	= 10^{-7} J

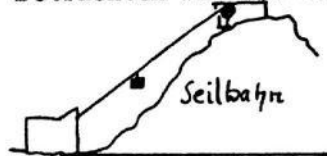
Wir sagten Arbeit = Kraft x Weg. Dies stimmt nur bedingt. Als Weg wird hier die Komponente des Weges verstanden, die parallel zur Kraft liegt.

Falls F eine konstante Kraft in Richtung des Weges s ist, so gilt :



Hier war vorausgesetzt, daß die Kraft und der Weg gleiche Richtung haben. Nach der Definition der Arbeit ist diese gleich Null, wenn Weg und Kraft (was ja beides Vektoren sind) senkrecht zueinander stehen.

Betrachten wir uns folgendes Bild



Hier sind Kraft und Weg nicht parallel, sondern sie bilden den Winkel α . Was kommt nun zum Tragen? Nun - die Komponente der Kraft, die parallel zum Weg liegt. Und wie groß ist die? Nach der Zeichnung sieht man, daß diese Komponente = $F \cdot \cos \alpha$.

Also $W = s \cdot F \cdot \cos \alpha = F \cdot s \cdot \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}$ (Skalarprodukt)

Dies ist ganz klar, denn wenn \vec{F} und \vec{s} parallel liegen, wird $\alpha = 0^\circ \implies \cos \alpha = 1$ und $\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$ also W maximal.

Liegen sie aber senkrecht zueinander, ist $\alpha = 90^\circ$ und $\cos \alpha = 0$, also auch $W = 0$.

Was bedeutet das alles jetzt praktisch ?

Wir verrichten nur dann Arbeit (gegen die Schwerkraft), wenn wir irgendetwas hochheben (Arbeit ist positiv) oder senken

(Arbeit ist negativ, d.h. "Arbeit wird frei")

Nehmen wir an, wir heben einen Stein von 1 kg Masse hoch. Und zwar wollen wir ihn genau 50 cm heben. Welche Arbeit wird verrichtet ?

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha = F \cdot s = G \cdot s = mg \cdot s = 1 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \left[\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot \text{m} \right]$$

(da $\alpha = 0$)

$$= 4,9 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{sec}^2} = 4,9 \text{ J}$$

Senken wir ihn, bzw. lassen wir ihn um 50 cm fallen, brauchen wir keine Arbeit zu verrichten, die verrichtet der Stein selbst, oder diese Arbeit wird frei ((man kann die freigewordene Arbeit in diesem Falle nutzbar machen - man denke daran, was ein Stein von 1kg Masse anrichten kann, selbst wenn er nur eine Höhe von 50 cm durchfällt).

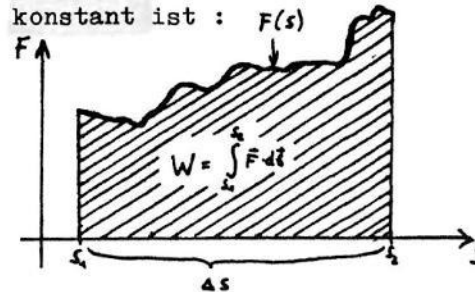
Dann gilt :

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha = F \cdot s \cdot \cos(180^\circ) = F \cdot s \cdot (-1) = -Fs = -4,9 \text{ J}$$

Wir werden gleich diese sogenannte "Hubarbeit" noch etwas genauer untersuchen.

Bisher sind wir davon ausgegangen, daß die Arbeit immer gegen die Schwerkraft verrichtet wird. Aber es gibt ja sehr viele Kräfte, gegen die Arbeit verrichtet werden kann.

Und diese Kräfte müssen nicht immer konstant sein. Schauen wir uns ein Kraft-Weg-Diagramm an, bei dem die Kraft nicht konstant ist :



Die Arbeit soll geleistet werden auf einem Weg $\Delta s = s_2 - s_1$. Wie oben ist auch hier die Arbeit gleich der schraffierten Fläche unter der Kraftkurve. Und wie sieht die Fläche unter einer x-beliebigen Funktion aus ? Genau, es ist das Integral über diese Funktion:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Man bedenke, daß es sich bei \vec{F} und auch bei $d\vec{s}$ um Vektoren handelt. $d\vec{s}$ ist ein infinitesimal kleiner

Vektor. Man kann auch schreiben $\vec{F} d\vec{s} = F ds \cdot \cos(\vec{F}; d\vec{s})$. Allerdings ist die Angabe $\int \vec{F} d\vec{s}$ allgemein und somit überall brauch-

bar. Dies ist auch die allgemeine Definition der

Arbeit $W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

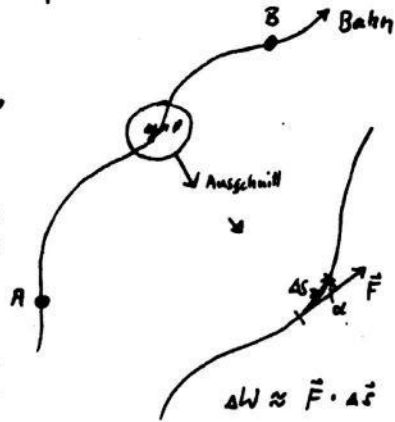
Wir prüfen kurz :

für $\vec{F} = \text{const.}$ und $\vec{F} \parallel \vec{s} \hat{=} \vec{F} \parallel d\vec{s} \implies \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos 0^\circ = F \cdot ds$

also $W = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds = F \int_{s_1}^{s_2} ds = F (s_2 - s_1) = F \cdot \Delta s = \text{Kraft} \times \text{Weg}$

oder auf eine andere Art :

Wir betrachten einen Massenpunkt, der von A nach B verschoben werden soll. Welche Arbeit muß man aufwenden? Zeichnen wir uns ein ganz kleines Stück $\Delta \vec{s}$ der Kurve heraus (das wir als gerade ansehen können, weil es so klein ist). Um den Massenpunkt um dieses $\Delta \vec{s}$ zu verschieben brauche man die Kraft \vec{F} .



Also braucht man insgesamt (wenn man sich die ganze Kurve in viele kleine Stückchen $\Delta \vec{s}$ aufgeteilt denkt) N solcher Stückchen. Auch die Arbeit ist dann die Summe dieser Teilarbeiten:

$$W = \sum_{i=1}^N \Delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}_i$$

Um die ganze Sache genauer zu machen, müssen wir die Teilstückchen immer kleiner, bzw. die Zahl N immer größer werden lassen. Haben wir schließlich unendlich viele Teilstückchen, die alle infinitesimal klein sind (weshalb wir sie jetzt $d\vec{s}$ nennen wollen), können wir das Summen- durch ein Integralzeichen ersetzen (Denn ein Integral ist nichts anderes als eine Summe von unendlich vielen infinitesimal kleinen Größen - man schaue noch einmal nach, wie in der Schule das Integral als Summe sehr vieler, sehr schmaler Flächenstücke unter einer Kurve definiert wurde).

Also $\sum \rightarrow \int \implies W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Wie wir vorhin schon einmal überlegt haben ist es sehr wichtig, welches Vorzeichen die Arbeit hat. Ist sie positiv, so muß sie verrichtet werden. Ist sie negativ, wird Arbeit aus dem System frei.

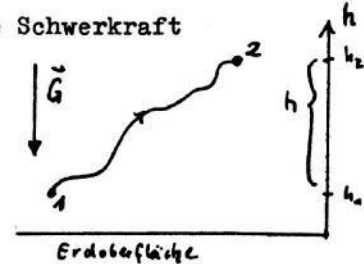
Nun wollen wir uns noch einige Beispiele von Arbeit näher betrachten :

α) Hubarbeit

= Arbeit zum Heben von Massen gegen die Schwerkraft

Schwerkraft $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$

$$W_H = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F} \cdot d\vec{h} = \int_{h_1}^{h_2} \vec{G} \cdot d\vec{h} = \vec{g}m \int_{h_1}^{h_2} d\vec{h} = gm(h_2 - h_1) \implies W_H = mgh$$



W_H = Hubarbeit, h = Höhe, um die die Masse m gehoben wurde. Die h-Achse verläuft von unten nach oben. D.h. hebt man den Körper, so ist h, damit auch W_H positiv. Läßt man ihn fallen, so wird h negativ und Arbeit wird frei.

Wie wir bereits gesehen haben, leistet man physikalische Arbeit nur dann, wenn man einen Körper in einer Richtung bewegt, die nicht senkrecht zur Schwerkraft verläuft.

β) Reibungsarbeit

Wird ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit gegen eine Reibungskraft bewegt, wird die Arbeit $W = \int F \cdot ds$

verrichtet. Da $\vec{F}_R \parallel \vec{s} \implies W_R = \int F_R \cdot ds$



Wie wir später noch sehen werden, ist $F_R \sim v$ (Geschwindigkeit). Und da $v = \text{const.}$ muß auch $F_R = \text{const.}$ sein.

Also

$$W_R = F_R s$$

Die Arbeit, die durch Reibung verloren geht, wird in Wärme verwandelt. Sie

ist nicht vollständig nutzbar zu machen. Bei jedem mechanischen Vorgang geht Arbeit als Wärme "verloren".

g) beschleunigungsarbeit

Ein Körper wird durch eine konstante Kraft \vec{F} längs des Weges \vec{s} gleichmäßig beschleunigt. Er erhält dadurch die Beschleunigung \vec{a} . \vec{F} , \vec{s} und \vec{a} liegen auf einer Geraden. Dabei wird die Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ verrichtet. Da $\vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s$, denn \vec{F} ist parallel zu \vec{s} und $\int F ds = F \int ds = F \cdot s$ denn $\vec{F} = \text{const.}$ gilt somit

$W = F \cdot s = m \cdot a \cdot s$. Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung (Seite 13) hatten wir $s = \frac{a}{2} t^2$ und $v = a \cdot t$
also $s = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} \implies v = \sqrt{2as}$ oder $a = \frac{v^2}{2s}$

Bei uns ($W = mas$) setzen wir dieses a ein, dafür erhalten wir

$$W = mas = m \cdot \frac{v^2}{2s} \cdot s = m \frac{v^2}{2}$$

$$\text{also } W_B = \frac{1}{2} m v^2$$

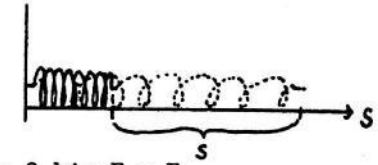
Wird der Körper nicht von $v = 0$ auf v beschleunigt, sondern von $v_0 \neq 0$ auf v (also eine Beschleunigung mit Anfangsgeschwindigkeit) so gilt (da $a = (v^2 - v_0^2)/2s$ nach Seite 13)

$$W_B = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

Man sieht, daß die Beschleunigungsarbeit W_B nur von der Masse des beschleunigten Körpers, der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit abhängt, nicht aber von der Kraft, die die Beschleunigung verursacht. Diese braucht also auch nicht konstant zu sein, wie wir oben vorausgesetzt haben. Also gilt die Größe der Beschleunigungsarbeit auch für nicht konstante Beschleunigungskräfte. Oben setzten wir weiterhin voraus, daß \vec{F} parallel zum Weg ist. Dies ist aber für jedes Wegstück gegeben, denn es gilt ja $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}$ also auch $\vec{F} \parallel \vec{s}$. somit gilt also obige Beziehung ganz allgemein.

δ) verformungsarbeit

Wird eine Feder um den Federweg s verlängert, ist die erforderliche Kraft F nicht konstant, sondern sie wächst proportional zum Weg s von $F = 0$ bis $F = F_{\text{max}}$.



Es gilt der Zusammenhang

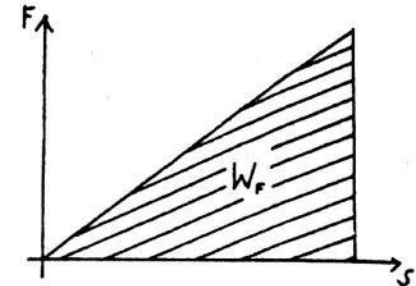
$$F \sim s \text{ oder } F = D \cdot s \text{ (Hooke'sches Gesetz)}$$

D ist die sogenannte Richtkraft (speziell bei Federn nennt man D Federkonstante)

Die Einheit von D ist Newton pro Meter $[D] = \left[\frac{F}{s} \right] = \frac{N}{m}$

vektoriell exakt: $\vec{F} = D \cdot \vec{s}$

Je härter die Feder, desto größer muß F werden um sie um ein Stück (zum Beispiel 1 cm) zu dehnen. Und desto größer ist D . Also ist die Federkonstante D ein Maß für die "Härte" der Feder.



Nun wollen wir die Arbeit berechnen, die man zum Dehnen einer Feder benötigt.

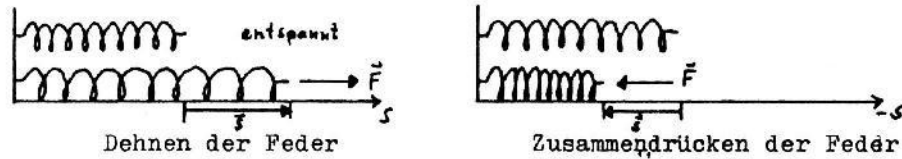
$$W_F = \int_0^s \vec{F} d\vec{s} = \int_0^s D s d\vec{s} = D \int_0^s s \cdot ds = D \cdot \frac{s^2}{2} = \frac{1}{2} D s^2$$

Etwas einfacher sehen wir die Größe der Verformungsarbeit W_F direkt aus dem Kraft-Weg-Diagramm: Die Fläche unter der Geraden ist gleich W_F . Also

$$W_F = \frac{F \cdot s}{2} = \frac{D \cdot s \cdot s}{2} = \frac{1}{2} D \cdot s^2$$

Unsere Verformungsarbeit W_F ist positiv, also müssen wir sie leisten. Das ist klar. Um eine Feder zu dehnen, müssen wir an ihr eine Arbeit verrichten. Drücken wir eine Feder zusammen, erhalten wir, wenn wir das Koordinatensystem von oben verwenden eine negative Arbeit, also Arbeit, die frei wird. Das ist natürlich Unsinn. Bei einer Feder muß man sich zunächst überlegen, ob man bei einer Verformung Arbeit hineinsteckt, oder welche erhält. Beim Dehnen und beim Zusammendrücken einer Feder muß man Arbeit hineinstecken. Deshalb muß man das Koordinatensystem von unten verwenden.

natensystem so wählen, daß der Weg s und die Kraft F gleiche Richtung haben.



Nur so wird die Verformungsarbeit positiv, nur so bekommen wir eine Übereinstimmung mit der Realität, nämlich die, daß man zum Dehnen und zum Zusammendrücken Arbeit aufwenden muß.

Natürlich kann man es auch so einrichten, daß aus einer gespannten Feder Arbeit frei wird, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden. Verrichtet man zunächst an einer Feder Arbeit, zum Beispiel durch Zusammendrücken, und läßt sie dann los, so wird die hineingesteckte Arbeit wieder frei. Schreiben wir uns die Gleichungen auf und vergleichen mit den Skizzen:

Wir drücken eine Feder zusammen

$$W_f = \frac{1}{2} D s^2. \quad W = D \int_0^s s \cdot ds$$

Nun lassen wir sie los (natürlich dürfen wir während des Versuchs das Koordinatensystem nicht ändern!) also nun

$$W_F = \int_0^{-s} F \cdot ds = - \int_0^s F \cdot ds = - \frac{1}{2} D \cdot s^2, \text{ also gerade die Arbeit}$$

die hineingesteckt wurde, wird wieder frei.

b) Energie

Bisher haben wir nur von Arbeit gesprochen, die man an Systemen leisten kann, bzw. die von Systemen geleistet werden.

Betrachten wir noch einmal das Beispiel von oben. Wir drücken eine Feder zusammen und verrichten damit die Arbeit

$$W_F = \frac{1}{2} D s^2. \text{ Dann halten wir die}$$

Feder fest, verrichten also keine Arbeit mehr. Lassen wir die Feder irgendwann mal wieder los, schnellst sie zurück, und die Arbeit

$$W_F = - \frac{1}{2} D s^2$$

wird frei. Während wir die Feder festhalten, verrichten wir keine Arbeit und es wird auch keine frei. Vorher steckten wir welche hinein, danach kommt welche heraus. Wo bleibt die Arbeit dazwischen?

Sie steckt in der Feder drin! Nur nennen wir sie dann nicht mehr Arbeit, sondern Energie.

⇒ Energie = gespeicherte Arbeit

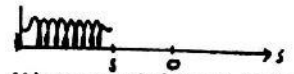
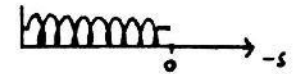
oder: Unter Energie verstehen wir die Fähigkeit eines Körpers oder Systems, Arbeit zu verrichten (die vorher auf irgendeine Art dort gespeichert wurde).

Da Energie ein anderer Name für Arbeit ist, hat sie notgedrungen die gleiche Einheit

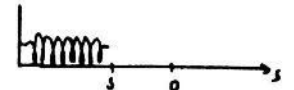
$$[\text{Energie } E] = J = Nm = Wsec = \frac{kgm^2}{sec^2}.$$

Im letzten Kapitel sahen wir, daß es verschiedene Arten von Arbeit gibt (die aber alle aus $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ herzuleiten waren), und später werden wir noch weitere Arten kennenlernen. Diesen verschiedenen Arten von Arbeit entsprechen verschiedene Arten von Energien. Prinzipiell gesehen sind diese verschiedenen Arten von Energien alles das gleiche, denn - wie wir sehen werden - sind sie alle ineinander umwandelbar.

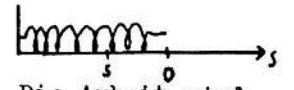
Je nachdem, durch welche Art von Arbeit wir einem Körper oder System Energie zuführen, sprechen wir von potentieller, kinetischer, Spannungsenergie oder von sonst einer der vielen anderen Energiearten.



Wir verrichten Arbeit



Wo ist die Arbeit jetzt?



Die Arbeit wird wieder frei.

α) potentielle Energie

Vorhin sprachen wir von der Hubarbeit W_H . Diese muß man verrichten, wenn man gegen die Schwerkraft einen Körper hochhebt. Hält man den Körper an und beläßt ihn in dieser Lage, so ist er fähig, Arbeit zu leisten, da er wieder herunter fallen kann. Wird er also oben festgehalten, hat er eine Energie, die sogenannte Energie der Lage oder potentielle Energie.

Wir wollen dies kurz berechnen :

- 1) Arbeit um Masse m von Höhe h_1 auf die Höhe h_2 zu heben

$$W(h_1 \rightarrow h_2) = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} = mg \int_{h_1}^{h_2} dx = mg \cdot (h_2 - h_1) = m \cdot g \cdot h$$

- 2) potentielle Energie (hineingesteckte Arbeit)

$$E_{\text{pot}} = U(h) = m \cdot g \cdot h$$

- 3) Arbeit, die frei wird, wenn Masse um die gleiche Strecke $h (= h_2 - h_1)$ fällt

$$W(h_2 \rightarrow h_1) = \int_{h_2}^{h_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = mg (h_1 - h_2) = - m \cdot g \cdot h$$

Im Punkt 2) schrieben wir $E_{\text{pot}} = U(h)$, also potentielle Energie ist gleich $U(h)$. U ist eine andere Bezeichnung für die potentielle Energie. $U(h)$ hängt von h , von der Höhe ab. Es war $U(h) = mgh$. Also wird die potentielle Energie umso größer, je höher der Körper angehoben wurde. Wir können somit jeder Höhe h eine potentielle Energie $U(h)$ zuordnen.

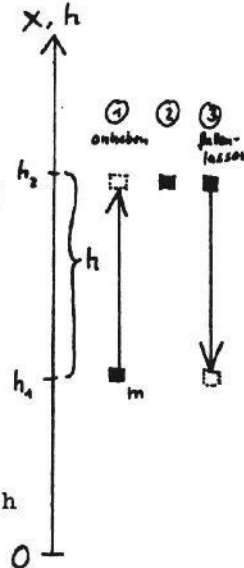
Also können wir auch sagen:

$$U(h_2) - U(h_1) = W(h_2 \rightarrow h_1)$$

oder: potentielle Energie in h_2 - potentielle Energie in h_1 = Arbeit um den Körper von $h_1 \rightarrow h_2$ zu bringen :

$$U(h_2) - U(h_1) = W(h_1 \rightarrow h_2)$$

$$m g h_2 - m g h_1 = m g (h_2 - h_1) = m g h = W(h_1 \rightarrow h_2)$$



Also $U(h_2) - U(h_1) = mgh$, und dies ist größer als Null. Im Punkt 3) war die gleiche Arbeit negativ.

Betragsmäßig waren beide Arbeiten, nämlich zum einen das Heben der Masse um h , zum zweiten das Senken der Masse um den gleichen Betrag h , gleich. Sie unterschieden sich lediglich um das Vorzeichen. Aber gerade auf dieses Vorzeichen kommt es an! Im letzten Kapitel sprachen wir schon davon, daß das Vorzeichen uns Auskunft darüber gibt, ob Arbeit hereingesteckt werden soll, oder ob sie aus dem Körper (bzw. System) herauskommt. Heben wir eine Masse an, müssen wir Hubarbeit verrichten. Lassen wir sie fallen, wird die gleiche Arbeit frei. Deshalb ist W_H im letzten Fall negativ, beim Heben aber positiv.

Heben wir den Körper an, leisten wir Arbeit. Diese stecken wir quasi in ihn hinein. Sie ist dann als potentielle Energie gespeichert. Fällt der Körper herunter, so wandelt sich die potentielle Energie, in dem Maße wie sie abnimmt, in die sogenannte kinetische Energie (siehe nächstes Unterkapitel) um, die den Körper beschleunigt.

Wir sagten

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h \quad \text{denn } E = \int_0^h F dx = mg \int_0^h dx = mgh$$

Dies gilt allerdings nur in der Nähe der Erdoberfläche. Bei der Bildung von $E = mgh$ setzten wir die Kraft $F \approx mg$ vor das Integral. Das können wir natürlich nur, wenn dieser Faktor von x unabhängig, also konstant ist. x ist hier in unserem Falle die Höhe h . Die Masse m ist von der Höhe h unabhängig, das wissen wir. Können wir dies aber auch für die Erdbeschleunigung g sagen? Sehen wir uns einmal die Berechnung von g auf Seite 8 an. Dort haben wir die Höhe über der Erdoberfläche gegenüber dem Erdradius vernachlässigt. Das ist aber nur für kleine Höhen gerechtfertigt. Wird h größer, so macht sich die Abhängigkeit $g(h)$ bemerkbar, und g kann nicht mehr also konstant angesehen und vor das Integral gezogen werden. exakt gilt dann:

$$E_{\text{pot}} = m \int_{h_1}^{h_2} g(h) dh$$

Es gibt noch weitere Arten von potentieller Energie. Immer, wenn in einem Körper oder System Energie "aufgestaut" ist, kann man von potentieller Energie sprechen. Zum Beispiel führt eine Verformungsarbeit zu sogenannter Spannungsenergie

$$E_{\text{Spannung}} = E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D s^2$$

β) kinetische Energie

Vorhin sprachen wir kurz von kinetischer Energie.

Es steckt in einem Körper potentielle Energie, beispielsweise, wenn er hochgehalten wird. Läßt man ihn fallen, so bewegt er sich, ja er wird sogar beschleunigt (vgl. Freier Fall). Ist der Körper einige Zentimeter gefallen, hat er immer noch potentielle Energie. Allerdings etwas weniger. Diese "fehlende" Energie tritt nun als kinetische Energie auf. Sie ist es, die den Körper beschleunigt.

Allgemein gilt, daß in jedem bewegten Körper kinetische Energie auftritt. Ihr Größe ist gleich der der Beschleunigungsarbeit:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Wird der Körper beschleunigt, so wird er schneller. Seine Geschwindigkeit wächst von v_1 auf v_2 . Seine kinetische Energie am Anfang ist

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

am Schluß der Geschwindigkeitsänderung ist sie $E_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2$.

Seine kinetische Energie hat sich also, genau wie die Geschwindigkeit geändert und zwar um

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

Da $v_2 > v_1$ ist auch $(v_2^2 - v_1^2) > 0$, also ist E_{kin} positiv.

Das heißt, daß kinetische Energie verbraucht wird.

γ) Energieerhaltungssatz

DIE ENERGIE IST IN EINEM ABGESCHLOSSENEN SYSTEM KONSTANT (ENERGIEERHALTUNGSSATZ)

Betrachten wir dazu das Beispiel des Körpers der angehoben würde. Ist er oben, hat er potentielle Energie. Diese wandelt er in kinetische Energie um, aber so, daß die Summe

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konstant}$$

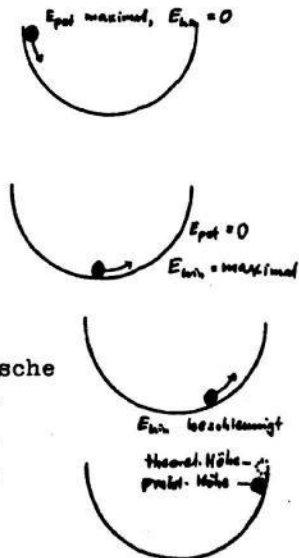
ist.

Im praktischen Experiment geht allerdings immer Energie verloren. Stimmt das? Nach dem Energieerhaltungssatz stimmt das nicht. Oder gilt dieser Satz nicht immer?

Doch-der Energieerhaltungssatz ist einer der fundamentalen Erhaltungssätzen der Physik und er stimmt immer.

Im praktischen Experiment entziehen sich manche Energieformen die auftreten, der direkten Beobachtung. Macht man zum Beispiel ein mechanisches Experiment, passiert es häufig, daß sich Teile der Apparatur erwärmen.

Betrachten wir folgendes Beispiel (siehe Skizze). Die Walze soll in dieser gekrümmten Fläche rollen. Normalerweise müßte die Walze, wenn sie oben ist, die gesamte potentielle Energie haben. Dann rollt sie hinunter. E_{pot} wandelt sich in E_{kin} um. Auf der anderen Seite rollt sie wieder hinauf (denn sie hat jetzt die maximale kinetische Energie). Wandelt sich alle kinetische Energie wieder in potentielle um, müßte der Körper wieder genausoweit hinauf rollen wie er ursprünglich war. Dieses Hinauf- und Hinunterrollen müßte ewig so weitergehen. Man weiß aber aus Erfahrung, daß dem nicht so ist. Warum aber? Nun - ein Teil der Energiesumme $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ wandelt sich in Reibungswärme um, denn Wärme ist auch eine Energieform, wie wir noch sehen werden.



Im Laufe dieses Skriptes werden wir noch viele Energieformen kennenlernen. Ich werde kurz einen Überblick über mögliche Energieformen geben:

- potentielle Energie
- Spannungsenergie
- kinetische Energie
- Schwingungsenergie
- Oberflächenenergie
- Rotationsenergie
- Wärmeenergie
- Innere Energie
- elektrische Energie
- magnetische Energie
- Lichtenergie
- Emissionsenergie

Der Energiebegriff und der Energieerhaltungssatz sind fundamental für alle Bereiche der Physik.

Es können sich einzelne Energieformen ganz oder teilweise in andere umwandeln. Verloren geht im abgeschlossenen System keine Energie.

Man kann das gesamte Universum als abgeschlossenes System ansehen. Auch hier gilt selbstverständlich der Energieerhaltungssatz. Keine Energie geht verloren!

Bisher haben wir alle Arbeits- und Energiegrößen aus der Definition

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{gewonnen. Schön und gut.}$$

Eine andere (allerdings eng damit zusammenhängende) Art der Herleitung von $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ ist die, die vom 2. Newtonschen Axiom ausgeht:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \ddot{\vec{r}} \quad \text{mit } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Multiplizieren wir dies mit $\dot{\vec{r}}$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = m \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$$

$$\text{linke Seite : } \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\vec{F} \cdot \vec{r}) = \frac{dW}{dt}$$

$$\text{rechte Seite : } m \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = m \cdot \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \cdot \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right)$$

$$\text{also } \frac{d}{dt}(W) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \Rightarrow \boxed{W = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2}$$

c) Leistung

Als Leistung definieren wir das Verhältnis von Arbeit zur Arbeitszeit:

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Arbeitszeit}} \quad \text{oder} \quad \boxed{P = \frac{W}{t}}$$

$$\text{Einheit : } [P] = \frac{J}{\text{sec}} = \frac{Nm}{\text{sec}} = \frac{W \text{ sec}}{\text{sec}} = W = \frac{kgm^2}{\text{sec}^3}$$

Nun noch einige, z.T. veraltete Einheiten:

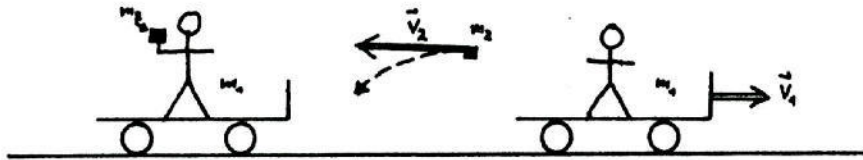
Einheit	Kurz- zeich.	Faktor zur Umrechnung in			ENERGIE
		J	kWh	kcal	eV
Joule Newtonmeter Wattsekunde	J Nm Wsec	1	$2,778 \cdot 10^{-7}$	$2,388 \cdot 10^{-4}$	$6,242 \cdot 10^{18}$
Kilowattstd.	kWh	$3,6 \cdot 10^6$	1	$8,598 \cdot 10^2$	$2,247 \cdot 10^{25}$
Kilokalorie	kcal	$4,187 \cdot 10^2$	$1,163 \cdot 10^{-3}$	1	$2,614 \cdot 10^{22}$
Elektronenvolt	eV	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$4,45 \cdot 10^{-26}$	$3,826 \cdot 10^{-23}$	1

Einheit	Kurz- zeich.	Faktor zur Umrechnung in		LEISTUNG
		W	kcal/sec	PS
Watt Joule/sec	J/sec	1	$2,388 \cdot 10^{-4}$	$1,36 \cdot 10^{-3}$
Kilokalorie/ Sekunde	kcal/ sec	$4,187 \cdot 10^3$	1	5,692
Pferdestärke	PS	$7,255 \cdot 10^2$	$1,757 \cdot 10^{-1}$	1

6. Der Impuls

a) Begriff

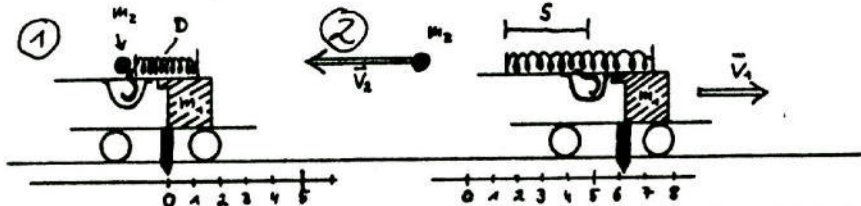
Zunächst machen wir ein Experiment :



Ein Mann stehe auf einem Wagen (Gesamtmasse Wagen + Mann = m_1) und halte eine Masse m_2 in der Hand. Zunächst sei der Wagen in Ruhe. Wirft der Mann die Masse weg, so beginnt der Wagen sich zu bewegen, und zwar in die Richtung, die der Wurfrichtung entgegenliegt. Die weggeworfene Masse habe die Geschwindigkeit v_2 , der Wagen bewege sich dann mit v_1 in entgegengesetzter Richtung. Nun fragen wir nach den Beziehungen zwischen beiden Massen und beiden Geschwindigkeiten.

Wir wollen nun diesen Versuch etwas anders durchführen, und zwar so, daß wir die Wurfgeschwindigkeit messen können:

Wir benutzen dazu eine Schießmaschine, die auf einen Wagen montiert ist. Keine Angst - es handelt sich hier nicht um ein Mordinstrument, sondern lediglich um eine Feder, die gespannt ist und wenn sie plötzlich entspannt wird, eine Kugel weg"schießt".



Wir legen eine Kugel der Masse m_2 vor die Feder der Schießmaschine (Masse Maschine + Wagen = m_1). Die Federkonstante der Feder sei D . Jetzt spannen wir die Feder. Sie wird dabei um die Strecke s zusammengedrückt. Also hat sie eine potentielle Energie von

$$W_{\text{Spannung}} = \frac{1}{2} Ds^2$$

Nun wollen wir die Feder plötzlich entspannen. Die Feder dehnt sich aus, sie stößt die Kugel an, und diese fliegt weg. Warum tut sie das? Sie hat kinetische Energie bekommen. Und woher? Nun - aus der potentiellen Energie der Feder.

Also können wir sagen, daß sich die potentielle Energie der Feder in kinetische Energie der Kugel verwandelt. Also gilt

$$W_{\text{Spannung}} = \frac{1}{2} Ds^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \text{ wenn } v_2 \text{ die Geschwindigkeit}$$

der Kugel ist. Diese ist ja konstant, da es keine dauernd einwirkende Kraft gibt, die die Kugel beschleunigen würde.

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{D}{m_2} s^2 \quad \text{oder} \quad v_2 = \sqrt{\frac{D}{m_2}} s$$

Wie messen wir nun die Geschwindigkeit v_1 des Wagens?

Wir machen eine Zentimetereinteilung entlang des Weges auf dem der Wagen läuft. Mit einer Stoppuhr können wir das Verhältnis Weg zu Zeit messen.

Wie gehen wir nun weiter? Messen wir m_1, m_2, v_1, D, s und sehen wie diese Größen zusammenhängen.

Damit das ganze auch aussagekräftig ist, führen wir den Versuch mehrfach durch und verwenden verschiedene Massen m_2 und verschiedene Federn.

Dann schreiben wir uns eine Tabelle, wo die ganzen Größen aufgeführt sind (m_1, m_2, D, v_2, v_1). m_1 und s seien immer gleich. Dann nehmen wir noch einige Spalten in unsere Tabelle auf, in der wir Verknüpfungen zwischen unseren Größen aufschreiben. Dann versuchen wir, Gemeinsamkeiten aufzuspüren.

Wollen wir nun diesen Versuch einmal praktisch durchführen. Ich gebe hier einige Größen und Ergebnisse an, dann können wir versuchen, Gesetzmäßigkeiten zu entdecken.

Annahme: $m_1 = 1420 \text{ g} = 1,42 \text{ kg}$

$s = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$

Wir haben drei Federn mit $D = 200 (400, 600) \frac{\text{N}}{\text{m}}$

und wir haben drei Kugeln mit $m_2 = 0,1 (0,2 ; 0,3) \text{ kg}$.

Tabelle

Größe	m_1	m_2	v_1	D	v_2	$m_1 v_1$	$m_2 v_2$
Einheit	[kg]	[kg]	$\left[\frac{m}{sec}\right]$	$\left[\frac{N}{m}\right]$	$\left[\frac{m}{sec}\right]$	$\left[\frac{kg \cdot m}{sec}\right]$	$\left[\frac{kg \cdot m}{sec}\right]$
Woher kennen wir diese Größen ?							
	vorgegeben		experimentell ermittelt	vorgegeben	errechnet aus $v_2 = \sqrt{\frac{D}{m_2}} \cdot s$		berechnet
Werte	1,42	0,2	0,44	200	3,162	0,625	0,6324
	1,42	0,2	0,63	400	4,472	0,895	0,8944
	1,42	0,2	0,77	600	5,477	1,093	1,0954
	1,42	0,3	0,54	200	2,582	0,767	0,7746
	1,42	0,3	0,77	400	3,651	1,093	1,0953
	1,42	0,3	0,94	600	4,472	1,335	1,3416
	1,42	0,4	0,32	200	4,472	0,454	0,4472
	1,42	0,4	0,44	400	6,325	0,625	0,6325
	1,42	0,4	0,54	600	7,746	0,77	0,7746

Wir haben hier in dieser Tabelle lediglich die Verknüpfungen $m_1 v_1$ und $m_2 v_2$ aufgeführt, da nur sie zu einem gesetzesmäßigen Ausdruck führen. Wir können erkennen, daß in jedem der Versuche $m_1 v_1$ und $m_2 v_2$ etwa gleich sind. Bilden wir zum Vergleich das

$$\text{Verhältnis } \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = \begin{cases} 0,988 ; 0,990 ; 1,015 ; \\ 1,001 ; 0,998 ; 0,988 ; \\ 0,988 ; 0,995 ; 0,994 ; \end{cases} \text{ also alles ungefähr gleich eins.}$$

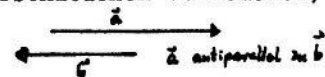
Führt man die Versuche sehr präzise durch, so erhält man immer die Relation $m_1 v_1 = m_2 v_2$

Berücksichtigen wir nun noch die Richtungen von \vec{v}_1 und \vec{v}_2 (sie sind antiparallel = parallel mit verschiedenen Vorzeichen)

so erhalten wir :

$$m_1 \vec{v}_1 = - m_2 \vec{v}_2$$

oder $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$



Für die Größe $m_1 \vec{v}_1$ führt man eine neue Bezeichnung ein :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Impuls

Der Impuls beschreibt so etwas wie die Wucht einer bewegten Masse. Der Impuls sagt zum Beispiel etwas darüber aus, welche Auswirkungen der Zusammenstoß von bewegten Massen hat.

Ein Auto fahre mit der Geschwindigkeit 90 km/h = 25 m/sec über eine Straße. Das Auto habe die Masse $m = 900$ kg. Also ist sein Impuls $p = m \cdot v = 900 \cdot 25 \text{ kg } \frac{m}{sec} = 2,25 \cdot 10^4 \frac{kgm}{sec}$.

Wollen wir nun diesen Impuls ändern, so müssen wir entweder die Masse ändern, oder die Geschwindigkeit, oder beides. Zum Beispiel ändern wir den Impuls, wenn wir irgendwelche Gegenstände hinauswerfen (die Masse wird kleiner), oder einfach unsere Geschwindigkeit variieren.

Nehmen wir einmal an, wir wollten den Impuls vergrößern, dann müssen wir schneller werden, also wir müssen das Auto beschleunigen. Und was hängt immer eng mit dem Begriff der Beschleunigung zusammen ? Der Begriff der Kraft. Im Motor unseres Autos wird Benzin verbrannt, Dadurch bewegen sich die Kolben, diese treiben die Räder an. Die Räder üben auf die Straße eine Kraft aus. Gäbe es keine Reibung, brauchte man die Kraftwirkung nur zum Beschleunigen des Autos, nicht aber zur Konstanthaltung der Geschwindigkeit. Das heißt (alles im Idealfall): Zum Erhöhen der Geschwindigkeit ($\hat{=}$ Erhöhung des Impulses) brauchen wir eine Kraft. Auch zum Verkleinern des Impulses ist eine Kraft nötig. Nur hat diese ein anderes Vorzeichen.

Dies nun in etwas mathematischerer Weise :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} \vec{p} = \dot{\vec{p}}$$

Also - ist ja ganz einfach :

$$\text{Impulsänderung} = \text{Kraft}$$

Betrachten wir nun ein abgeschlossenes System (also keine äußeren Kräfte). Hier ist die Kraft = 0, denn die inneren Kräfte heben sich gegenseitig auf, die äußeren sind null. Also folgt $\dot{\vec{p}} = 0$, damit $\vec{p} = \text{const.}$

Das zeigt auch unser Versuch von vorhin. Der Gesamtimpuls war $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$, mithin also auch konstant.

Generell gilt der sogenannte Impulserhaltungssatz

BEI ABWESENHEIT EINER ÄUSSEREN KRAFT BLEIBT DER
TOTALIMPULS EINES SYSTEMS KONSTANT

(Impulserhaltungssatz)

Aus unserem Versuch folgte $p_1 = p_2$ (betragsmäßig betrachtet)
Also: Impuls vor dem Abschießen der Masse m_2 war gleich dem
Impuls nach dem Abschießen. Keine Kraft wirkte dabei.
Im Impulserhaltungssatz ist noch verallgemeinert, daß es
viele Impulse geben kann, deren Summe konstant bleibt.
also

$$\dot{\vec{p}}_{\text{Ges}} = \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{Ges}}$$

Der Gesamtimpuls ist dann konstant, wenn die Summe aller Kräfte
gleich Null ist. Und dies ist im abgeschlossenen System der Fall.

Kurz noch ein anderes Beispiel :

P und Q seien Massenpunkte.

P übe auf Q die Kraft \vec{F} aus (stellen wir uns vor, P sei die Erde
und Q sei der Mond - P übt auf Q eine Kraft aus : Die Erde zieht
den Mond an) \implies Q wird beschleunigt $\ddot{\vec{r}}_Q = \frac{\vec{F}}{m_Q}$

Aber nach dem Reaktionsprinzip (actio = reactio) übt Q auf P die
gleiche (aber entgegengesetzte) Kraft $-\vec{F}$ aus, also wird auch
P beschleunigt mit $\ddot{\vec{r}}_P = \frac{-\vec{F}}{m_P}$

$$\implies \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_Q^{m_Q} \quad \text{und} \quad -\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_P^{m_P} \quad \text{also, da } \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$$

$$\ddot{\vec{r}}_Q^{m_Q} + \ddot{\vec{r}}_P^{m_P} = \vec{0}$$

$$\text{bzw.} \quad \ddot{\vec{r}}_Q^{m_Q} + \ddot{\vec{r}}_P^{m_P} = \text{const.} \quad \hat{=} \quad m_Q \ddot{\vec{v}}_Q + m_P \ddot{\vec{v}}_P = \text{const.}$$

$$\ddot{\vec{p}}_Q + \ddot{\vec{p}}_P = \text{const.}$$

$$\text{bzw.} \quad \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \text{const.} \quad \hat{=} \quad \text{Impulserhaltungssatz.}$$

Dazu wollen wir im folgenden einige Anwendungen betrachten, die
den Impulsbegriff noch klarer und einsichtiger machen sollen.

b) Anwendungen

α) Rakete

Eine startende Rakete erreiche die Endgeschwindigkeit v .
Diese ist meist vorgegeben. Zum Beispiel beträgt die Flucht-
geschwindigkeit (Geschwindigkeit, die man erreichen muß, um
die Erde zu verlassen) 11,2 km/sec. Beim Brennen des Brennstoffs
verliert die Rakete Masse (durch die Ausströmungsgase).

Die Funktionsweise einer Rakete ist eigentlich die, daß
sie Brennstoff verbrennt; die ausströmenden Gase haben einen
bestimmten Impuls. Also muß nach dem Impulserhaltungssatz die
Rakete auch einen gleich großen, entgegengesetzten Impuls er-
halten. Er ist es, der die Rakete **antreibt**.

Wir nehmen an, das Gas ströme mit einer Ausströmgeschwindig-
keit von $w = 3.97 \cdot 10^3 \frac{m}{sec}$ aus (dies ist die Strahlgeschwindig-
keit für ein $H_2 - O_2$ - Gemisch bei $4000^\circ C$). Unsere Rakete soll
Fluchtgeschwindigkeit erhalten.

Die Rakete soll eine Nutzlast (Raumschiff) von $m = 1000$ kg von
der Erde wegbewegen. Wir fragen nach der Menge (Masse) des Treib-
stoffes, wenn die Masse der Rakete (ohne Nutzlast und Treibstoff)
 $m_R = 12000$ kg beträgt.

Die Rakete stößt eine Treibstoffmasse dm aus, mit einer Aus-
strömgeschwindigkeit w . Also ist ihr Impuls

$$dp = w \cdot dm$$

Wir haben hier infinitesimal kleine Größen verwendet, da m
nicht konstant ist.

Nach dem Impulserhaltungssatz muß die Rakete (Startmasse m_0 ;
und Masse zur Zeit t : m) um dv schneller werden. Also gilt :

$$m \cdot dv = - w \cdot dm \quad \text{dies teilen wir durch } dt$$

$$m \frac{dv}{dt} = - w \frac{dm}{dt}$$

$\hat{=} \text{ Impulsänderung der Rakete} = - \text{ Impulsänderung der ausströmenden}$

$$\text{also} \quad dv = - w \frac{dm}{m} \implies \int_0^v dv = v = - w \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = - w \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

somit gilt bei der Rakete :

$$v_{\text{end}} = - w \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

Was wir nun suchen, ist m_0 , die Gesamtstartmasse der Rakete.

Bekannt sind v_{end}, w, m_R und m und es ist $m_0 = m_R + m + m_T$
 wobei $m_T = m_{Treibstoff}$

$$\ln \frac{m_{end}}{m_0} = - \frac{v_{end}}{w} \quad \text{also} \quad \frac{m_{end}}{m_0} = e^{-\frac{v}{w}}$$

$$= \exp\left(-\frac{11200}{3970}\right) = 0,0595$$

somit $m_0 = m + m_R + m_T = \frac{m_{end}}{0,0595}$ $m_{end} = m_R + m$

$$m_T = \frac{m_{end}}{0,0595} - m - m_R$$

$$= \frac{1000}{0,0595} - 1000 - 12000 \text{ kg} = 206.487,31 \text{ kg}$$

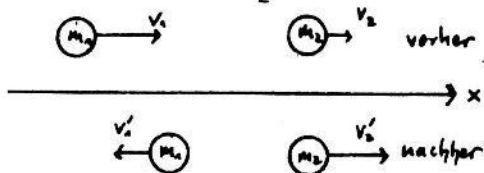
β) Stoßprobleme

-elastischer Stoß

Zwei Massen stoßen aneinander und zwar so, daß keine Energie als Wärme oder Verformungsarbeit verschwindet (z. B. Billardkugel) (= Bedingungen für den elastischen Stoß)

Bezeichnungen :

- v_1 Geschwindigkeit von m_1
 - v_2 Geschwindigkeit von m_2
- } vor dem Stoß
- v_1' Geschwindigkeit von m_1
 - v_2' Geschwindigkeit von m_2
- } nach dem Stoß



Nun wollen wir sehen, wie die Massen und Geschwindigkeiten miteinander zusammenhängen.

Es gelten hier zwei fundamentale Erhaltungssätze, nämlich diejenigen, die wir bereits besprochen haben:

Impulserhaltungssatz $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$
 . Gesamtimpuls vor dem Stoß = Gesamtimpuls nach dem Stoß

Impulserhaltungssatz $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$
 oder $m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$ (1)

Energieerhaltungssatz $E_{kin,1} + E_{kin,2} = E_{kin,1}' + E_{kin,2}'$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$
 (2)
 oder $m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$

bzw. $m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$ (2')

dazu (1)

$$\frac{m_1 (v_1 - v_1')}{(v_1 + v_1')} = \frac{m_2 (v_2' - v_2)}{(v_2' + v_2)}$$
 (1')

(2'):(1')

also es gilt nach Impuls- und Energieerhaltungssatz

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

Die Summe der Geschwindigkeiten ist für jeden am Stoß beteiligten Körper gleich groß.

Dies gilt immer. Nun wollen wir aber etwas anderes untersuchen, nämlich die Frage, wie groß die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind, wenn wir die Geschwindigkeiten vor dem Stoß und die Massen kennen.

Wieder mit Hilfe der beiden Erhaltungssätze ermitteln wir nun v_1' und v_2' :

$$v_2' = v_1 + v_1' - v_2 \quad \text{in (1')}$$

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_1' + v_1 - v_2 - v_2')$$

$$-m_1 v_1' - m_2 v_1' = m_2 v_1 - 2m_2 v_2 - m_1 v_1$$

$$v_1' (-m_1 - m_2) = \dots$$

also

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

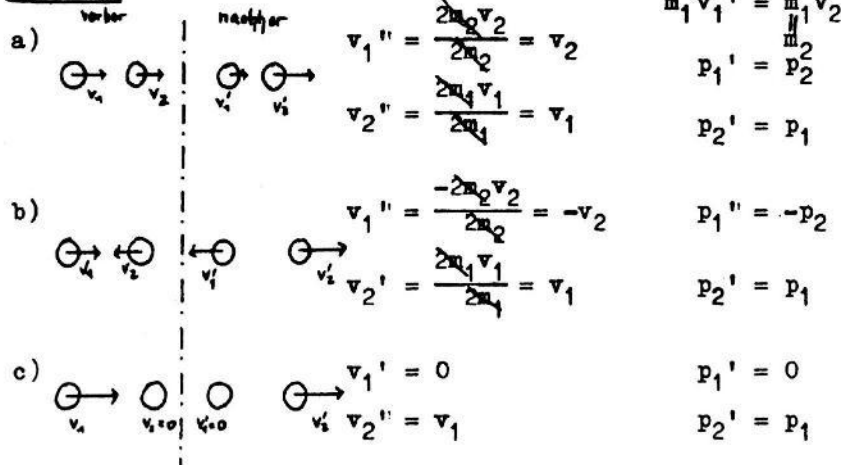
für v_2' erhalten wir durch ganz analoge Rechnung

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Die Geschwindigkeiten in Gegenrichtung erhalten ein negatives Vorzeichen.

Nun wollen wir einige Sonderfälle betrachten:

1) $m_1 = m_2$



Ergebnis :

Beim elastischen Stoß zweier gleicher Massen wird der gesamte Impuls von einem auf den andern Körper übertragen.

2) $m_1 \ll m_2$

Annahme : $v_2 = 0$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{-m_2v_1}{m_2} \approx -v_1$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \approx \frac{2m_1v_1}{m_2} \approx 0$$

Impulse $P_1' = m_1 v_1' = -m_1 v_1 = -P_1$

$P_2' = m_2 v_2' = \frac{2m_1 m_1 v_1}{m_2} = 2 P_1$

Ergebnis :

Die leichte Masse überträgt ihren Impuls an die schwerere und reflektiert dort ($-v_1$). Die schwere Masse erhält den doppelten Impuls.

3) $m_1 \gg m_2$

Annahme: $v_2 = 0$

$$v_1' = \frac{m_1 v_1}{m_1} = v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1} = 2v_1$$

Impulse

$$P_1' = m_1 v_1' = P_1$$

$$P_2' = m_2 v_2' = 2m_2 v_1 \approx 0$$

Zusammenfassung:

Beim Stoß -

(Annahme: eine ruhende Kugel wird von einer anderen gestoßen)

- gleiche gegen gleiche Masse - bleibt die ankommende Kugel nach dem Stoß ruhig liegen, während die andere, die zuerst ruhte, mit der Geschwindigkeit der ankommenden Kugel weiterrollt. Die Impulse werden ebenso ausgetauscht.
- kleine gegen große Masse - reflektiert die kleine an der großen Masse. Sie behält ihren Impuls. Die große Masse erhält diesen Impuls doppelt¹⁾. Sie bleibt fast in Ruhe.
- große gegen kleine Masse - rollt die schwere Kugel fast ungestört weiter, die kleine Kugel erhält die doppelte Geschwindigkeit der großen. Ihr Impuls ist klein, während der der großen im wesentlichen gleich geblieben ist.

1) Dies ist kein Widerspruch zum Impulserhaltungssatz :

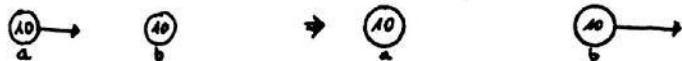
Impuls der kleinen Masse p_1 kehrt sich um $\rightarrow -p_1$.

Erhaltungssatz : linke Seite $p_1 + p_2 = p_1 + 0 = p_1$

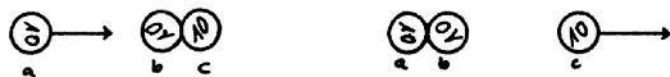
rechte Seite $P_1' + P_2' = -p_1 + 2p_1 = p_1$

Dazu noch eine kleine Anwendung, ein Experiment, das jeder am Schreibtisch durchführen kann, wenn er so finanzstark ist, daß er wenigstens vier oder fünf 10-Pfennig-Stücke zur Verfügung hat :

- Wir legen eine Münze ruhig hin und schubsen die zweite auf die ruhende drauf. Was passiert ? Die, die vorher in Ruhe war, gleitet mit der gleichen Geschwindigkeit weiter, die andere bleibt in Ruhe.



- Wir legen zwei Münzen nebeneinander und schubsen diese mit einer dritten (auf der gleichen Linie) an. Was geschieht? Die rechte ruhende bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit weiter, die mittlere bleibt in Ruhe, ebenso die ankommende. Wieso? Wir sehen einfach die Bewegung von 1. zweimal hintereinander. Zunächst kommt a an und



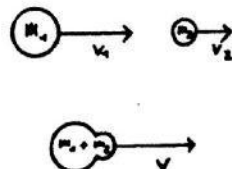
stößt b. b erhält also nun den Impuls von a. Wäre c nicht vorhanden, würde b jetzt mit a's Geschwindigkeit weitergleiten. Aber nun liegt c neben b. Jetzt stößt b gegen c und c fliegt weg, als ob a nicht vorhanden wäre.

- Wir legen fünf Groschen nebeneinander (falls der Reichtum dies zuläßt - wenn nicht Kredit aufnehmen, oder Pfennige nehmen. Falls nichts mehr geht - ab zum Sozialamt !). Jetzt stoßen wir mit zweien auf die restlichen fünf. Jetzt fliegen hinten wieder zwei weg.

Jeder mache weitere Versuche, auch mit verschiedenen Massen (5,- Stück gegen 1 Pfennig).

-inelastischer Stoß

Die Körper berühren sich beim Stoß und verformen sich derart an den Berührstellen, daß sie zusammen sich weiterbewegen. Sie bleiben nach dem Stoß aneinander haften (z.B. Blei, Knetgummi, Kuchenteig).



Die gesamte Energie teilt sich auf in die kinetische Energie, die die Teile nach dem Stoß haben und Verformungsarbeit ΔW . Wir wollen diese Verformungsarbeit ΔW berechnen :

$$\text{Impulssatz : } m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$W = \text{Gesamtenergie vor dem Stoß} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$W' = \text{Gesamtenergie nach dem Stoß} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \Delta W = W - W' &= \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) v^2) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2}{m_1 + m_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_2 m_1 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2}{m_1 + m_2} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

Auch hier erhalten die Geschwindigkeiten in Gegenrichtung den negativen Zahlenwert.

Wir besprachen den elastischen und den inelastischen Stoß. Alle Stoßprozesse, die in der Realität auftreten, sind aus beiden Stoßarten zusammengesetzt. Beispielsweise beim Billard. Dort ist zwar der Einfluß des elastischen Stoßes sehr groß, aber es geht doch Energie als Verformungsarbeit verloren.

Des weiteren besprachen wir hier nur den zentralen Stoß, das heißt alle Geschwindigkeitsvektoren liegen auf einer Geraden. Beim Billardspiel - um bei diesem Beispiel zu bleiben - werden die zu stoßenden Kugeln meist angeschnitten. Diese Stöße sind nicht zentral. Die resultierenden Geschwindigkeiten sind durch Vektoraddition zu bestimmen. Damit schließen wir das Kapitel über Stoßprobleme zunächst einmal ab.

7. Reibung

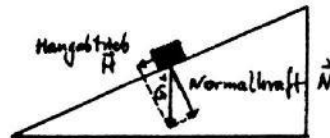
Unter Reibung versteht man eine Kraft, die einer Bewegung entgegensteht, diese also bremst oder hemmt. Wir kennen mehrere Arten der Reibung.

Bewegen wir einen Körper auf einer Unterlage, müssen wir zunächst einmal eine gewisse Kraft wirken lassen, bis sich der Körper bewegt. Bewegt er sich, müssen wir aber - zur Aufrechterhaltung der Bewegung - eine kleinere Kraft wirken lassen, um die Reibung zu überwinden. Diese letztere Reibungskraft nennen wir Gleitreibung. Die erstere Haftreibung. Wir wissen, daß es viel mehr Kraft erfordert, eine Holzkiste auf einer ebenen Bahn zu schieben, als einen gleich schweren Wagen zu ziehen. Bei letzterem müssen wir nämlich nur eine Rollreibung überwinden, die kleiner als die Gleitreibung und viel kleiner als die Haftreibung ist.

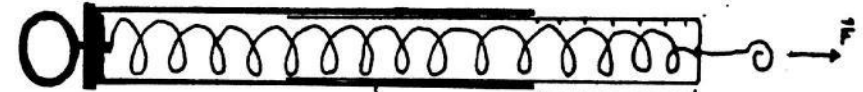
Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Reibungskräfte zu verringern, nämlich beispielsweise, indem man sehr glatte Werkstoffe nimmt, oder indem man zwischen die reibenden Schichten ein Gleitmittel gibt, eine Flüssigkeit, bei der die Atome viel leichter gegeneinander beweglich sind, deren sogenannte Innere Reibung möglichst klein ist.

Betrachten wir kurz noch einmal die drei Reibungsarten, die zuerst genannt wurden. Bewegt man durch eine Kraft F einen Körper auf einer Ebene, so muss man eine Reibungskraft überwinden.

Zunächst noch zu den Kräften. Ist die Ebene genau waagrecht, also senkrecht zur Schwerkraft, so nennen wir diese auch Normalkraft. Warum - sehen wir gleich. Ist die Ebene nicht waagrecht - handelt es sich also um eine schiefe Ebene - so spalten wir die Gewichtskraft, die auf den Körper wirkt, in eine sogenannte Normalkraft- und eine Hangabtriebskomponente auf. Die Normalkraft ist grundsätzlich immer eine Kraft, die senkrecht zur Unterlage (bei uns die Ebene - egal ob waagrecht oder schief) wirkt.



Wir benutzen zur Untersuchung der Reibungskräfte eine Federwaage. Eine solche besteht aus einer Metallhülse. In dieser Hülse ist eine Feder befestigt. Dehnt man diese aus, indem



man an der anderen Seite der Feder eine Kraft wirken läßt, so kann man durch Messen der Vergrößerung der Federlänge s die Größe dieser Kraft bestimmen (wenn die Federwaage geeicht ist). Wie wir im Kapitel über Verformungsarbeit gesehen haben wirkt bei der Feder das Hooke'sche Gesetz

$$F = D \cdot s$$

D = Federkonstante, also $F \sim s$.

Wir legen einen Körper mit der Masse m (also der Gewichtskraft, hier sogar Normalkraft $m \cdot g$) auf eine waagrechte Unterlage. Jetzt ziehen wir an ihm mit der Federwaage. Bei einer ganz bestimmten Kraft F_{Haft} beginnt der Körper sich zu bewegen. Nehmen wir einen größeren Körper mit der gleichen Oberflächenbeschaffenheit und der gleichen Masse, ist die Haftreibungskraft gleich groß. Sie hängt nur (und zwar linear) von der Oberflächenbeschaffenheit und der Normalkraft ab.

$$\vec{F}_{R_{\text{Haft}}} \sim \vec{N} \quad \text{oder} \quad \vec{F}_{R_{\text{Haft}}} = \mu_0 \cdot \vec{N}$$

μ_0 ist die Haftreibungszahl. Sie hängt nur von der Oberfläche des Körpers ab.

Haben wir mit der Federwaage den Körper erst einmal in Bewegung gesetzt, merken wir, daß zur Aufrechterhaltung der Bewegung eine kleinere Kraft nötig ist. Auch diese können wir an der Federwaage ablesen. Es handelt sich jetzt um die Gleitreibungskraft, die zu überwinden ist. Sie ist von den gleichen Größen abhängig wie die Haftreibungskraft, also gilt auch

$$\vec{F}_{R_{\text{Gleit}}} = \mu \cdot \vec{N} \quad \mu \text{ ist die Gleitreibungszahl.}$$

Es gilt $\mu_0 > \mu$.

Bei der Rollreibung wird das Verschieben der Berührflächen durch ein Abrollen ersetzt; Abrollen gibt es nur dann, wenn die Haftreibung am Umfang des Rades größer als die Zugkraft ist. Sonst setzt ein Gleiten ein.

Beispiel :

Durchdrehen der Räder eines Autos auf schneegeglatter Fahrbahn.
Gegenmaßnahmen:

Sand streuen, d.h. Vergrößern der Haftreibungszahl μ_0
Langsameres Anfahren, d.h. Verkleinern der Zugkraft F .

Vergrößerung des Gewichtes, d.h. Vergrößerung der Normalkraft und damit Vergrößerung der Haftreibung.

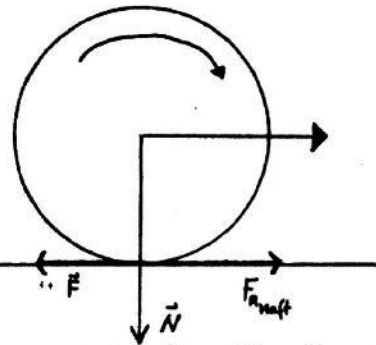
Diese Rollreibung kann durch ein ganz analoges Gesetz beschrieben werden.

$$\vec{F}_{R_{\text{roll}}} = \mu_r \cdot \vec{N}$$

μ_r ist die Reibungszahl der Rollreibung.

Es gilt

$$F_{R_{\text{roll}}} \ll F_{R_{\text{Gleit}}} < F_{R_{\text{Haft}}} \quad \text{also auch} \quad \mu_r \ll \mu < \mu_0.$$



8. Gravitation

a) Gravitationsgesetz

Jedem ist bekannt, daß die Erde auf uns eine Kraft, die sogenannte Schwerkraft oder Gravitationskraft \vec{G} ausübt.

Es ist eine Eigenschaft einer jeden Masse, daß sie Gravitationskräfte ausübt :

Zwei Körper, die jeweils eine Masse haben, üben gegenseitig eine Anziehungskraft aus.

Quantitativ betrachtet :



\vec{F} sei die Anziehungskraft zwischen den beiden Massen. Durch Versuche kann man zeigen, daß $F \sim m_1$ und $F \sim m_2$,

also: die Anziehungskraft wächst linear

mit den beteiligten Massen. Experimentell findet man aber auch eine Abhängigkeit der Anziehungskraft von der Entfernung $|\vec{r}_{12}|$

zwischen beiden Körpern und zwar ist $\vec{F} \sim \frac{1}{r_{12}^2}$

sodaß man sagen kann :

$$F \sim m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{1}{r_{12}^2}$$

oder

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2}$$

Gravitationsgesetz

mit

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg sec}^2} \right]$$

der Gravitationskonstante

exakt (vektoriell) gilt :

$$\vec{F} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{12}^0$$

denn wie wir wissen ist

$$|\vec{r}^0| = 1$$

Somit ist \vec{r}_{12}^0 der Einheitsvektor in \vec{r}_{12} -Richtung

Für die Erdschwerkraft oder Gewichtskraft gilt:

$$G = \gamma \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{r^2} \cdot m_{\text{Körper}}$$

wobei r = Abstand Erdmittelpunkt - Körper.

Oder : Das Gewicht eines Körpers der Masse m , der sich in der Höhe h über der Erdoberfläche befindet ist

$$G = \gamma \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{(R+h)^2} m \quad \text{wobei } R = \text{Erdradius}$$

Wir sehen:

1) $G \sim \frac{1}{r^2}$ also G nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab.

2) $G \neq 0$. Es gilt nur $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{G} = \vec{0}$, also zwei Massen (Erde und Körper) ziehen sich immer an. Nur ihre Anziehungskraft wird mit zunehmender Entfernung kleiner, aber nie Null!

Auch hier gilt das Newton'sche Gesetz

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \text{ hier also } \vec{F} = m \cdot \gamma \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{r^2} \vec{r}_{12}^0 = \vec{G} \quad \text{oder} \quad \vec{G} = m \cdot \vec{g}$$

\vec{g} nennen wir die Fallbeschleunigung. Wir können das Problem aber auch anders auffassen:

Jeder Körper (z.B. die Erde) ist Mittelpunkt eines ihm umgebenden Kraftfeldes mit unendlich weiter Ausdehnung, des sogenannten Schwerefeldes. Die Feldstärke an einer bestimmten Stelle des Feldes bestimmt die Kraft, die an dieser Stelle auf

einen zweiten Körper wirkt.

Zwischen elektrischem Feld, zu dem wir noch ausführlich kommen und Gravitationsfeld gibt es einige interessante Analogien, auf die ich kurz eingehen will:

	Gravitation	elektrisches Feld
Kraft	$\vec{G} = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{12}^0$	$\vec{F} = f \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{12}^0$
Feld	Eine Masse m baut um sich das Feld \vec{g} auf	Eine Ladung q baut um sich das Feld \vec{E} auf
Zusammenhang	$\vec{G} = m \cdot \vec{g}$	$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$
Reichweite	$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{G} = 0$ unendliche Reichweite	$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{F} = 0$ unendliche Reichweite

VORSICHT !!

1. Gravitation und elektrisches Feld sind nur äußerlich Analogien. Beide Kräfte sind trotz allem sehr verschieden.

Im Gegensatz zu elektrischen Kräften, kann man die Gravitation nicht abschirmen und gibt es bei der Gravitation nur anziehende Kräfte.

2. Mit dieser Analogie sehen wir hier :

$\vec{G} = m \cdot \vec{g}$, hier nennen wir $\vec{g} = \text{Gravitationsfeldstärke}$.

Sie stimmt in Betrag, Richtung und Einheit mit der bereits eingeführten Größe \vec{g} (Fallbeschleunigung, Seite 8) überein. Physikalisch gesehen aber sind sie verschieden. Und zwar beschreibt die Feldstärke \vec{g} den Zustand des Raumes um einen Körper. Die Fall- oder Schwerbeschleunigung tritt aber erst dann auf, wenn eine zweite Masse dazukommt, da erst dann eine Kraft, nämlich die Gewichtskraft auftritt.

b) Arbeit im Gravitationsfeld

Bisher sagten wir, die Hubarbeit sei $W_H = m \cdot g \cdot h$. Wir sagten auch, daß dies lediglich für kleine Entfernungen von der Erdoberfläche gilt. Bei größeren Entfernungen (z.B. Raketen-

starts) gilt dies nicht mehr.

Es war

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Also hier } \int dW = W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} f \cdot \frac{m_{\text{Erde}} \cdot m_{\text{Körper}}}{r^2} \cdot dr = m_{\text{Erde}} \cdot m_{\text{Körper}} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr \Rightarrow$$

$$W = f \cdot m_{\text{Erde}} \cdot m_{\text{Körper}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Falls

$h \ll \text{Erdradius}$, bzw. $(r_2 - r_1) \ll \text{Erdradius}$

so gilt mit $g = f \cdot m_{\text{Erde}} \cdot \frac{1}{r^2}$

$$W = f \cdot m_{\text{Erde}} \cdot m_{\text{Körper}} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

r_1, r_2 ist ungefähr gleich r^2 , wenn $r_1 \approx r_2$. Da $r_2 - r_1 = h$, gilt

$$W = f \cdot m_{\text{Erde}} \cdot m_{\text{Körper}} \cdot \frac{h}{r^2} = g \cdot m_{\text{Körper}} \cdot h = m \cdot g \cdot h. \text{ Dies gilt, wie gesagt,}$$

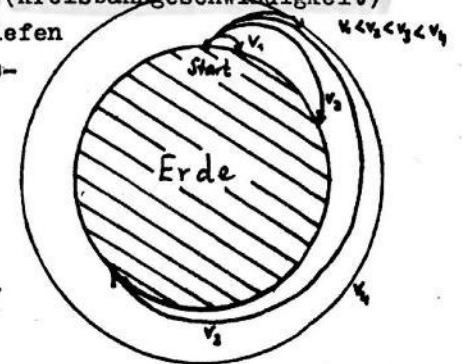
wenn $r_2 - r_1 = h$ sehr klein gegen den Erdradius sind, und das ist bei den meisten alltäglichen Hubbewegungen der Fall.

Beim allgemeinen Ausdruck für die Hubarbeit gegen eine Gravitationskraft, bzw. für die Arbeit im Gravitationsfeld ist diese Arbeit vom Weg gänzlich unabhängig. W hängt nur vom Anfangs- (r_1) bzw. vom Endpunkt (r_2) ab.

c) Astronautische Geschwindigkeiten

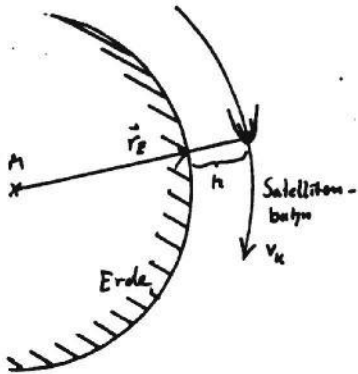
1. Astronautische Geschwindigkeit (Kreisbahngeschwindigkeit)

Gibt man einem Körper beim Schiefen Wurf eine genügend hohe Anfangsgeschwindigkeit v_0 , so erreicht er eine Kreisbahn um die Erde, da seine Zentrifugalkraft so groß wird, daß sie die Erdschwerkraft kompensiert. Diese Geschwindigkeit v_0 ist $v_0 = v_K = 7,9 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$



für eine Bahn in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche. Die Luftreibung ist nicht berücksichtigt.

Berechnung:



- r_E = Erdradius = $6,37 \cdot 10^6$ m
- g_E = Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche = $9,81 \frac{m}{sec^2}$
- m_E = Erdmasse = $5,97 \cdot 10^{24}$ kg
- γ = $6,67 \cdot 10^{-11} m^3 / kg \ sec^2$

Für den Satelliten auf der Kreisbahn gilt

Gewichtskraft = Zentrifugalkraft

$$oder \quad m \cdot g = \frac{mv_K^2}{(r_E+h)}$$

$$\Rightarrow \quad v_K = \sqrt{g(r_E + h)}$$

Da aber g auch von der Höhe abhängt schreiben wir

$$g(h) = \gamma \frac{m_E}{(r_E+h)^2} \quad also \quad \cancel{m} g(h) = \frac{\cancel{m} v_K^2}{(r_E+h)} = \cancel{m} \gamma \frac{m_E}{(r_E+h)^2}$$

$$v_K^2 = \frac{\gamma m_E}{(r_E+h)}$$

und mit $g_E = g(h=0) = \gamma \frac{m_E}{r_E^2}$ bzw. $\cancel{m} m_E = g_E \cdot r_E^2$

$$folgt \quad v_K = \sqrt{\frac{g_E \cdot r_E^2}{r_E + h}} = r_E \sqrt{\frac{g_E}{r_E + h}} = v_K$$

Also: die theoretisch niedrigste Bahn ist bei $h = 0$, somit

$$v_K = \sqrt{\frac{r_E^2 \cdot g_E}{r_E}} = \sqrt{g_E \cdot r_E} = \sqrt{6,37 \cdot 10^6 \cdot 9,81 \frac{m^2}{sec^2}} = 7905 \frac{m}{sec}$$

$$\Rightarrow \quad v_K = 7,9 \frac{km}{sec}$$

2. astronautische Geschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit)

Ab einer bestimmten Geschwindigkeit ist ein Körper fähig, sich unendlich weit von der Erde zu entfernen. Dieses ist die sogenannte Fluchtgeschwindigkeit.

Hier muß die kinetische Energie des Körpers \geq der Arbeit sein, um einen Körper von der Erdoberfläche ins Unend

liche zu "heben".

$$E_{kin} = \frac{m_m}{2} v_p^2$$

$$W(r_E \rightarrow \infty) = \gamma \cdot m_E \cdot m_m \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{\infty} \right) = \gamma \cdot \frac{m_E \cdot m_m}{r_E}$$

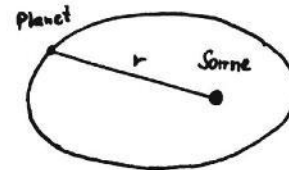
$$\Rightarrow \quad \frac{m_m}{2} v_p^2 \geq \gamma \cdot \frac{m_E \cdot m_m}{r_E} \quad \Rightarrow \quad v_p \geq \sqrt{\frac{2\gamma m_E}{r_E}}$$

$$v_{K_{\text{minimal}}} \text{ hier} = \sqrt{g_E \cdot r_E} = \sqrt{g_E \cdot \frac{r_E^2}{r_E}} = \sqrt{\gamma \cdot \frac{m_E}{r_E^2} r_E} = \sqrt{\gamma \frac{m_E}{r_E}}$$

$$also: \quad v_p \geq \sqrt{2} \cdot v_K \quad \Rightarrow \quad v_{p_{\text{minimal}}} = 11,2 \frac{km}{sec}$$

d) Kepler'sche Planetengesetze

- ① DIE PLANETEN BEWEGEN SICH AUF ELLIPSEN, IN DEREN EINEM BRENNPUNKT DIE SONNE STEHT
- ② DIE VERBINDUNGSGERADE SONNE - PLANET ÜBERSTREICHT IN GLEICHEN ZEITEN GLEICHE FLÄCHEN.
- ③ FÜR ALLE PLANETENBAHNEN IST $\frac{r^3}{T^2} = \text{CONST.}$



2. Folgt aus dem Drehimpulserhaltungssatz, auf den wir noch ausgiebig zuzusprechen kommen.
3. Hier ist T = Umlaufzeit für einen Umlauf:

Beweis von 3:

Zentripetalkraft = Gravitationskraft r ist Durchschnittsabstand!

$$m_p \omega^2 r = \frac{\gamma m_E m_p}{r^2} \Rightarrow da \quad \omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow m_p \omega^2 r = m_p \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$also \quad \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{\gamma m_E}{r^2} \quad oder \quad \frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma m_E}{4\pi^2} = 3,36 \cdot 10^{18} \frac{m^3}{sec^2} = \text{const.}$$

$$also \quad z.B. \quad \frac{r_{\text{Erde}}^3}{T_{\text{Erde}}^2} = \frac{r_{\text{Mars}}^3}{T_{\text{Mars}}^2} \dots$$

II. MECHANIK DES STARREN KÖRPERS

1. Schwerpunkt

a) Starrer Körper

Zunächst - was ist das : starrer Körper ?

Bisher sprachen wir von Massenpunkten, also Körpern, die zwar eine Masse, aber keine Ausdehnung, also kein Volumen haben. Jetzt geben wir unseren Massekörpern noch eine endliche Ausdehnung und gelangen zum starren Körper.

Unter einem starren Körper verstehen wir einen Körper, der eine Ausdehnung und eine Masse hat. Das Adjektiv "starr" bedeutet, daß er sich nicht verformen läßt. Auch dies ist wieder eine Idealisierung, da sich jeder Körper - genügend Kraft vorausgesetzt - verformen kann. Nun exakt also lautet die Definition

Starrer Körper = Ausgedehnte Masse, bei der irgendwelche zwei Punkte immer den gleichen Abstand haben.

In den folgenden Kapiteln kommen natürlich bei manchen Betrachtungen noch Massenpunkte vor, aber zunächst, zum besseren Verständnis von Drehbewegungen müssen wir mit starren Körpern operieren. (Denn es ist ziemlich unsinnig bei Massenpunkten von Drehbewegungen zu sprechen !)

Beim Massenpunkt war es einfach, einen Ortsvektor \vec{r} zu bestimmen. Er begann einfach im Ursprung und seine Spitze lag im Massenpunkt. Wie legen wir nun einen Ortsvektor zu einem starren Körper. Gibt es dort irgend einen ausgezeichneten Punkt, denn ein solcher würde für den Ortsvektor ja reichen, da sich der Körper in sich ja nicht verändert (also verformt), da er ja starr sein soll.

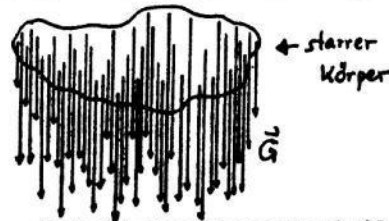
Aber welchen Punkt wollen wir wählen? Beim Massenpunkt nahmen wir ihn selbst, also den Punkt in dem die Schwerkraft angriff. Wo greift nun beim starren

Körper die Schwerkraft an?
Überall ?? Ogotto-gott !

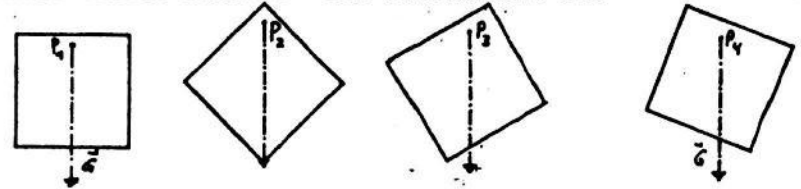
Nun - tatsächlich greift die Schwerkraft beim starren Körper an jeder Masse an, also

an jedem Molekül, ja an jedem massebehafteten Elementarteilchen müßte ein Schwerkraftpfeil gezeichnet sein. Aber -

- wie sollen wir dies darstellen - und vor allem
- wie sollen wir damit rechnen ?

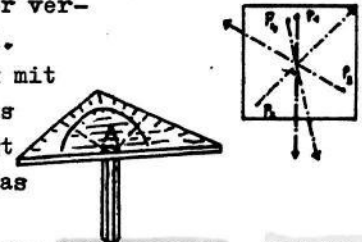


Nehmen wir uns einen starren Körper vor und hängen ihn an mehreren Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 auf. In all diesen Punkten greift - unter vielen anderen - die Schwerkraft an.



Wir zeichnen nun auf unserem starren Körper jeweils die G -Pfeile ein. Was sehen wir? Sie schneiden sich alle in einem Punkt. Was bedeutet das nun? Wir können beispielsweise unseren starren Körper an diesem Punkt unterstützen, dann bleibt er in Ruhe - das kann jeder einmal selbst mit einem Geo-Dreieck und einem Bleistift versuchen. Voraus-

gesetzt, der Experimentator verfügt über eine ruhige Hand. Setzen wir das Geo-Dreieck mit einem anderen Punkt auf das Bleistift auf, so überwiegt woanders das Gewicht und das Dreieck rutscht ab.

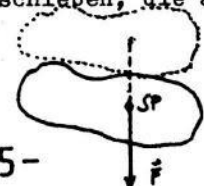


Dieser Punkt - wir nennen ihn Schwerpunkt - ist im starren Körper ein ausgezeichneter. Man kann - ohne daß dies nachteilige Folgen hätte - sich die gesamte Masse des Körpers in diesem Punkt vereinigt denken, und ihn nun wie einen Massenpunkt behandeln.

An jedem starren Körper greift ja eine Gewichtskraft an und zwar an jedem einzelnen Massenelement. Die Resultierende greift im Schwerpunkt (den wir mit SP abkürzen wollen) an. Bevor wir uns nun die Koordinaten des SP bestimmen (denn die brauchen wir für unseren Ortsvektor) müssen wir uns zunächst einmal mit Gleichgewichtsproblemen beschäftigen.

b) Drehmoment

Man darf einen starren Körper parallel zu einer Kraft verschieben, die auf ihn wirkt, ohne seine Lage im Raum zu ändern.



Beim Massenpunkt gilt:

Wenn keine Kraft auf ihn wirkt, dann ist er in Ruhe - also im Gleichgewicht.

Keine Kraft, heißt $\vec{F} = 0$. Dies erreicht man

auch, wenn man mehrere Kräfte zulässt, die einander aufheben, d.h. deren Vektorsumme zusammen 0 ergibt.

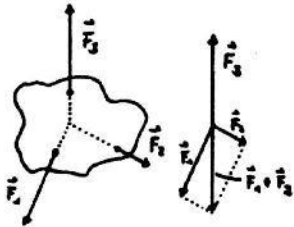
⇒ Gleichgewichtsbedingung Massenpunkt $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$

Gilt dies auch für den starren Körper ?

Wenn sich alle Kräfte, die am SP angreifen aufheben, so bewegt er sich translatorisch nicht mehr, das heißt, daß sein Schwerpunkt in Ruhe ist. Gut - ist also Gleichgewicht vorhanden? Nein - denn der starre Körper kann sich nun - im Gegensatz zum Massenpunkt - noch drehen, und zwar um eine Achse, die durch den SP geht. Hier brauchen wir eine zweite Gleichgewichtsbedingung. Eine, die eine Drehbewegung, also eine Rotation verhindert.

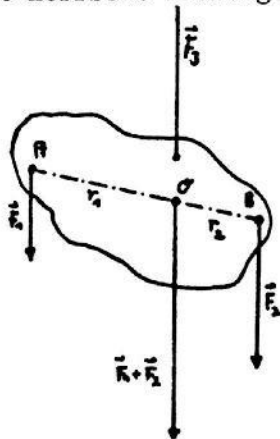
Wir formulieren das neu :

- 1) Wirken auf einen starren Körper \mathcal{Z} in einer Ebene liegende Kräfte F_1, F_2, F_3 , und ihre Verlängerungen schneiden sich in einem Punkt, dann herrscht Gleichgewicht dann, wenn die Vektorsumme der Kräfte = 0 ergibt.



$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ bzw. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$

- 2) Schneiden sich die drei Vektoren nicht in einem Punkt, bzw. sind zwei Kräftevektoren parallel und haben gleiche Richtung, so herrscht Gleichgewicht dann, wenn die dritte Kraft \vec{F}_3

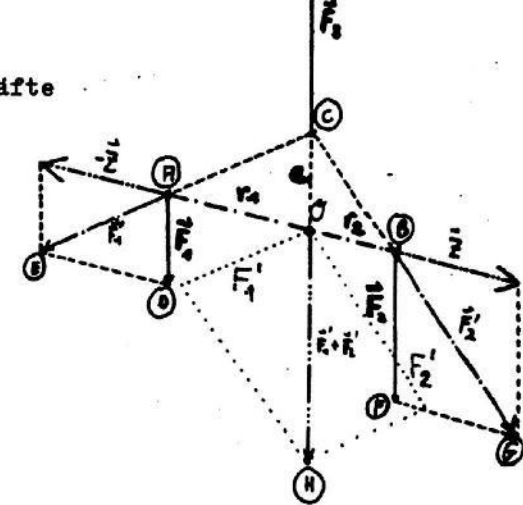


die Verbindungslinie der Angriffspunkte von \vec{F}_1 und \vec{F}_2 im umgekehrten Verhältnis dieser Kräfte teilt und diesen entgegengerichtet ist.

Warum ?

Dieses Bild zeichnen wir neu und fügen zwei Zusatzkräfte \vec{Z} und $-\vec{Z}$ ein, die sich in ihrer Wirkung aufheben.

Nun addieren wir diese Zusatzkräfte zu \vec{F}_1 und \vec{F}_2 und erhalten die neuen Kräfte \vec{F}'_1 und \vec{F}'_2 . Diese beiden addiert ergeben den Vektor $\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 = \vec{OH}$. Dieser ist aber gerade gleich $-\vec{F}_3$. Somit herrscht dann Gleichgewicht.



Es gilt hier :

Dreieck AOC ist ähnlich zu EDA
Dreieck OBC ist ähnlich zu FGB

Ähnlich sind zwei Dreiecke dann, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen.

⇒ $\frac{a}{r_1} = \frac{F_1}{Z}$ und $\frac{a}{r_2} = \frac{F_2}{Z}$ oder auch $\frac{a}{r_1} : \frac{a}{r_2} = \frac{F_1}{Z} : \frac{F_2}{Z}$

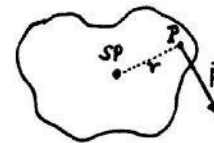
somit $\frac{a \cdot r_2}{a \cdot r_1} = \frac{F_1 \cdot Z}{F_2 \cdot Z} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow r_1 F_1 = r_2 F_2$

Das heißt also: Gleichgewicht herrscht dann, wenn $r_1 F_1 = r_2 F_2$ (falls nur diese drei Kräfte F_1, F_2, F_3 wirken)

allgemein nennen wir das Produkt $r \cdot F = M$ Drehmoment

Betrachten wir ein anderes Beispiel :

Wir nehmen einen starren Körper, der sich in Ruhe befindet (zum Beispiel befindet er sich schwerelos im Weltraum).



Nun greifen wir an einem Punkt P an und ziehen mit der Kraft \vec{F} daran. Um den Körper in Drehung zu versetzen ist es nötig, daß Punkt P nicht mit dem SP zusammenfällt, sondern daß er in einem Abstand - hier r - liegt.

Die Kraft, mit der man an P ziehen muß, um dem Körper eine bestimmte Winkelbeschleunigung $d\omega/dt$ zu verleihen, hängt von r ab. Je weiter außen sich P befindet (d.h. je größer r) desto kleiner muß F sein, um den gleichen Effekt (gleiche Winkelbeschleunigung) zu erreichen.

Somit kann man sagen : Wenn M eine Größe ist, die mit der Winkelbeschleunigung zusammenhängt, die aber auch so etwas wie

eine "Drehkraft" darstellt, dann gilt

$$M \sim F \quad \text{und} \quad M \sim r, \quad \text{wir sagen} \quad M = r \cdot F$$

Hier ist das Drehmoment nicht genau beschrieben. Denn :

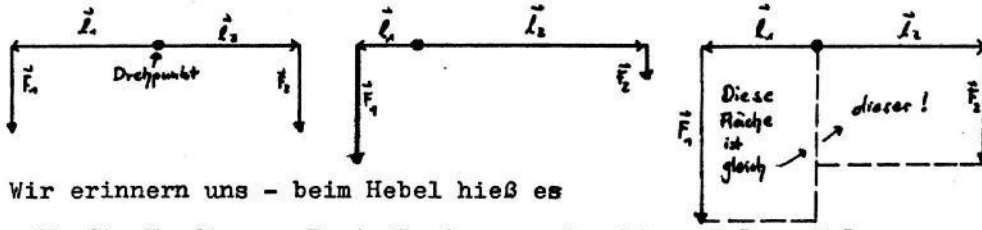
\vec{r} und \vec{F} sind Vektoren. Also ist M entweder das Skalar- oder das Vektorprodukt aus \vec{r} und \vec{F} .

Also was gilt? $\vec{r} \cdot \vec{F} = M$ oder $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$?

Überlegen wir uns das.

Das Drehmoment gibt uns an, wo eine Kraft ansetzt und wie groß sie ist, die den Körper um irgendeine Achse in Drehung versetzt. Wir nehmen an, daß das Drehmoment ein Vektor ist, denn es wirkt sich verschieden aus, wohin eine Kraft wirkt.

Betrachten wir uns dazu den sogenannten Hebel :



Wir erinnern uns - beim Hebel hieß es

$$\text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} = \text{Last} \cdot \text{Lastarm} \quad \text{oder hier} \quad F_1 l_1 = F_2 l_2$$

Bei den drei obigen Hebeln ist dieser in Ruhe, denn hier gilt auch (da $F \cdot l = M$) $M_1 = M_2$; also Gleichgewicht.

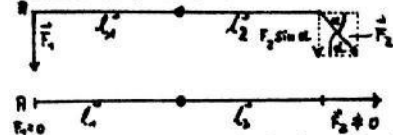
Wir sahen vorhin, daß Gleichgewicht bezüglich Rotation dann besteht wenn $r_1 F_1 + r_2 F_2 + r_3 F_3 + \dots + r_n F_n = 0$ oder $M_1 + \dots + M_n = 0$

(Wir hatten dies vorhin zwar nur für zwei Drehmomente gesehen aber es gilt auch für mehrere).

Sehen wir uns den ersten Hebel an :



Links der ist in Ruhe - klar. Aber was ist mit dem rechten? Wohin geht der Punkt A; bleibt er in Ruhe, geht er nach oben oder nach unten? Was zieht an der rechten Seite? Es zieht nur die Projektion von F_2^1 auf die Gewichtskrafttrichtung. Also so sieht das aus :



Beim Hebel darunter passiert nichts - Die Projektion von F_2 auf die Gewichtskrafttrichtung ist $= 0$.

Wir nahmen an, daß das Drehmoment ein Vektor des Betrages $r \cdot F$ ist,

also müßte es heißen :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$$

Somit definieren wir als

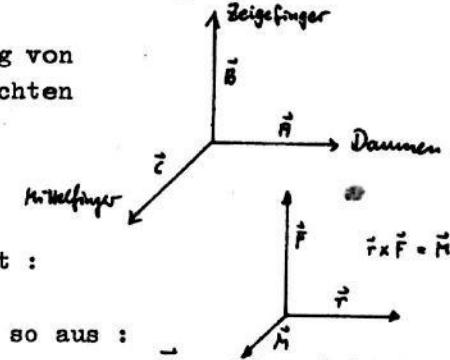
Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Erinnern wir uns :

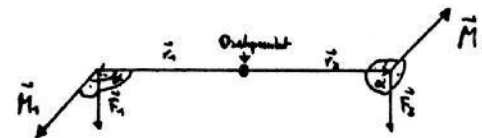
Wir sprachen ganz am Anfang von der Dreifingerregel der rechten Hand für Kreuzprodukte :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \quad \hat{=}$$



und hier für das Drehmoment :

An unserem Hebel sieht das so aus :



\vec{M}_2 geht nach hinten (in die Papierebene), \vec{M}_1 geht nach vorn. Der Betrag von beiden ist gleich, da $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$

$$\text{und } \alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ \implies |\vec{M}_1| = |\vec{M}_2| \quad \text{oder} \quad \vec{M}_1 = -\vec{M}_2$$

An unserem Hebel herrscht Gleichgewicht. Dies ist somit da der Fall, wo die Vektorsumme der Drehmomente $= 0$ ist.

Also $\sum_i \vec{M}_i = 0$ verhindert Rotationsbewegungen

$\sum_i \vec{F}_i = 0$ verhindert Translationsbewegungen

\implies

Gleichgewichtsbedingung starrer Körper

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_i \vec{F}_i = 0$$

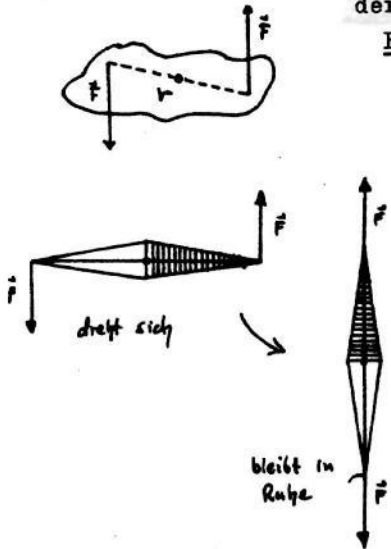
c) Kräftepaar

Zwei parallele, gleich große, aber entgegengerichtete Kräfte, deren Angriffspunkte nicht zusammenfallen, bilden ein Kräftepaar. Sie versetzen einen Körper in Rotation um den Mittelpunkt der Strecke \vec{r} .

Beispiel: Magnetnadel im Erdmagnetfeld

Die Magnetnadel bleibt translatorisch in Ruhe (der Kompaß bewegt sich nicht), dreht sich aber um ihren Aufhängepunkt. Hier handelt es sich um ein Kräftepaar. Die Nadel dreht sich so lange, bis das Kräftepaar am selben Punkt angreift (bzw. die rückwärtigen Verlängerungen der Kräfte), bis es sich also garnicht mehr um ein Kräftepaar handelt.

Auch hier gilt die Gleichgewichtsbedingung $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$



Kommen wir nun zu unserem Ausgangspunkt, dem Schwerpunkt zurück.

Damit der Hebel rechts in Ruhe ist muß gelten:

$$\vec{r}_1 \times \vec{G}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{G}_2 \quad \text{oder} \quad r_1 m_1 g = r_2 m_2 g$$

$$\text{also} \quad r_1 m_1 = r_2 m_2$$

Falls dies der Fall ist, so ist SP der Schwerpunkt (SP). Er teilt die Strecke AB im umgekehrten Verhältnis der Massen

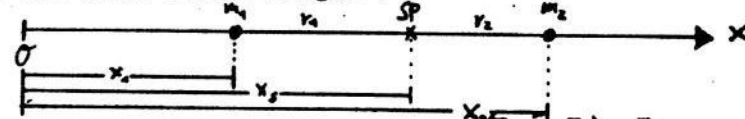
$$r_1 : r_2 = m_2 : m_1$$

Bestimmen wir nun den Ortsvektor, der vom Ursprung zum SP geht. STOP - Wozu eigentlich?

Nun - mit seiner Hilfe können wir die Translationsbewegungen des starren Körpers beschreiben! Ach so. Na gut.

Wir nehmen oben den Hebel zu Hilfe und suchen uns ein praktisches Koordinatensystem. Hier brauchen wir sogar nur eine Dimension, also nur eine Koordinatenachse, da beide Massen und

der SP auf einer Gerade liegen:



$$\text{Wie wir wissen gilt} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{x_S - x_1}{x_2 - x_S} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\text{oder} \quad (x_S - x_1)m_1 = (x_2 - x_S)m_2$$

$$x_S m_1 - x_1 m_1 = x_2 m_2 - x_S m_2 \quad \text{also} \quad x_S (m_1 + m_2) = x_2 m_2 + x_1 m_1$$

somit gilt für die Schwerpunktskoordinate x_S

$$x_S = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Falls wir nun viel mehr Massen m_i haben ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), die alle auf der x-Achse liegen, so gilt

$$x_S = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

Dies, wenn der SP und alle Massen auf der x-Achse liegen. Liegt nun der SP irgendwo im Raum, so gilt für die drei Koordinaten des Schwerpunktes

$$x_S = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad ; \quad y_S = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad ; \quad z_S = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

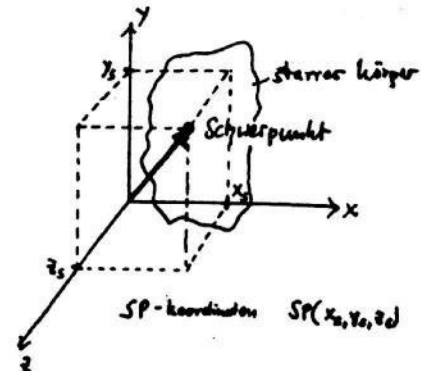
Koordinaten des Schwerpunktes

Dies sind dann gleichzeitig die Koordinaten des Ortsvektors \vec{r}_S .

Wir wollen dies etwas anders ausdrücken:

Nehmen wir an, wir haben einen homogenen Körper, d.h. er besteht überall aus dem gleichen Material bzw. überall herrscht gleiche Dichte. Dessen SP suchen wir.

Hier kurz ein Wort zur Dichte. Die Dichte gibt uns Auskunft darüber, wieviel Masse ein bestimmtes Volumen eines Stoffes hat.



$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$$

$$\text{Also} \quad \rho = \frac{m}{V} \quad \text{Einheit} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad \text{Dichte}$$

Jeder Stoff hat eine ganz bestimmte Dichte (die allerdings temperaturabhängig ist). So ist z.B. die Dichte des Wassers

$$\rho_{H_2O} = 0,9907 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \quad \text{oder} \quad \rho_{Eisen} = 7,86 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

Wir können somit auch sagen $m = V \cdot \rho$

$$\Rightarrow \bar{x}_s = \frac{\sum V_i \rho x_i}{\sum V_i \rho} = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i} = \frac{\sum x_i V_i}{V}$$

Hier ist V_i ein kleines Teilvolumen. Alle Teilvolumen V_i zusammenaddiert ergeben das gesamte Volumen des Körpers V . Im Zähler der x -Koordinate bleibt das Teilvolumen V_i stehen. Zur Berechnung von $\vec{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$ muß von jedem Teilvolumen V_i die Lage des SP bekannt sein. Ist dies nicht möglich, müssen wir die kleinen Teilvolumina $V_i \rightarrow 0$ gehen lassen, d.h. wir machen aus der Summation eine (viel genauere) Integration:

$$\sum_i x_i V_i \rightarrow \int x dV$$

Insgesamt ergeben sich die Koordinaten des Schwerpunktes zu

$$\bar{x}_s = \frac{1}{V} \int x dV \quad \bar{y}_s = \frac{1}{V} \int y \cdot dV \quad \bar{z}_s = \frac{1}{V} \int z \cdot dV$$

Gleichgewichtsarten

Vorhin untersuchten wir die Bedingungen, unter denen ein starrer Körper im Gleichgewicht ist. Nun gibt es aber mehrere Gleichgewichtsarten. Zwar ist der betreffende Körper bei jeder Art im Gleichgewicht, aber dieses Gleichgewicht ist verschieden stabil:

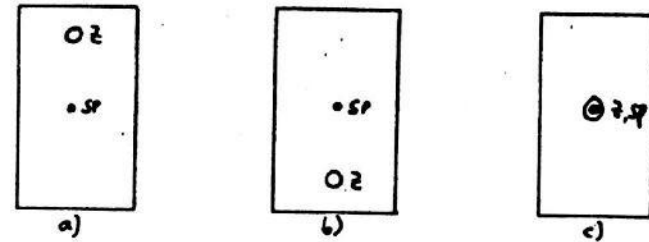
Wir nehmen ein Holzstück und bohren ein Loch hinein. Dieses stecken wir auf einen fest angebrachten Zapfen Z. Bald stellen wir fest, daß es Unterschiede im Gleichgewicht gibt, je nachdem wo wir das Loch gebohrt haben.



Wir unterscheiden:

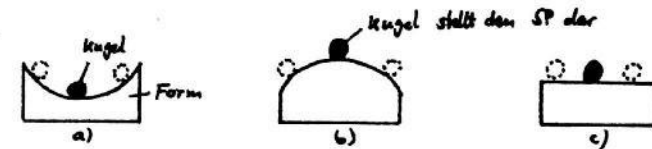
- Der Aufhängepunkt befindet sich genau über dem SP.
- Der Aufhängepunkt befindet sich genau unter dem SP.
- Aufhängepunkt und SP fallen zusammen.

im Bild :



Was geschieht, wenn wir unser Holzstück leicht anschubsen? Bei a) pendelt es ein wenig und kehrt bald in die gleiche Gleichgewichtslage zurück. Bei b) bewegt sich der SP um dem Aufhängepunkt herum, bis er genau darunterliegt, nach kurzem Pendeln kommt das Holzstück auch hier zur Ruhe, aber in einer anderen Lage als vorher. Und bei c) kann man schubsen wie man will, das Stück kann in jeder möglichen Lage im Gleichgewicht sein.

Unserem Holzstück von eben können wir auch folgendes Analogon gegenüberstellen:



Was haben nun beide gemeinsam ?

- Bei a) hebt sich bei einer Bewegung der Schwerpunkt
 bei b) senkt sich bei einer Bewegung der Schwerpunkt
 bei c) bleibt der Schwerpunkt bei einer Bewegung auf gleicher Höhe.

- Wir nennen a) stabiles Gleichgewicht
 b) labiles Gleichgewicht
 c) indifferentes Gleichgewicht.

Wollen wir uns nun die Drehbewegungen genauer ansehen, und dabei ähnlich wie in Kapitel I. (Mechanik des Massenpunktes) vorgehen.

Dazu sollten wir uns aber noch einmal kurz das Kapitel I.3. über die Kreisbewegungen ins Gedächtnis zurückrufen, da wir von dort einige Definitionen brauchen werden.

2. Arbeit, Leistung

In einem früheren Kapitel sprachen wir über Arbeit, die nötig ist, einen Körper zu bewegen, zu verformen, anzuheben, oder sonstwie zu bewegen. Wir fanden, daß die Arbeit war

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Wenn wir somit einen Körper, oder ein Teil davon um die Strecke $d\vec{s}$ verschieben und es wirkt die Kraft \vec{F} auf ihn, so müssen wir Arbeit hereinstecken, oder es wird welche frei, je nachdem ob W positiv oder negativ ist.

Es ist anzunehmen, daß man auch Arbeit leisten muß, um eine Masse in Drehung zu versetzen. Man brauche sich nur die großen Motoren anzusehen, die Karusells in Drehung versetzen. Wie wenden wir nun aber $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ an? Wo haben wir hier \vec{F} , und was ist bei der Drehung $d\vec{s}$?

Das Analogon bei der Drehung zur Kraft war das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Eine Kraft \vec{F} setzt an einem Punkt an, der um den Vektor \vec{r} vom Drehpunkt entfernt ist.

Wir stellen uns die Sache so vor: Um einen starren Körper in Drehung zu versetzen, greifen wir an einem Punkt an und lassen dort die Kraft \vec{F} wirken. Dann bewegt sich dieser Punkt. Bei der Kreisbewegung definierten wir eine Geschwindigkeit ω , die angab um welchen Winkel pro Zeit ein Massenpunkt auf einer Kreisbahn bewegt wurde. Der Massenpunkt legt dann (falls φ bekannt ist) die Strecke $s = \varphi \cdot r$ zurück. Wieso?

Nun - einmal erinnern wir uns, daß wir bei der Kreisbewegung fanden

$$v = r \cdot \omega \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad ds = r \cdot d\varphi$$

(Genaugenommen stimmt $s = r \cdot \varphi$ nur für kleine Winkel, da man nur bei kleinen Winkeln das Bogenstück s einem geraden Stück annähern kann).

Exakt stimmt $ds = r \cdot d\varphi$, denn die infinitesimale Strecke ds kann gebogen oder gerade sein.

Zurück zur Arbeit: Wir machen eine Annahme. Es sei \vec{r} senkrecht zu \vec{F} , das heißt $\sin(\vec{r}; \vec{F})$ (= sinus des zwischen \vec{r} und \vec{F} eingeschlossenen Winkels) $\sin(\vec{r}; \vec{F}) = 1$ also

$$|\vec{M}| = F \cdot r \cdot \sin 90^\circ = F \cdot r \quad \Rightarrow \quad F = \frac{M}{r}$$

Für ds hatten wir $ds = r \cdot d\varphi$.

Das alles setzen wir jetzt in $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ein

$$\Rightarrow W = \int F \cdot ds = \int \frac{M}{r} \cdot r \cdot d\varphi = \int M \cdot d\varphi$$

Wir haben aus einem Integral $\int \dots ds$ mit den Grenzen s_1 und s_2 ein Integral $\int \dots d\varphi$ gemacht. Dies hat natürlich nicht mehr die Grenzen s_1 und s_2 , da wir nun über einen Winkel (φ) integrieren. Also müssen wir nun auch Winkel als Grenzen einsetzen. Wir nehmen hier ganz analog φ_1 und φ_2 .

Also: Wenn man einen starren Körper vom Winkel φ_1 zum Winkel φ_2 dreht und dabei das Drehmoment M wirken läßt, so leistet (bzw. erhält) man die Arbeit W

Rotationsarbeit

= Drehmoment x Drehwinkel

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \, d\varphi$$

Bei den Translationsbewegungen besprachen wir nach der Arbeit die Energie (die man als Fähigkeit, Arbeit zu speichern bezeichnen kann). Das wollen wir hier nicht tun.

Die Rotationsenergie besprechen wir etwas später - nur Geduld! Wir brauchen hämlich noch eine Größe, die bei der Rotation unserer Masse bei den Translationen entspricht. Diese haben wir noch nicht, deshalb stellen wir die Rotationsenergie noch etwas zurück

Aber von der Rotationsleistung können wir sprechen, da hier außer der Rotationsarbeit nur die Zeit eingeht, die für die Beschreibung der Translations- wie der Rotationsbewegungen die gleiche ist.

Wir wissen $\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Arbeitszeit}}$ oder $P = \dot{W} = \frac{dW}{dt}$

bei der Rotation also $P = \dot{W} = M \frac{d\varphi}{dt} = M \cdot \omega$

Rotationsleistung

= Momen tandrehmoment x Momentanwinkelgeschw.

$$P = M \cdot \omega$$

Für das nächste Kapitel brauchen wir einige Begriffe, die wir bei der Kreisbewegung erörtert haben.

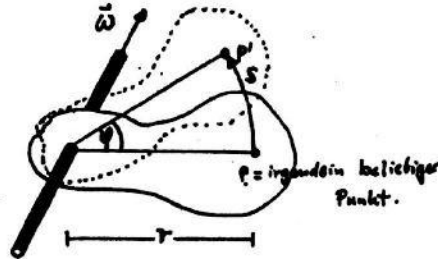
Bei der Kreisbewegung bewegte sich ein Massenpunkt auf einer

Kreisbahn. Was soll das nun mit der Rotation des starren Körpers zu tun haben?

Wir können uns den starren Körper als Menge von sehr vielen Massepunkten (z.B. Moleküle) vorstellen. Dreht sich nun dieser Körper um eine Achse, so führt jeder seiner Massepunkte eine Kreisbewegung durch.

Diese verläuft in einer Ebene senkrecht zur Drehachse.

Aus diesem Grunde können wir die erarbeiteten Begriffe der Kreisbewegung übernehmen, die da waren :



$$|\vec{s}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{\varphi}| \quad \text{Bahnlänge}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{s}} = \frac{d}{dt} (r \cdot \vec{\varphi}) = r \cdot \dot{\vec{\varphi}} = r \cdot \vec{\omega} \quad \text{Bahngeschwindigkeit}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \ddot{\vec{s}} = \frac{d^2}{dt^2} (r \cdot \vec{\varphi}) = r \cdot \ddot{\vec{\varphi}} = r \cdot \dot{\vec{\omega}} \quad \text{Bahnbeschleunigung}$$

oder

$$\varphi = \frac{s}{r}, \quad \omega = \frac{v}{r}$$

3. Drehbewegungen

a) gleichförmige Rotation

Hier gilt im Prinzip das gleiche wie bei der gleichförmigen Translation: Gleichförmig bedeutet - Geschwindigkeit ist konstant. Also hier bei der Rotation: Winkelgeschwindigkeit = ω konstant, $\omega = \text{const.}$

Also $\varphi = \omega \cdot t$

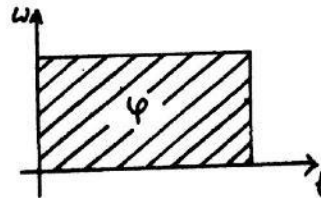
zur Wiederholung: $\omega = 2\pi\nu$, ν = Frequenz

$$[\omega] = \frac{1}{\text{sec}} = \text{Hz}$$

$T = \frac{1}{\nu}$ Zeit für eine Umdrehung

$$\text{Umlauffrequenz} = \nu = \frac{\text{Anzahl der Umdrehungen}}{\text{benötigte Zeit}} = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$$

(bedenke Unterschied zwischen t und T)



bzw. da $N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\text{gedrehter Winkel}}{360^\circ}$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{also} \quad \omega = 2\pi\nu$$

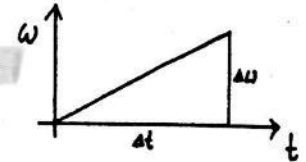
b) gleichmäßig beschleunigte Rotation

Auch die gleichmäßig beschleunigte Rotation entspricht formal der gleichmäßig beschleunigten Translation.

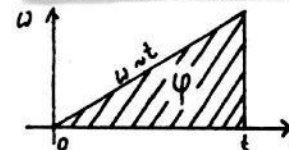
Ich gebe hier nur die Diagramme und die zugehörigen Formeln an - zum Vergleich die entsprechenden der Translation in Klammern

gleichmäßig beschleunigte Rotation

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{const.}$$



- OHNE ANFANGSGESCHWINDIGKEIT

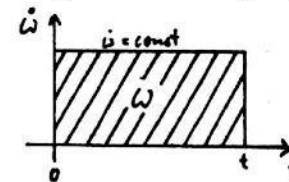


$$\varphi = \frac{\omega t}{2}$$

$$\varphi = \frac{\dot{\omega} t^2}{2}$$

$$(s = \frac{v t}{2})$$

$$(s = \frac{a t^2}{2})$$



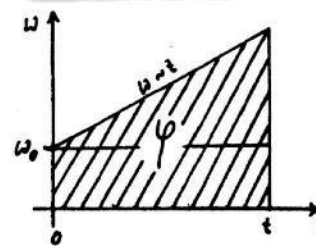
$$\omega = \dot{\omega} \cdot t$$

$$\omega = \sqrt{2 \dot{\omega} \varphi}$$

$$(v = a \cdot t)$$

$$(v = \sqrt{2as})$$

- MIT ANFANGSGESCHWINDIGKEIT (ω_0)

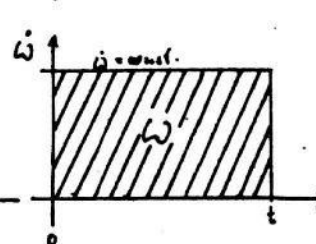


$$\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\dot{\omega} t^2}{2}$$

$$(s = \frac{v_0 + v}{2} t)$$

$$(s = v_0 t + \frac{a t^2}{2})$$



$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega} t$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2 \dot{\omega} \varphi}$$

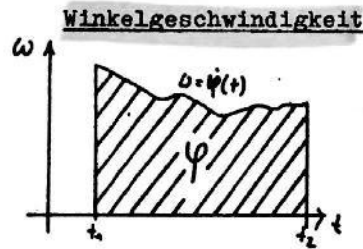
$$(v = v_0 + a t)$$

$$(v = \sqrt{v_0^2 + 2as})$$

allgemein gilt für jede Rotationsbewegung

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \implies \varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega \cdot dt$$

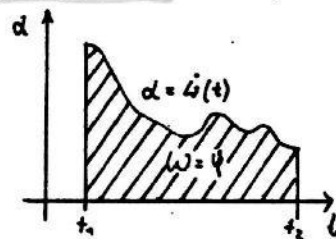
$$(v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \implies s = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt)$$



und mit $\alpha \equiv \dot{\omega}$ gilt für die Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \implies \omega = \int_{t_1}^{t_2} \alpha \cdot dt$$

$$(a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \implies v = \int_{t_1}^{t_2} a \cdot dt)$$



4. Kräfte bei der Rotation, Scheinkräfte

a) Zentripetalkraft

Bei der Besprechung der Kreisbewegung hatten wir die Radialbeschleunigung definiert und berechnet. Das war die Beschleunigung die den Massenpunkt zum Mittelpunkt hin beschleunigt hat, und aus der die Kreisbewegung überhaupt erst folgt.

Wir bestimmen nun diese Radialbeschleunigung noch einmal, auf eine etwas andere Art.

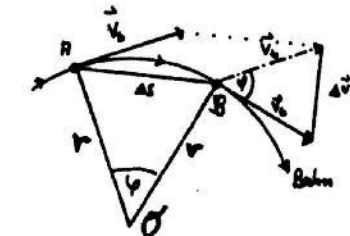
Zur Erinnerung :

für ein kleines Intervall Δt gilt

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{\Delta v}{v_b} \text{ da } \Delta s = v_b \cdot \Delta t$$

$$\text{denn } v_b = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\implies \frac{\Delta v}{v_b} = \frac{v_b \cdot \Delta t}{r} \text{ oder } \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_b^2}{r}$$



mit $v = \dot{s} = \dot{\varphi} r = \omega r$ bzw. $s = \varphi \cdot r$ und $\dot{s} = \dot{\varphi} \cdot r \implies$

$$\implies \vec{a}_r = \frac{v_b^2}{r} = \omega^2 r$$

vektoriell exakt müssen wir die Richtungen berücksichtigen. Da normalerweise r von innen nach außen definiert ist, und a_r von außen nach innen wirkt, gilt

$$\vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r}$$

So hatten wir a_r damals bei der Kreisbeschleunigung, im Rahmen der Kreisbewegung bestimmt.

Jetzt wollen wir einen anderen Weg beschreiten: Wir gehen von den Koordinaten aus, die ein Punkt P auf einer Kreisbahn hat.

$$x_p = r \cdot \cos \varphi$$

$$y_p = r \cdot \sin \varphi$$

oder, da $\varphi = \omega t$

$$x = r \cdot \cos \omega t$$

$$y = r \cdot \sin \omega t$$

Jetzt berechnen wir die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes P, und zwar, indem wir die Koordinaten einfach ableiten:

$$\dot{x} = -\omega r \cdot \sin \omega t$$

$$\dot{y} = \omega r \cdot \cos \omega t$$

\dot{x} und \dot{y} sind die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors.

$$\implies \ddot{x} = -\omega^2 r \cos \omega t \text{ und } \ddot{y} = -\omega^2 r \sin \omega t$$

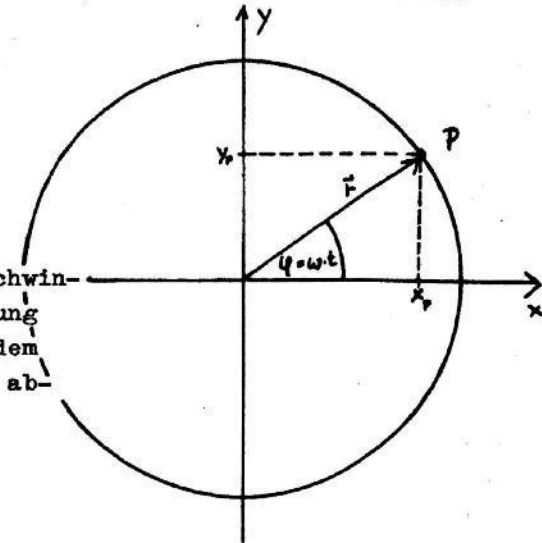
Bei jeder Koordinate haben wir ein negatives Vorzeichen. Das bedeutet auch, daß die Richtung entgegengesetzt der des Radius \vec{r} ist.

Wir berechnen nun den Betrag von $|\vec{a}_r| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

$$\text{also } a_r = \sqrt{\omega^4 r^2 \cos^2 \omega t + \omega^4 r^2 \sin^2 \omega t}$$

$$a_r = \sqrt{\omega^4 r^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)} = \sqrt{\omega^4 r^2} = \omega^2 \cdot r$$

also $a_r = \omega^2 \cdot r$ aha! Das hatten wir ja auch vorhin schon.



Wir kennen das Newtonsche Gesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Das bedeutet, daß eine Kraft \vec{F} eine Masse m mit der Beschleunigung \vec{a} beschleunigt. Anders herum gilt auch, daß auf eine Masse, die um \vec{a} beschleunigt wird, eine Kraft \vec{F} wirken muß. Auch bei unserer Kreisbeschleunigung \vec{a}_r muß eine Kraft die Ursache sein. Diese Kraft \vec{F}_r (die wir auch Zentripetalkraft nennen), die dafür verantwortlich ist, daß der Massenpunkt auf der Kreisbahn bleibt, hat die Größe :

$$\vec{F}_r = m \cdot \vec{a}_r = - m \omega^2 \vec{r} \quad \text{also}$$

$$\vec{F}_r = - m \omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{F}_r = - \frac{mv^2}{r} \cdot \vec{r}^0$$

Falls nur sie wirken würde (als einzige Kraft), würde der Massenpunkt ins Innere fliegen. Sie wird also durch eine Kraft kompensiert, für die gilt :

$\vec{F}_z = - \vec{F}_r$ (wie wir schon wissen nennen wir diese Zentrifugalkraft).

$$\vec{F}_z = m \omega^2 \vec{r} = \frac{mv^2}{r} \cdot \vec{r}^0$$

Warum haben wir das eben noch einmal berechnet, oder auch : Warum müssen wir das noch einmal aufwärmen ?

Nun - wenn ein starrer Körper rotiert, der ja aus vielen kleinen Massenelementen zusammengesetzt ist, so gelten für jedes dieser Massenelemente das oben gesagte. Es gibt also auch beim starren Körper Radialbeschleunigung, Zentrifugal- und Zentripetalkraft. Wir wollen aber auf etwas anderes hinaus :

Wir kennen das Newtonsche Gesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Dieses ist nicht immer und überall gültig - oha !

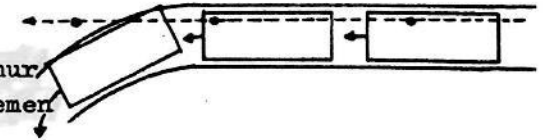
Nein - dieses Gesetz gilt nur in Systemen, die selbst unbeschleunigt sind. Solche Systeme wollen wir Inertialsysteme nennen. Ein solches System ruht also entweder, oder es bewegt sich gleichförmig, also unbeschleunigt.

Betrachten wir dazu ein Beispiel :

Ein Inertialsystem ist zum Beispiel ein Zug, der gerade und mit konstanter Geschwindigkeit fährt. Dort gilt $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Nun soll sich unser Zug um eine scharfe Kurve bewegen. Das heißt - selbst wenn er seine Geschwindigkeit beibehält - ist er beschleunigt, denn er ändert seine Richtung. Damit ist er kein Inertialsystem mehr. Das kann man selbst probieren,

nämlich dann, wenn man sich nicht festhält. Ein Fahrgast, er ist in der Zeichnung von oben (als schwarzer Punkt) gekennzeichnet, wird nach rechts beschleunigt (hier verläßt er leider das Abteil durch das Waggonfenster). Welche Kraft bewirkt dieses? Eine echte Kraft ist das nicht. Im bewegten, beschleunigten System treten Kräfte auf, die nur durch die Beschleunigung des System zu erklären sind. Solche Kräfte nennen wir Scheinkräfte. Die Mitreisenden, die sich krampfhaft im Abteil festklammern, merken diese Kraft auch. Ruhende Beobachter merken von dieser Kraft nichts. Sie mögen sich über einen - während der Fahrt aussteigenden - Bahnreisenden wundern, aber auch sie haben eine Erklärung parat : Nach dem ersten Newton'schen Axiom, versuchen alle Körper in einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung zu verharren. Dies tat auch der unglückliche Fahrgast, während der Zug auf einer gekrümmten Bahn davonfuhr.

Generell sagen wir : Scheinkräfte sind solche, die man nur in beschleunigten Bezugssystemen verspürt.

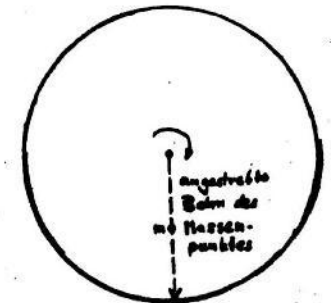


Eine hatten wir schon besprochen - die Zentrifugalkraft.

Nämlich - ein Großteil aller beschleunigten Systeme sind Rotationen. Das beste Beispiel ist unsere eigene Erde. Auch hier wirkt eine Zentrifugalkraft nach außen - am Äquator ist die Gewichtskraft kleiner (da ein Teil von ihr durch die Zentrifugalkraft kompensiert wird) als an den Polen, wo die Zentrifugalkraft = 0 ist. Es gibt noch eine weitere Scheinkraft, die man an der Erde besonders deutlich sehen kann:

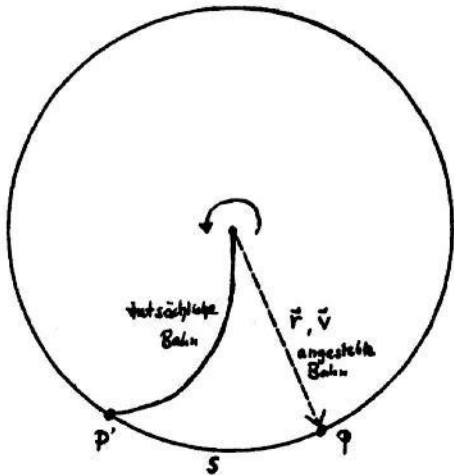
b) Coriolis - Kraft

Wir stellen uns nun - als rotierendes Bezugssystem - eine sich drehende Scheibe (: Karussellplattform oder Schallplattenteller) vor. Darauf soll sich nun ein Massenpunkt von innen nach außen bewegen. Zu seiner Geschwindigkeit dazu kommt nun noch ein Geschwindigkeitsbeitrag der rotierenden Scheibe. Die Bahngeschwindigkeit des Massenpunktes (die im Mittelpunkt = 0 war)



nimmt von innen nach außen zu.

Was bedeutet nun eine sich zeitlich ändernde Geschwindigkeit? Das ist eine Beschleunigung. Und zwar eine Tangentialbeschleunigung (denn auch der Geschwindigkeitsvektor, damit auch $\frac{d\vec{v}}{dt}$ verlaufen tangential).



Der Körper lege in der Zeit t die Strecke r zurück, also die Strecke vom Mittelpunkt zum Punkt P auf der Peripherie. Tatsächlich aber kommt er in P' an. Zum Durchlaufen der Strecke r braucht er die Zeit

$$t = \frac{r}{v}, \text{ wenn } v \text{ seine Geschwindigkeit ist.}$$

Während dieser Zeit rollt nicht nur der Körper nach außen - auch der Punkt P verlagert sich, durch die Rotation!

Und zwar legt der Punkt P die Strecke $s = \omega \cdot r \cdot t$ zurück, da $s = v \cdot t = r \omega \cdot t$

Da es sich hierbei um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt, können wir ansetzen

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \text{ (Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit der Beschleunigung } a, \text{ die eine Zeit } t \text{ andauert, legt ein Massenpunkt die Strecke } S = 1/2 \cdot a \cdot t^2 \text{ zurück).}$$

Punkt P verlagert sich nach P' um s . Somit können wir die Beschleunigung berechnen. Da die Zeit ($P \rightarrow P'$) ist $t = \frac{r}{v} \Rightarrow$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{r^2}{v^2} \text{ und das ist auch gleich } s = r \omega t = r \omega \cdot \frac{r}{v}$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{r^2}{v^2} = \omega \cdot \frac{r^2}{v} \Rightarrow a = \frac{\omega \cdot v^2 \cdot 2}{v} = 2\omega v$$

Also - der Massenpunkt wird bei seiner Bewegung mit $a_c = 2\omega v$ beschleunigt. Dies ist die sogenannte

Coriolis - Beschleunigung

$$a_c = 2\omega v$$

durch die der Massenpunkt (bzw. Körper) von seiner ursprünglichen Bahn abgelenkt wird, wenn er sich in einem rotierenden Bezugssystem befindet. Die Ursache dieser Beschleunigung muß nach Newton eine Kraft sein. Diese nennen wir

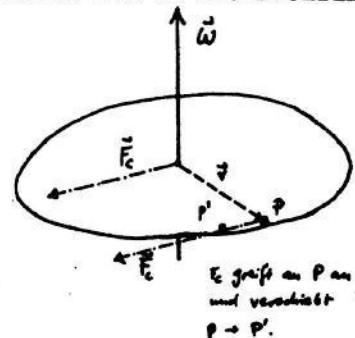
Coriolis - Kraft

$$F_c = 2 m \omega v$$

Wir haben hier allerdings lediglich die Beträge der Coriolis-Kraft, bzw. - Beschleunigung hergeleitet.

Exakt gilt: $\vec{F}_c = 2m \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega})$

Dies ist auch ziemlich einsichtig. Denken wir an die Breifingerregel der rechten Hand und sehen wir uns die rotierende Scheibe mehr von der Seite an. Dann sehen wir, daß die Coriolis - Kraft senkrecht auf $\vec{\omega}$ und \vec{v} steht,



Ein kleines Beispiel soll uns die Wirkung der Coriolis - Kraft besser verdeutlichen:

Bewegt sich auf der Erdoberfläche eine Masse (D-Zug, Flußwasser oder Luftmassen) so, daß sich ihr Abstand R von der Erdachse verändert, tritt die Coriolis-Kraft auf.

Ein Fluß, der auf der Nordhalbkugel mit der Geschwindigkeit \vec{v} nach Norden fließt, wird durch die Coriolis - Kraft

$$|\vec{F}_c| = 2mvv \sin(\vec{v}; \vec{\omega}) \text{ nach Osten (bzw. nach rechts) abgelenkt.}$$

Wie aus der nebenstehenden Zeichnung zu ersehen ist, ist der Winkel $(\vec{v}; \vec{\omega})$ gleich dem Winkel des Breitengrades.

Zahlenbeispiel

Wie groß ist die Corioliskraft, die den Rhein bei Mainz (50° n. Br.), der dort von Süd nach Nord fließt (mit einer Fließgeschwindigkeit von 5 km/h), ablenkt?

$$F_c = 2m\omega v \cdot \sin 50^\circ = 2 \cdot (1\text{kg}) \cdot v \cdot \omega \cdot 0,766$$

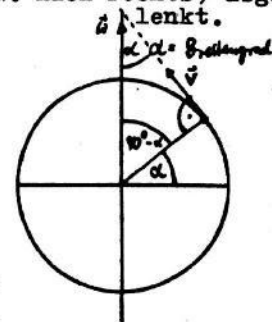
Wir berechnen hier F_c , die auf 1 kg des Flußwassers wirkt.

$$v = 5 \text{ km/h} = 1,38 \text{ m/sec} ; \omega = 1 \text{ Umdr./24 Stunden}$$

$$\omega = \frac{1}{86400} \frac{1}{\text{sec}} = 1,15 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{sec}}$$

$$F_c = 2 \cdot 1 \cdot 1,38 \cdot 1,15 \cdot 10^{-5} \cdot 0,766 = 2,447 \cdot 10^{-5} \text{ N (Newton)}$$

Das ist natürlich nur eine ganz minimale Abweichung, aber schon bei einem Flugzeug mit großer Masse und großer Geschwindigkeit ergeben sich Werte in der Größenordnung 1000 N .



5) Dynamisches Grundgesetz der Rotation

a) Massenträgheitsmoment

Schon bei der Besprechung der Translationen hatten wir ein solch fundamentales Grundgesetz. Es war dies das Newton'sche Gesetz oder das 2. Newton'sche Axiom.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Nun wollen wir uns ein solches auch für das Gebiet der Rotationen herleiten.

Bislang haben wir schon gemerkt, daß es sehr viele Analogien zwischen den Größen der Translation und denen der Rotation gibt. So entspricht zum Beispiel der linearen Geschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit, der linearen Beschleunigung die Winkelbeschleunigung, der Kraft das Drehmoment usw.

Wir können nun versuchen, das Newton'sche Gesetz einfach ins "Rotierende" zu übersetzen. Versuchen wir's :

Kraft \vec{F} \rightarrow Drehmoment \vec{M}

Beschleunigung \vec{a} \rightarrow Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$

Für die Masse kennen wir keine Entsprechung. Also versuchen wir es einmal ohne solch eine :

Gilt $\vec{M} = m \cdot \vec{\alpha}$? Wir machen eine Probe mit den Einheiten
 $Nm = kg \cdot \frac{1}{sec^2}$ da $Nm = \frac{kgm^2}{sec^2} \Rightarrow$ auf der rechten Seite fehlt ein m^2

Also kann unsere Überlegung nicht stimmen. Was tun?

Zunächst wollen wir uns überlegen, ob die Größen M und α richtig gewählt sind.

Newton : Unter der Wirkung einer Kraft erfährt ein Körper der Masse m eine Beschleunigung \vec{a} - Gut!

Rotation: Unter der Wirkung eines Drehmomentes erfährt ein drehbarer Körper eine Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$.

Das stimmt wohl. Nun müssen wir nur noch herausfinden, welche Größe den Drehbaren Körper beschreibt. Für den linear bewegten Körper war das seine Masse m . Hier brauchen wir etwas Ähnliches. Eine Größe, die die Einheit $kg \cdot m^2$ haben muß, denn

$Nm = \frac{kgm^2}{sec^2} = ? \cdot \frac{1}{sec^2}$. Aber was für eine Größe soll das sein, in der eine Masse (kg) und eine Länge

(quadratisch) enthalten ist?

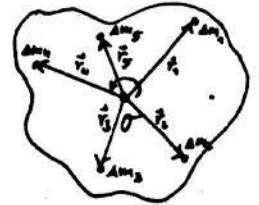
Wir versuchen eine Herleitung .

Wir betrachten dazu einen starren Körper, der aus vielen kleinen Massenelementen Δm_i besteht. Nun soll an diesem starren Körper ein Drehmoment angreifen. Auch das können wir aufteilen, indem wir sagen: das Gesamtdrehmoment M besteht aus vielen Einzeldrehmomenten M_i , die jeweils auf die zugehörigen Massenelemente Δm_i wirken sollen.

Somit $M = \sum_i M_i$ und $m = \sum_i m_i$ (Gesamtdrehmoment und Gesamtmasse)

$$\text{Also } M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i$$

$$\text{und } M = F_1 r_1 + F_2 r_2 + \dots + F_n r_n = \sum_{i=1}^n F_i r_i$$



Jetzt ersetzen wir einfach Kräfte durch das Newton'sche Gesetz : $F = m \cdot a$, hier $F_i = \Delta m_i a_i$

Die Winkelbeschleunigung ist definiert als $\vec{\alpha}$. Es ist $v = r \omega$

$$\text{Also } \dot{v} = a = r \dot{\omega} = r \alpha \Rightarrow F_i = \Delta m_i a_i = \Delta m_i r_i \alpha_i$$

Dies setzen wir ein

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n F_i r_i = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i \alpha_i \cdot r_i$$

Wir stellten bei der Einführung der Winkelgeschwindigkeit fest, daß bei einem starren Körper die Winkelgeschwindigkeit überall die gleiche ist, egal, wie weit ein Massenelement von der Drehachse entfernt ist. Da $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$ gilt dies auch für die Winkelbeschleunigung. Auch sie ist unabhängig davon, wie weit ein Massenelement Δm_i von der Drehachse entfernt ist.

Deshalb können wir den Index i von α weglassen (da alle α_i gleich sind) und können das α vor die Summation ziehen :

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m_i = \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m_i \cdot \alpha = J \cdot \alpha$$

J ist die Größe, nach der wir gesucht haben.

$$J = \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m_i$$

wir nennen sie Massenträgheitsmoment oder auch einfach Trägheitsmoment.

Jetzt haben wir den gesuchten Zusammenhang, das Dynamische

Grundgesetz der Rotation

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}$$

$\vec{\alpha}$ und \vec{M} haben vektoriell die gleiche Richtung.

Wollen wir uns zunächst etwas eingehender mit dem Massenträgheitsmoment befassen.

Das Massenträgheitsmoment gibt uns die Massenverteilung eines starren Körpers bezüglich der Drehachse an. Wenn man also das Trägheitsmoment irgend eines starren Körpers angibt, gehört zu dieser Angabe notgedrungen die Angabe der Drehachse dazu!

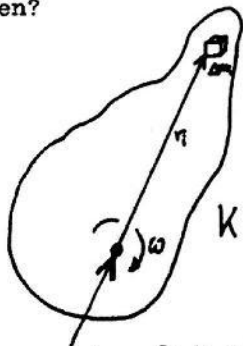
Das Trägheitsmoment ist das Verhältnis von wirkendem Drehmoment zu erzielter Winkelbeschleunigung. Das heißt: je größer M, desto größer J, wenn es zur gleichen Winkelbeschleunigung führt. Somit ist das Massenträgheitsmoment des starren Körpers ein Maß für die Trägheit des Körpers bezüglich Rotationen. Ganz analog dazu ist ja auch die Masse bei linearen Bewegungen ein Maß für die Trägheit bezüglich der Bewegung.

b) Rotationsenergie

Hier wollen wir nun eine etwas andere Art der Einführung des Massenträgheitsmomentes versuchen - und zwar wollen wir den Weg über die Energie wählen - ein Weg, übrigens, der sehr oft zum Ziel führt.

Um eine Masse m auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen, braucht man eine bestimmte Energie, die man als kinetische Energie der Masse m gibt. $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$.

Nun fragen wir: Wir wollen einem starren Körper die Winkelgeschwindigkeit ω verleihen. Welche Energie müssen wir aufwenden?



Um diesen Punkt soll sich K drehen

Der Körper K besteht aus vielen kleinen Volumina der Massen Δm_1 , die im Abstand r_1 vom Ursprung (das soll in unserem Fall der Drehpunkt sein, bzw. wir legen uns das Koordinatensystem so, daß der Drehpunkt im Ursprung liegt) entfernt sind. Jedes einzelne Massenelement Δm_1 erhält eine bestimmte kinetische Energie

$$E_1 = \frac{1}{2} \Delta m_1 \cdot v_1^2$$

Jetzt hat jedes Massenelement eine etwas andere Bahngeschwindigkeit v_1 . Wenn wir nun die Bahngeschwindigkeiten durch die (überall gleiche) Winkelgeschwindigkeit ersetzen, so können wir die Einzelenergien E_1 zur Gesamtenergie addieren:

46

(Nochmals ganz kurz: Wieso ist die Winkelgeschwindigkeit jedes einzelnen Massenelementes Δm_1 gleich?

Nun - Jedes dieser Massenelemente braucht für eine ganze Umdrehung um die Drehachse die gleiche Umlaufzeit T, wie alle anderen auch, und da $\omega = 2\pi \frac{1}{T}$, ist ω für alle Δm_1 gleich.)

Wie hängen Bahn- und Winkelgeschwindigkeit noch zusammen?

Es war $v = \omega \cdot r$, bzw. $v_1 = \omega \cdot r_1$.

$$\text{Also } E_1 = \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \Delta m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \Delta m_1 r_1^2$$

Damit gilt für die Gesamtenergie des starren Körpers

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \omega^2 \Delta m_i r_i^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i r_i^2}_{J} = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot J$$

Also auch hier geht die Masseverteilung des starren Körpers, also das Massenträgheitsmoment in die Rechnung mit ein.

$$\Rightarrow E_{kin,rot} = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot J$$

Bei der Translationsbewegung hatten wir für die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

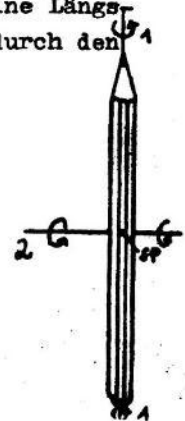
Wir sehen wieder die Analogie:

$$\omega \hat{=} v \quad \text{und} \quad J \hat{=} m$$

Die Rotationsbewegungen sind allerdings schwieriger zu beschreiben da im Trägheitsmoment nicht nur die Gesamtmasse $m = \sum m_i$, sondern auch die Verteilung der einzelnen Massenelemente (bzgl. der Drehachse) eingeht.

Lassen wir zum Beispiel ein Bleistift statt um seine Längsachse (1) um die dazu senkrecht stehende Achse (2) (durch den Schwerpunkt) rotieren, so liegen die meisten Masseteilchen Δm_1 weiter von der Drehachse entfernt als bei Achse (1) und haben deshalb bei gleicher Winkelgeschwindigkeit größere Translationsgeschwindigkeit $v_1 = \omega \cdot r_1$. Die Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$

ist deshalb im zweiten Fall rund 200 mal so groß da J dort sehr viel größer wird.



Nun wollen wir einige Trägheitsmomente berechnen. Wie wir sahen war

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2$$

Wir müssen von dem Körper, dessen Trägheitsmoment wir ermitteln wollen, kleine Masseteilchen Δm_i bestimmen und ihre Entfernung zur Drehachse r_i berechnen. Dann alles aufaddieren und - fertig !

Allerdings ist dies viel leichter gesagt als getan. Angenommen ein Masseteilchen Δm_i habe Würfelgestalt. An welcher Ecke soll der Vektorpfeil von \vec{r}_i sitzen. Ist das egal ? Nein - egal ist das nicht - es wird jedem einleuchten, daß der Fehler umso größer wird, je größer unser Δm_i ist. Wir müssen also - um genau zu sein - Δm_i besonders klein machen. Und wie macht man es am kleinsten ? Wir ersetzen Δm_i durch ein dm und die Summation über die vielen kleinen Masseteilchen durch eine Integration über dm :

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2$$

→

$$J = \int_0^M r^2 \cdot dm$$

$M =$ Gesamtmasse unseres Körpers

Nehmen wir an, es handelt sich um einen homogenen Körper, d.h. seine Dichte ist überall gleich, also konstant, so können wir - da $\rho = \frac{m}{V}$ und somit $m = \rho \cdot V$ - dm durch $\rho \cdot dV$ ersetzen.

(exakt : $m = \rho \cdot V \Rightarrow \frac{dm}{dV} = \rho$ also $dm = \rho \cdot dV$)

⇒

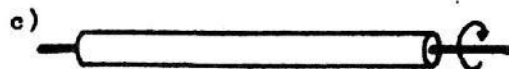
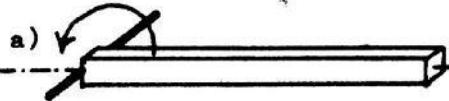
$$J = \rho \int_0^V r^2 \cdot dV$$

Jetzt integrieren wir nicht von 0 bis zur Gesamtmasse, sondern von 0 bis zum Gesamtvolumen !

Nun wollen wir rechnen :

Als Beispiel wählen wir einen langen dünnen Stab. Wir berechnen

J bezüglich dreier Achsen :

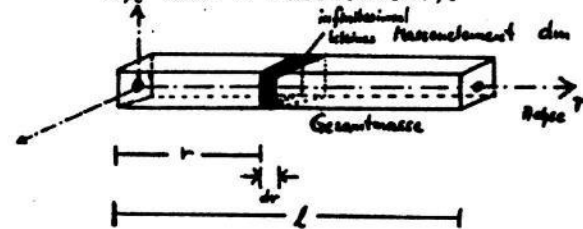


bezüglich einer Achse durch ein Ende des Stabes, senkrecht zu seiner Längsachse.

bezüglich einer Achse durch des SP des Stabes, senkrecht zu seiner Längsachse.

Zu einer Achse, die parallel zur Längsachse des Stabes liegt und die durch den SP geht.

a) Zunächst ~~wird~~ wir ein vernünftiges Koordinatensystem wählen. Wir legen es so, daß der Ursprung in der Drehachse liegt. Wir brauchen dann nur eine Koordinatenachse. Nennen wir sie meinetwegen r (man muß Koordinaten nicht immer mit x, y oder z bezeichnen!).



Dann gilt

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int_{r=0}^{r=l} r^2 \cdot dm$$

Da stimmt doch was nicht ! Wir können nicht über dm , also eine Masse integrieren,

und als Grenzen Längen einsetzen. Wir wollen dm irgendwie in eine Längenänderung dr umformen. Aus der Zeichnung können wir folgendes Verhältnis ableiten :

$$\frac{M}{l} = \frac{M/2}{l/2} = \dots = \frac{dm}{dr} \Rightarrow dm = \frac{M}{l} dr$$

Deshalb können wir jetzt schreiben :

$$J = \int_{r=0}^{r=l} r^2 dm = \int_{r=0}^{r=l} r^2 \cdot \frac{M}{l} \cdot dr \text{ und das können wir integrieren}$$

zunächst schreiben wir alles, worüber nicht integriert wird (das, was nicht von der Länge abhängt), nach vorne :

$$J = \frac{M}{l} \int_{r=0}^{r=l} r^2 dr = \frac{M}{l} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=l} = \frac{M}{l \cdot 3} (l^3 - 0^3) = \frac{M l^3}{3l} = \frac{M}{3} \cdot l^2$$

Somit folgt für unser Trägheitsmoment im Fall a) :

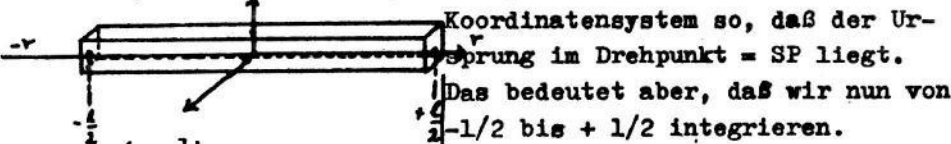
$$J_a = \frac{M}{3} l^2$$

b) Zuerst wollen wir uns überlegen, ob das Trägheitsmoment im Fall a) oder im Fall b) größer ist.

Da in $J = \int r^2 dm$ der Radius (Entfernung Massenelement dm - Drehpunkt) im Quadrat vorkommt, ist anzunehmen, daß der Körper ein größeres Trägheitsmoment besitzt, bei dem viele Massenelemente weit vom Drehpunkt entfernt sind. Das ist bei uns im Fall a) so gewesen. Dort waren mehr Massenelemente in größerer Entfernung, als jetzt im Fall b), Daher nehmen wir an, daß $J_a > J_b$. Gut - wollen wir J_b berechnen :

Wie sieht nun die Rechnung aus?

Es ist genau die gleiche wie im Fall a) - nur verwenden wir jetzt andere Integrationsgrenzen. Im Fall b) liegt das



Das bedeutet aber, daß wir nun von $-l/2$ bis $+l/2$ integrieren.

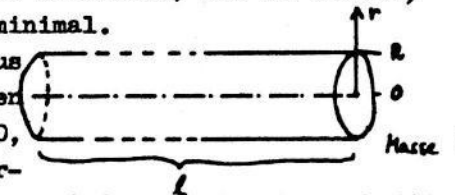
$$J = \int_{(r=-l/2)}^{(r=+l/2)} r^2 dm = \frac{M}{l} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} r^2 dr = \frac{M}{l} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{-l/2}^{+l/2} = \frac{M}{l} \cdot \left(\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{l^3}{8}\right) \right)$$

$$= \frac{2 \cdot M l^3}{3 \cdot 8 \cdot l} = \frac{M}{12} \cdot l^2 \quad \text{also} \quad J_b = \frac{M}{12} l^2$$

also ist auch $J_b < J_a$

c) Im Fall c) müßte J_c noch viel kleiner sein, da der größte Außenradius recht klein ist. Zur Vereinfachung nehmen wir nun einen zylindrischen Stab an, also ein Stab mit kreisförmigem statt quadratischen Querschnitt. Da nach Voraussetzung der Stab lang und dünn sein soll, ist der Fehler, den wir dadurch machen, ganz minimal.

Unser Stab soll nun den Radius R haben. Auch hier integrieren wir über r und zwar von $r = 0$, d.h. vom Mittelpunkt des Querschnitts bis $r = R$, also bis zum Außenrand des Querschnitts. Um über r zu integrieren, müssen wir wieder dm durch dr ersetzen. Aber jetzt müssen wir etwas anders vorgehen. Wie hängen dm und dr zusammen - oder einfacher: Wie hängen m und r zusammen? Wir wissen $M = \rho \cdot V$, also Masse ist Dichte mal Volumen. Und Volumen $V = l \pi r^2$ (Stabquerschnittsfläche, mal Stablänge).



Also gilt $m = l \pi r^2 \rho$. Wie groß ist nun dm ? Kann man einfach bei m und r ein kleines d davor machen? **N E I N !!!**

Wir haben eine Funktion $m = m(r)$. Wenn wir diese nun nach r differenzieren, erhalten wir die Ableitung $\frac{dm}{dr}$. Diese können wir nach dm auflösen:

$$\frac{dm}{dr} = \frac{d}{dr} (\rho l \pi r^2) = \rho l \pi \frac{d}{dr} (r^2) = \rho l \pi 2r \Rightarrow$$

$$dm = \rho l \pi 2r dr, \text{ dies setzen wir jetzt ins Integral ein:}$$

$$J = \int_{m=0}^{m=M} r^2 dm = \int_{r=0}^{r=R} \rho l \pi 2r \cdot r^2 \cdot dr = 2 \rho l \pi \int_{r=0}^{r=R} r^3 \cdot dr = 2 \rho l \pi \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$J = \underbrace{\rho l \pi R^2}_{V} \cdot \frac{R^2}{2} = \underbrace{\rho \cdot V}_{M} \cdot \frac{R^2}{2} = M \cdot \frac{R^2}{2} \quad \text{also gilt} \quad J_c = M \frac{R^2}{2}$$

Vorsicht: Wir verwendeten große (M, R) und kleine Buchstaben (m, r). Das hat schon seinen Sinn. Wir integrieren zum Beispiel über die Variable r von $r = 0$ bis zum Stabradius $r = R$. Ebenso mit der Masse.

Die Gesamtmasse ist M , falls wir die Masse als Variable (d.h. sie ist noch nicht bestimmt) auffassen, schreiben wir klein m .

So nun haben wir die drei Fälle berechnet:

$$J_a = M \frac{l^2}{3}; \quad J_b = M \frac{l^2}{12} \quad \text{und} \quad J_c = M \frac{R^2}{2}$$

- M = Gesamtmasse des Stabes
- l = Gesamtlänge des Stabes
- R = Radius des kreisförmigen Querschnitts

Nun wollen wir noch kurz ein Zahlenbeispiel machen - und zwar bedienen wir uns des Bleistifts von vorhin. Es seien folgende Größen gegeben:

$$M = 5g = 0,005 \text{ kg}, \quad R = 3 \text{ mm} = 0,003 \text{ m}, \quad l = 14 \text{ cm} = 0,14 \text{ m}$$

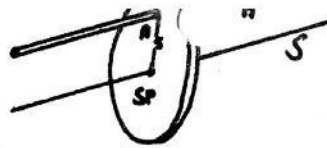
um Achse (2) $\hat{=}$ Fall b) $\cdot J_2 = M \frac{l^2}{12} = \frac{0,005}{12} \cdot (0,14)^2 = 8,2 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$

um Achse (1) $\hat{=}$ Fall c) $\cdot J_1 = M \frac{R^2}{2} = \frac{0,005}{2} \cdot (0,003)^2 = 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ kgm}^2$

$$\Rightarrow J_b = 364,4 J_c \quad \text{bzw.} \quad J_2 = 364,4 J_1$$

Die Rotationen um den Schwerpunkt (also um eine Achse um den Schwerpunkt) sind ausgezeichnet. Es gibt Tabellen, die die Trägheitsmomente von starren Körpern um Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen, angeben. Nun wollen wir aber auch Trägheitsmomente wissen, die bezüglich anderen Achsen sind. Es gibt eine Beziehung (den sogenannten Steiner'schen Satz) der es gestattet, vom Trägheitsmoment bezüglich einer Schwerpunktsachse ausgehend, zu dem bezüglich einer Achse parallel zu dieser SP-Achse zu kommen.

c) Steiner'scher Satz



Falls die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt geht, vergrößert sich das Trägheitsmoment. Wir fragen: um wieviel vergrößert sich das Trägheitsmoment?

Wir versuchen einen Ansatz über die Energie:

Rotiert der Körper um die Schwerpunktsachse S, so gilt für die Energie

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_S \omega^2 \quad \text{Hier soll der kleine Index bei } J \text{ demonstrieren, daß}$$

es sich beim Trägheitsmoment J_S um das bezüglich der Achse S handelt. Falls nun die Drehachse von S \rightarrow A verlagert wird, so führt der Körper gleichzeitig zwei Rotationsbewegungen durch:

- Er rotiert nach wie vor um S,
- zusätzlich rotiert der Körper um A, *da SP umkreist A, bleibt aber in der Lage gleich*

Beide Bewegungen erfolgen mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit.

Es ist so: Der Körper rotiert um S und dieser S rotiert mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit um A.

Somit gilt für die Energie:

$$E_{\text{rot}} = E_{\text{rot}_S} + E_{\text{kin}_A}$$

oder

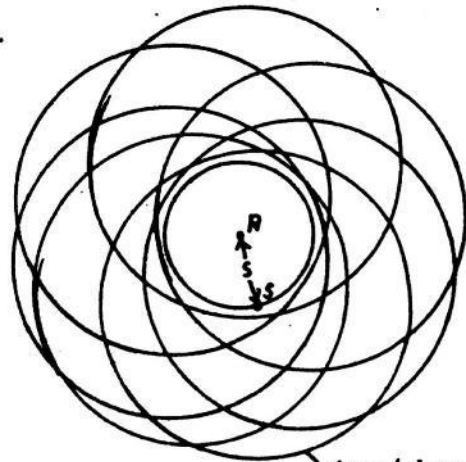
$$\begin{aligned} E_{\text{rot}_A} &= \frac{1}{2} J_S \omega^2 + \frac{mv^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} J_S \omega^2 + \frac{1}{2} ms^2 \omega^2 \\ &= (J_S + ms^2) \frac{\omega^2}{2} \end{aligned}$$

Da die Energie gegeben ist als $1/2$ mal Trägheitsmoment mal Winkelgeschwindigkeit zum Quadrat, können wir diese Klammer $(J_S + ms^2)$ als neues Trägheitsmoment, also als Trägheitsmoment J_A bezüglich der Achse A auffassen. Also

$$J_A = J_S + ms^2$$

Steiner'scher Satz

Das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse A ist gleich dem Trägheitsmoment bezüglich einer zu A parallelen Achse S durch den Schwerpunkt plus dem Produkt aus Entfernung s (zwischen Achse A und Achse S) zum Quadrat und der Gesamtmasse des Körpers.



starrer Körper zu einer bestimmten Zeit t.

Daraus ersieht man sofort, daß das Trägheitsmoment jedes Körpers bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt am kleinsten ist (da dort $s = 0$).

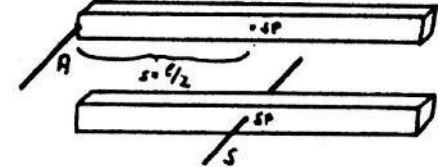
Beispiel:

Wir hatten vorhin beim langen dünnen Stab im Fall a

$$J_a = M \cdot \frac{1}{3}$$

und im Fall b

$$J_b = M \cdot \frac{1}{12}$$



Der Fall b) steht in jeder Trägheitstabelle. Nun gilt für den Fall a:

$$J_a = J_b + Ms^2 \quad \text{s (die Entfernung zwischen beiden Achsen) ist hier gerade die Hälfte der Gesamtlänge also } s = \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow J_a = J_b + M \cdot \frac{l^2}{4} = M \cdot \frac{1}{12} + M \cdot \frac{l^2}{4} = M \left(\frac{1}{12} + \frac{3l^2}{12} \right) = M \cdot \frac{l^2}{3}$$

aha! Stimmt also.

d) Hauptträgheitsachsen

Es lassen sich durch den Schwerpunkt eines starren Körpers beliebig viele Drehachsen legen. Man kann aber einige ganz bestimmte Achsen herausuchen:

Man wählt die Achse mit dem kleinsten und die mit dem größten Trägheitsmoment (J_{min} und J_{max}). Diese beiden Achsen stehen senkrecht zueinander.

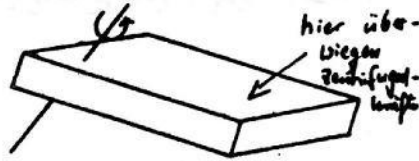
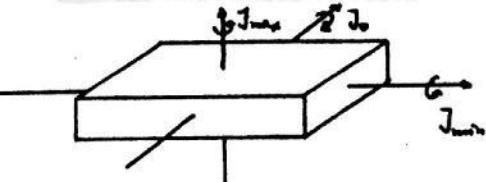
Nur um diese beiden Achsen ist eine stabile Rotation möglich. Wir führen dazu noch den Begriff der freien Achsen ein.

Freie Achsen sind solche, die nicht als wirkliche Achsen durch den Körper gehen und in Lagern gehalten werden. Nur zwei Achsen (nämlich die mit J_{min} und mit J_{max}) können als stabile freie Achsen Verwendung finden. Man nennt die beiden Achsen mit J_{min} und J_{max} , ebenso die zu diesen beiden senkrechte Achse J .

Hauptträgheitsachsen. Diese drei Achsen heißen auch - wie schon

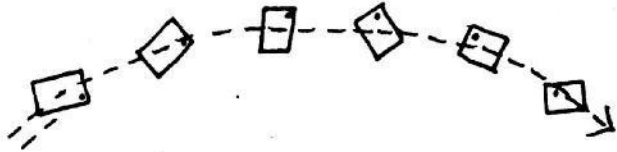
erwähnt - freie Achsen und zwar aus folgendem Grund :

Bei einer Rotation um eine dieser Achsen heben sich alle Zentrifugalkräfte auf :



Dazu ein experimentelles Beispiel :

Wir nehmen eine Zigarrenkiste und schleudern sie so in die Luft, daß sie sich um ihre freien Achsen drehen kann :



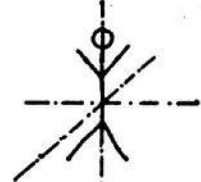
Wir stellen folgendes fest :

Nur bei den Achsen mit J_{max} und J_{min} ist die Drehung stabil.

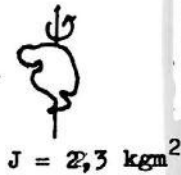
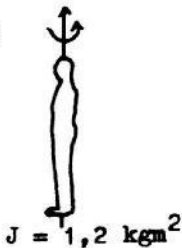
Bei der Achse mit J_0

erhalten wir eine Torkelbewegung der Kiste.

Dazu sehen wir uns als Beispiel noch die freien Achsen beim Menschen an :



Beispiele :



So verstehen wir auch das Wesen der Pirouette beim Ballett oder dem Eiskunstlauf :

Der Tänzer dreht sich um seine Körperlängsachse. Das ist die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment. Er hat die Arme angezogen und dreht sich mit großer Winkelgeschwindigkeit ω . Nun streckt er die Arme aus. Das Trägheitsmoment wird größer. Wenn die Energie die gleiche bleiben soll, muß sich nach $E = \frac{1}{2} J \omega^2$

die Winkelgeschwindigkeit ω verkleinern.

e) Analogien

Bisher haben wir gesehen, daß es viele Analogien zwischen Translations- und Rotationsbewegungen gibt. Diese wollen wir hier einmal kurz tabellarisch zusammenfassen :

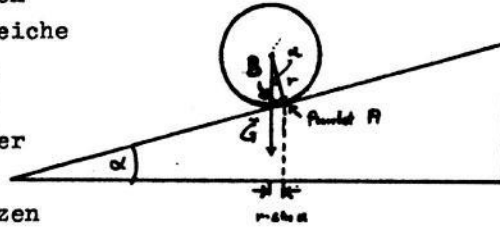
TRANSLATION			ROTATION		
Weg	s	[m]	Winkel	φ	$\left[\frac{m}{m} = 1 = \text{rad}\right]$
Zeit	t	[sec]	Zeit	t	[sec]
Geschwindigkeit	$v = \dot{s}$	$\left[\frac{m}{\text{sec}}\right]$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$	$\left[\frac{1}{\text{sec}}\right]$
Beschleunigung	$a = \dot{v}$	$\left[\frac{m}{\text{sec}^2}\right]$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$	$\left[\frac{1}{\text{sec}^2}\right]$
Masse	m	[kg]	Trägheitsmoment	J	$[\text{kg m}^2]$
Kraft	F	$\left[N = \frac{\text{kgm}}{\text{sec}^2}\right]$	Drehmoment	M	$\left[\text{Nm} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{sec}^2}\right]$
(Weg)	$S = vt$	[m]	(Winkel)	$\varphi = \omega t$	$\left[\frac{m}{m} = 1 (\text{rad})\right]$
(Geschw.)	$v = a \cdot t$	$\left[\frac{m}{\text{sec}}\right]$	(Winkelgeschw.)	$\omega = \alpha \cdot t$	$\left[\frac{1}{\text{sec}}\right]$
(Kraft)	$F = m \cdot a$	$\left[N = \frac{\text{kgm}}{\text{sec}^2}\right]$	(Drehmom.)	$M = J \alpha$	$\left[\text{Nm} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{sec}^2}\right]$
Impuls	$p = m \cdot v$	$\left[\frac{\text{kgm}}{\text{sec}}\right]$	Drehimpuls*	$L = J \omega$	$\left[\text{Nmsec} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{sec}}\right]$
Arbeit	$W = \int \vec{F} d\vec{s}$	[J = Nm]	Arbeit	$W_{\text{rot}} = \int M d\varphi$	[Nm = J]
Energie	$E = \frac{1}{2} m v^2$	[J = Nm]	Energie	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$	[Nm = J]

* Die Größe des Drehimpuls behandeln wir noch ausgiebig in einem späteren Kapitel!

6. ROLLBEWEGUNGEN

Wir betrachten ein Experiment :

Es rollen zwei Walzen (Zylinder) eine schiefe Ebene hinunter. Sie sollen gleiche Abmessungen (gleiche Grundflächen und gleiche Mantellänge) haben. Außerdem sollen sie die gleiche Masse haben. Das wird vorher auf der Waage überprüft.



Nun - wir lassen beide Walzen zur gleichen Zeit los und sehen, daß die eine immer viel früher unten ist als die andere. Wir wollen nun wissen : Wieso ?

Wir betrachten uns die Rollbewegung genauer.

Der Punkt A ist der Drehpunkt, um den sich der starre Körper (denn um einen solchen handelt es sich ja) dreht. Und dieser Punkt A "rutscht" die schiefe Ebene hinunter.

Warum rollt die Walze ? - Weil ein Drehmoment angreift. Und wo? Am Punkt B. Das Drehmoment hat folgende Größe :

$$|\vec{M}| = |\vec{G}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \alpha \quad \text{Dies ist aus der Skizze zu erkennen.}$$

Der Drehpunkt fällt nicht mit dem SP zusammen. Also wenden wir den Satz von Steiner an :

$$J_A = J_S + m r^2$$

Und da wir wissen $M = J \dot{\omega}$ (Dynamisches Grundgesetz der Rot.)

können wir die Drehmomente gleichsetzen :

$$M = G \cdot r \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot r \cdot \sin \alpha = J_A \dot{\omega} = (J_S + m r^2) \dot{\omega}$$

Somit gilt für die Winkelbeschleunigung dieser Walze

$$\dot{\omega} = \frac{m \cdot g \cdot r \cdot \sin \alpha}{J_S + m r^2}$$

Aus der Behandlung der Kreisbewegung wissen wir, daß ein Massenpunkt, der die Bahngeschwindigkeit v hat, mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um den Mittelpunkt kreist. Beide hängen so zusammen :

$$v = r \cdot \omega \quad \text{Auch unser Punkt A bewegt sich}$$

auf einer Kreisbahn um den Mittelpunkt SP. Also ist seine Ge-

schwindigkeit auch $v_A = r \cdot \omega$.

Wir berechneten eben die Winkelbeschleunigung für die Walze. Daraus können wir auch die Bahnbeschleunigung für den Punkt A ermitteln :

$$v_A = r \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_A}{dt} = \frac{d}{dt} v_A = \frac{d}{dt} r \omega = r \cdot \dot{\omega}$$

Also gilt für die Beschleunigung des Punktes A

$$a_A = r \cdot \dot{\omega} = r \cdot \frac{m \cdot g \cdot r \cdot \sin \alpha}{J_S + m r^2} = m r^2 \left(\frac{g \sin \alpha}{J_S + m r^2} \right) = \frac{g \sin \alpha}{\left(\frac{J_S}{m r^2} + 1 \right)}$$

$$\text{Also} \quad a_A = \frac{g \cdot \sin \alpha}{\left(1 + \frac{J_S}{m r^2} \right)}$$

Das heißt aber, daß die Zeit, die ein Körper braucht, um eine schiefe Ebene herunterzurollen vom Trägheitsmoment J_S abhängt. Es können also zwei Walzen, die in Abmessungen und Massen übereinstimmen, verschieden schnell hinunterrollen, wenn sie sich in ihren Trägheitsmomenten unterscheiden.

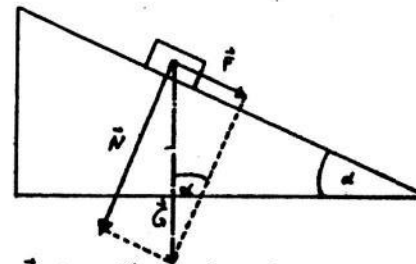
Wir nehmen zum Beispiel eine massive und eine hohlwandige Walze :

$$\text{massiv} \quad J_S = \frac{1}{2} m r^2 \quad ; \quad \text{hohlwandig} \quad J_S = m r^2$$

Was kommt also zuerst an ?

Die Walze mit der größten Beschleunigung. Das muß diejenige sein, die das kleinere Trägheitsmoment hat. Also hier die massive Walze.

Zum Vergleich betrachten wir uns noch kurz das Beispiel, daß ein Körper der Masse m reibungsfrei eine schiefe Ebene hinunterrutscht.



\vec{G} wird in \vec{F} + \vec{N} aufgespalten

Hier gilt :

$$|\vec{F}| = |\vec{G}| \sin \alpha = m g \sin \alpha = m \cdot a$$

$$\Rightarrow \quad a = g \cdot \sin \alpha$$

Vergleich :

$$a_{\text{rutschen}} = g \cdot \sin \alpha$$

$$a_{\text{rollen}} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{\left(1 + \frac{J_S}{m r^2} \right)}$$

Da J_S immer irgendeinen Wert hat (also nie Null wird), ist der Nenner des Bruches $(1 + J_S / mr^2)$ immer größer als 1. Daraus folgt natürlich, daß

$$a_{\text{rutschen}} > a_{\text{rollen}} !$$

D.H. Durch die Rotation eines Körpers auf der schiefen Ebene wird seine Linearbeschleunigung verkleinert.

Ein Körper, der sich eine schiefe Ebene hinunterbewegt, rutscht (bzw. gleitet) immer schneller hinunter, als er rollen kann.

Betrachten wir noch kurz verschiedene Körper :

- | | | |
|--------------------|--------------------------|--|
| 1) Masse m gleitet | | $a_1 = g \cdot \sin \alpha = 1 \cdot g \sin \alpha$ |
| 2) Massivzylinder | $J_S = \frac{1}{2} mr^2$ | $a_2 = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \right) g \sin \alpha = \frac{2}{3} \cdot g \sin \alpha$ |
| 3) Hohlzylinder | $J_S = mr^2$ | $a_3 = \left(\frac{1}{1 + 1} \right) g \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot g \sin \alpha$ |
| 4) Kugel | $J_S = \frac{2}{5} mr^2$ | $a_4 = \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{5}} \right) g \sin \alpha = \frac{5}{7} \cdot g \sin \alpha$ |

7. Der Drehimpuls

Bei der Besprechung der Translationen definierten wir eine Größe $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, wir nannten sie Impuls.

Das war eine Größe, die uns angab, was für eine (im allgemeinen Sprachgebrauch) "Wucht" ein bewegter Körper hat.

(Früher benutzte man in der Physik das Wort Wucht für die kinetische Energie. Aber Impuls und Energie hängen ja bekanntlich eng miteinander zusammen $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$).

Nun wollen wir eine solche Größe auch für die Rotationsbewegungen einführen. Sie gibt uns an, wie stark ein Körper einer Rotation unterliegt. Der lineare Impuls war Masse mal Geschwindigkeit. Was liegt also näher, unsere Größe als Produkt aus Trägheitsmoment ($\hat{=}$ Masse) und Winkelgeschwindigkeit zu definieren. Wir nennen die neue Größe Drehimpuls.

Wir wollen uns die Größe aber exakt aus der Definition des Impulses ableiten :

Wir haben einen starren Körper vor uns, der aus sehr vielen kleinen Massenelementen Δm_1 zusammengesetzt ist.

Auf jedes dieser Massenelemente Δm_1 wirkt ein linearer Impuls (der z.B. den starren Körper in Rotation versetzt).

Dieser lineare Impuls hat die Größe

$$p_1 = \Delta m_1 v_1 . \text{ Das Massenelement } \Delta m_1 \text{ habe zur Drehachse}$$

den Abstand r_1 . Wir sagen nun

$$|\vec{L}| = \sum \Delta m_1 v_1 \cdot r_1 = \sum \Delta m_1 \cdot \omega \cdot r_1 \cdot r_1 = \omega \sum \Delta m_1 r_1^2 = \omega \cdot J$$

L ist nun unser Drehimpuls. Da J eine skalare Größe ist, hat \vec{L} die gleiche Richtung, wie $\vec{\omega}$.

Also haben $\vec{L}, \vec{\omega}$ die gleiche Richtung wie die Drehachse.

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$$

Der Drehimpuls ist (ganz analog zur Winkelgeschwindigkeit) unabhängig von der Entfernung des Massenelementes von der Drehachse. Deshalb kann man auch sagen, daß jedes Massenelement den gleichen Drehimpuls L hat.

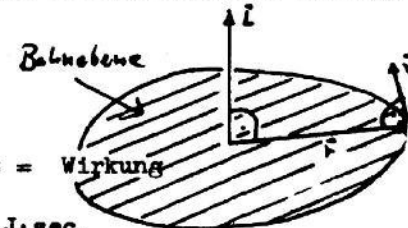
Anders herum kann man auch einem Massenpunkt, der kreist, einen Drehimpuls zuordnen.

Wir machen es genauso, wie bei der obigen Herleitung :

$$L = m r v , \text{ vektorieell exakt gilt } \vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

denn es galt ja : Winkelgeschwindigkeit stand senkrecht zu \vec{r} und senkrecht zu \vec{v} . Da der Drehimpuls die gleiche Richtung wie die Winkelgeschwindigkeit hat, gilt das Kreuzprodukt.

Beim kreisenden Massenpunkt steht der Drehimpulsvektor senkrecht auf der Bahnebene.



Betrachten wir kurz die Dimension des Drehimpulses:

$$[L] = \frac{\text{Masse} \cdot (\text{Länge})^2}{(\text{Zeit})} = \text{Arbeit} \cdot \text{Zeit} = \text{Wirkung}$$

$$[L] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{sec}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{sec}^2} \cdot \text{sec} = \text{Nm} \cdot \text{sec} = \text{J} \cdot \text{sec}.$$

Die Dimension Arbeit · Zeit (J · sec) nennt man auch eine "Wirkung".

Bei den Translationen fanden wir einen Zusammenhang zwischen Kraft und Impuls. Es war

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad \text{also} \quad \dot{\vec{p}} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \vec{a} = \vec{F} \quad \text{also} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

und wenn sich alle Kräfte aufheben, dann ist $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ oder $\vec{p} = \text{const.}$ Das war die Aussage des Impulserhaltungssatzes.

Nun wollen wir sehen, ob auch hier eine Analogie zwischen Translationen und Rotationen besteht.

Wir nehmen an, daß an einem Massenpunkt (oder auch an einem starren Körper der Masse m) die Kraft \vec{F} angreift. Seine Lage zum Drehpunkt O sei durch den Radiusvektor \vec{r} bestimmt. Dann gilt - wir wie ja hoffentlich noch wissen - $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$ das Drehmoment \vec{M} in bezug auf eine Achse senkrecht zur Ebene durch \vec{r} und \vec{F} an.

$$\text{Dann ist} \quad \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (m \cdot \dot{\vec{v}}) = m \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{v}}) = \frac{d}{dt} (m\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{d}{dt} \vec{L}.$$

$$\begin{aligned} \text{denn:} \quad \frac{d}{dt} (m\vec{r} \times \vec{v}) &= m(\dot{\vec{r}} \times \vec{v}) + m(\vec{r} \times \dot{\vec{v}}) \quad \text{nach der Produktregel} \\ &= m(\vec{v} \times \vec{v}) + m(\vec{r} \times \dot{\vec{v}}) \\ &= 0, \text{ da } \vec{v} = \dot{\vec{r}} \text{ und } \vec{v} \times \vec{v} = v^2 \cdot \sin 0^\circ = 0 \end{aligned}$$

also gilt: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ durch ein äußeres Drehmoment \vec{M} wird der Drehimpuls \vec{L} geändert.

Wirken keine Drehmomente, oder heben sie sich gegenseitig auf, so bleibt $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ oder $\vec{L} = \text{const.}$

daraus folgt der Drehimpulserhaltungssatz

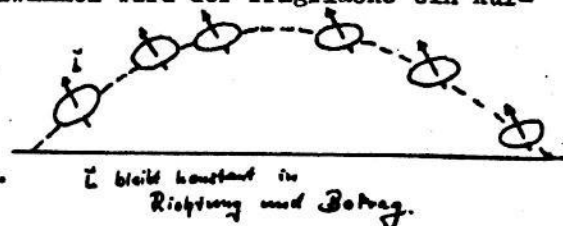
BEI ABWESENHEIT EINES ÄUSSEREN DREHMOMENTES BLEIBT DER GESAMTE DREHIMPULS EINES SYSTEMS UNVERÄNDERT.

(Drehimpulserhaltungssatz)

Dazu - und auch zum besseren Verständnis des Drehimpulsbegriffs - wollen wir uns nun noch einige Beispiele ansehen:

1) Ein Diskus, dem beim Abwurf ein kräftiger Drehimpuls erteilt wird, behält seine Richtung im Raum bei, dadurch wirkt der Diskus, wenn er so abgeworfen wird, daß seine Figurenachse schräg steht, (wie in der Abbildung gezeigt) wie eine Trag-

fläche. Durch den Anstellwinkel wird der Tragfläche ein Auftrieb erteilt, wodurch die Wurfweite viel größer wird, als wenn der Diskus einfach nur ohne Drehung abgeworfen würde.



\vec{L} bleibt konstant in Richtung und Betrag.

2) Versuche mit dem Drehstuhl:

Ein Drehstuhl soll bei uns ein Stuhl sein, dessen Sitzfläche auf einer vertikalen Achse drehbar gelagert ist.

Der Drehstuhl kann sich nur um eine vertikale Achse drehen. Er reagiert somit nur auf Impulse, deren Vektor vertikal gerichtet ist, bzw. der Drehstuhl reagiert nur auf die vertikale Komponente von Impulsen, die von außen angelegt werden.



Wir wollen dies nun im einzelnen prüfen.

Zunächst brauchen wir noch einen Kreisel. Es soll sich dabei um eine Fahrradfelge handeln, die an der Radachse (Nabe) gehalten wird.

a) Ein Mann, der auf dem Drehstuhl sitzt habe den Kreisel so in der Hand, daß die Kreiselachse vertikal steht.

Nun versetzt er den Kreisel in Drehung.

Dieser erhält also einen Drehimpuls

$$\vec{L} = J_K \cdot \omega_K$$

Nach dem Drehimpulserhaltungssatz

müßte der Gesamtdrehimpuls aber -

so wie anfänglich - Null bleiben.

Also erhält der Mann auf dem Dreh-

stuhl einen gleichgroßen, aber ent-

gegengerichteten Drehimpuls

$$\vec{L} = - J_m \omega_m \quad \text{. Er beginnt sich also in der anderen}$$

Richtung zu drehen. Allerdings ist seine Winkelgeschwindigkeit

ω_m kleiner als die des Kreisels ω_K , da sein Trägheitsmoment J_m viel größer als das des Kreisels J_K ist.

b) Bremst der Mann nun den Kreisel ab, so hört auch seine Bewegung um die vertikale Achse auf.

c) Hält der Mann den rotierenden Kreisel nicht vertikal, sondern schräg, so ist der Übertragene Drehimpuls auch kleiner



8) Der Kreisel

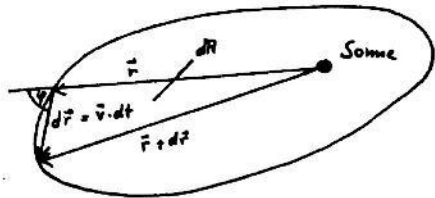
da nur die vertikale Komponente des Drehimpulses zur Impulsübertragung beiträgt.

3) Eiskunstläuferin

Eine Eiskunstläuferin macht eine Pirouette. Dabei erteilt sie sich einen bestimmten Drehimpuls L . Wenn sie nun die vorher angelegten Arme ausbreitet, vergrößert sich ihr Trägheitsmoment, und - da der Drehimpuls nach dem Erhaltungssatz konstant bleibt - verringert sich ihre Winkelgeschwindigkeit - sie wird langsamer.

4) Beweis des 2. Keplerschen Gesetzes (vgl. A I 8. d))

Das Zweite Kepler'sche Gesetz sagt aus, daß die Verbindungsgerade Planet - Zentralgestirn (das ist der sogenannte Fahrstrahl) in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.



\vec{r} überstreicht nun in der Zeit dt die Fläche dA .

Diese Fläche wollen wir errechnen. Dreiecksfläche ist gleich Grundseite mal Höhe, mal $1/2$.

Hier nehmen wir als Grundseite r . Die Höhe ist hier $v \cdot dt \cdot \sin \varphi$.

$$\Rightarrow dA = \frac{1}{2} \cdot r \cdot v \cdot dt \cdot \sin \varphi$$

$$= \frac{1}{2} \cdot dt \cdot r \cdot v \cdot \sin \varphi \cdot \frac{m}{m}$$

$$\text{also } dA = \frac{1}{2} \cdot dt \cdot \frac{m}{m} \cdot r \cdot v \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} dt \frac{1}{m} (m \cdot r \cdot v \cdot \sin \varphi)$$

$$dA = \frac{1}{2} dt \frac{1}{m} L \quad \text{oder auch} \quad L = 2m \frac{dA}{dt}$$

und die ist nach dem Drehimpulserhaltungssatz konstant.

D.h., daß auch $\frac{dA}{dt} = \text{const.}$ ist. Es ändert sich also die überstrichene Fläche mit der Zeit nicht. Und das ist gerade die Aussage des Zweiten Kepler'schen Gesetzes.

Auch im Sonnensystem zum Beispiel ist der Drehimpuls konstant. Die Sonne selbst hat davon allerdings nur 2%. Die restlichen 98 % sind auf die viel leichteren Planeten verteilt.

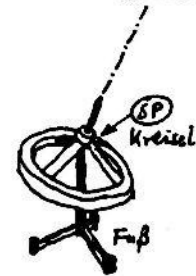
Und zwar kennen wir dort die Unterteilung zwischen Bahndrehimpuls (Planet als Massenpunkt auf einer Kreisbahn um die Sonne betrachtet) und den Drehimpuls der Planeteneigenrotation (Planet als starrer Körper mit Trägheitsmoment J und mit ω).

Unter einem Kreisel verstehen wir einen starren Körper, der sich dreht. Meist sind solche Kreisel drehsymmetrische Körper, so z.B. Schwungrad, Kinderkreisel, Spielreif, Erde etc.

a) kräftefreier Kreisel

Wir betrachten einen Kreisel, der in seinem Schwerpunkt unterstützt ist. Das bedeutet, daß keine Kräfte auf ihn wirken, und außerdem auch keine Drehmomente auftreten. Also nach dem, was wir bereits gehört haben, befindet sich der Kreisel im Gleichgewicht, also in Ruhe.

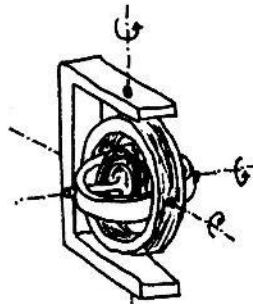
Wenn wir nun den Kreisel in Drehung versetzen, so bleibt seine Drehachse stabil stehen und zwar unabhängig davon, wie sie zu Beginn der Drehung stand. Versetzen wir den Kreisel in Drehung, so erhält er einen Drehimpuls. Dieser bleibt nach dem Drehimpulserhaltungssatz konstant, und zwar in Betrag und Richtung. Der Drehimpuls würde sich nur dann ändern, wenn äußere Drehmomente wirken würden. Doch dazu kommen wir etwas später.



So - selbst, wenn wir den Fuß bewegen, und die Reibung zwischen Fuß und Kreisel unberücksichtigt lassen, so bleibt der Betrag und die Richtung des Drehimpulses konstant und die Drehachse bleibt fest im Raum stehen.

Dieses macht man sich auch zunutze. Und zwar in der Luft- und Raum-

fahrt. Um eine automatische Steuerung in Flugzeugen oder Raumflugkörpern zu realisieren, muß diese Automatik zu jeder Zeit die Lage des Gefährts feststellen können. Zwar kann man bei Flugzeugen ein Pendel anbringen und je nach Lage dieses Pendels die Lage der Maschine feststellen; aber - bei Kurvenflügen ergeben sich Trägheitskräfte, die die Messung empfindlich stören. Außerdem kann man ein solches gravimetrisches Verfahren bei Raumflugkörpern, die nicht in einem Schwerfeld fliegen



(kardanisch aufgehängter Kreisel)
fahren bei Raumflugkörpern, die nicht in einem Schwerfeld fliegen nicht benutzen.

b) Nutation

Bisher betrachteten wir den kräftefreien Kreisel. Nun nehmen wir den gleichen Kreisel und versetzen ihn in Drehung. Was geschieht? Nun - seine Drehachse bleibt stabil im Raum stehen. Das wissen wir!

Jetzt versetzen wir der Drehachse einen kurzen seitlichen Schlag (in der Zeichnung durch den kleinen Pfeil gekennzeichnet). Was geschieht nun?

Um dieses zu erörtern, müssen wir zunächst noch einige Begriffe einführen. Unter der Figurenachse versteht man die Symmetrieachse des Kreisels. (Die meisten Kreisel sind drehsymmetrisch und haben somit eine Symmetrieachse).

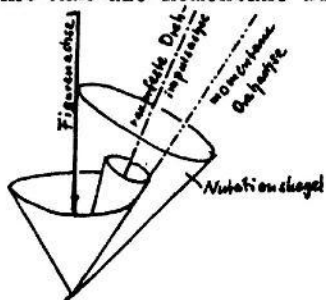
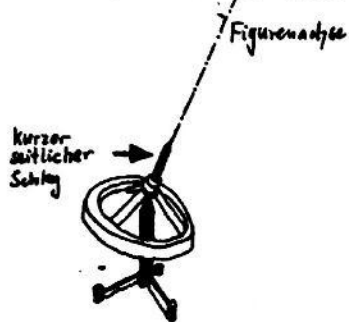
Die momentane Drehachse ist die Achse um die die Drehung im Moment erfolgt.

Und die Drehimpulsachse ist nichts anderes, als die Richtung des Drehimpulses. Beim vorher besprochenen kräftefreien Kreisel fielen alle drei Achsen zusammen. Durch einen kurzen seitlichen Schlag nun, trennt man die momentane Drehachse von der Figurenachse. Da das

seitliche Drehmoment nur ganz kurz wirkt, können wir es vernachlässigen. Das heißt aber, daß die Drehimpulsachse wiederum stabil im Raum stehen bleiben muß. Insgesamt gesehen muß dann folgende Konfiguration gelten:

Durch den seitlichen Schlag trennt man momentane Drehachse und Figurenachse voneinander. Die Drehimpulsachse liegt auf einer Ebene durch momentane Dreh- und Figurenachse, und zwar zwischen

beiden. Die Figurenachse dieses ansonsten kräftefreien Kreisels bewegt sich auf einem Kegelmantel. Diese Bewegung nennt man Nutation. Also noch einmal: Bei der Nutation des kräftefreien symmetrischen Kreisels rotieren momentane Drehachse und Figurenachse auf einem Kegelmantel um den raumfesten Drehimpulsvektor. Dabei liegen alle drei Vektoren zu jeder Zeit in einer Ebene.

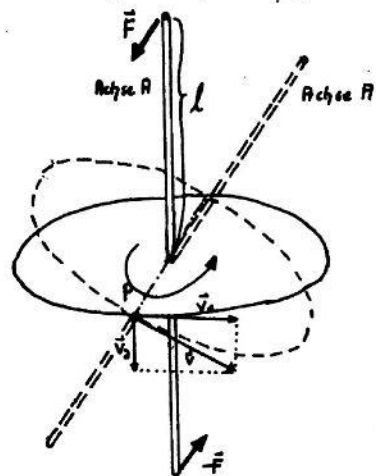
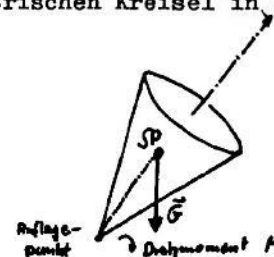


c) Präzession

Nun wollen wir auf unseren Kreisel ein äußeres Drehmoment wirken lassen. Vorhin unterstützten wir den Kreisel genau im Schwerpunkt. Dadurch konnte die Erdschwerkraft kein Drehmoment auf den Kreisel ausüben. Wenn wir nun den symmetrischen Kreisel in einem Punkt unterhalb des Schwerpunktes unterstützen, so greift am Schwerpunkt ein permanentes Drehmoment an. Deshalb bleibt auch der Drehimpuls nicht mehr konstant, denn wir wissen ja

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{also, wenn ein Drehmoment } M \text{ vorhanden ist, so ist dies gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses (Drehimpulserhaltungssatz).}$$

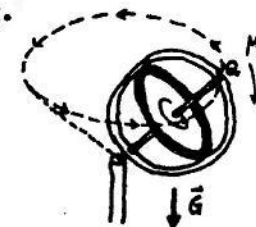
moment M vorhanden ist, so ist dies gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses (Drehimpulserhaltungssatz).



Betrachten wir uns das genauer: Ein Schwungrad sei an der senkrecht darauf stehenden Achse **A** befestigt. Dieser Kreisel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Nun betrachten wir den Punkt **P**. Er hat die Geschwindigkeit \vec{v}_1 . Nun lassen wir kurzzeitig eine Kraft \vec{F} an der Achse **A** wirken. (also $|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = l \cdot F$). Dadurch erfolgt eine Gegenkraft $-\vec{F}$ am unteren Ende von **A**. Unser Punkt wandert mit der Geschwindigkeit \vec{v}_2 nach unten. Das heißt also, daß sich \vec{v}_1 und \vec{v}_2 zur resultierenden

Geschwindigkeit \vec{v} überlagern. Nun bewegt sich der Punkt **P** auf dem gestrichelt gezeichneten Kreis. Die zugehörige Achse **A'** hat sich gegenüber Achse **A** rechtwinklig zur Kraft \vec{F} verschoben. Dies ist genau dasselbe, was wir vorher bei der Nutation beschrieben haben. Denn die Kraft \vec{F} wirkte nur kurzzeitig.

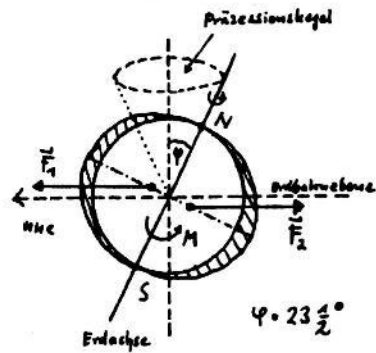
Falls die Kraft \vec{F} permanent wirkt (z.B. wenn die Achse **A** schräg steht und die Schwerkraft ein Drehmoment bildet), so würde die Achse **A'** dieser permanenten Kraft dauernd senkrecht dazu ausweichen und eine Kreisbahn beschreiben.



III. HYDROMECHANIK UND ELASTIZITÄT

ben:

Betrachten wir uns die Zeichnung auf der letzten Seite unten. Dreht sich der Kreisel K (im Ring) nicht, so fällt er sofort nach unten. Dreht er sich aber (also rotiert der Kreisel), so bleibt seine Achse nach dem Drehimpulserhaltungssatz fest stehen. Durch die permanente Kraft G weicht die Achse dauernd **senkrechtwinklig** aus. Das Ergebnis : der obere Punkt (in der Skizze mit Q bezeichnet) bewegt sich auf der gestrichelt gezeichneten Kreisbahn. Diese Bewegung nennt man Präzession.



Auch die Erde unterliegt einer Präzessionsbewegung. Sie ist nicht kugelförmig, sondern man kann die Erde als Kugel mit aufgesetzten Äquatorwülsten auffassen. Nun wirken die beiden Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 (\vec{F}_1 als Anziehungskraft der Sonne und \vec{F}_2 als Zentrifugalkraft der Erde auf der Erdbahn um die Sonne). Beide Kräfte bewirken ein Drehmoment \vec{M} , das versucht die Erdachse aufzurichten. (Dies funktioniert glücklicherweise deshalb nicht,

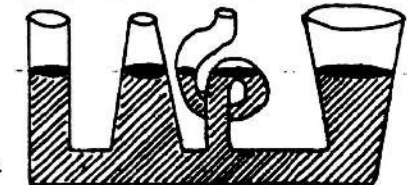
da die Erde selbst ein Kreisel ist und ihre Drehimpulsachse, nach dem Drehimpulserhaltungssatz im Raum konstant bleibt). Die Erdachse weicht dem Drehmoment M mit einer Präzessionsbewegung senkrecht dazu aus und beschreibt in 25730 Jahren einen Kegelmantel mit dem Öffnungswinkel 47° .

Bisher haben wir nur von festen Stoffen (starrer Körper) und ihren physikalischen Eigenschaften gesprochen. Es gibt aber auch noch die Flüssigkeiten und die Gase. Zunächst eine Unterscheidung :

1. Ein Körper befindet sich im festen Aggregatzustand, wenn er ohne nennenswerte äußere Einwirkungen weder Gestalt noch Volumen verändert. Die gegenseitigen Bindungskräfte der einzelnen Moleküle sind verhältnismäßig stark. Die Bewegungen einzelner Moleküle beschränken sich auf Schwingungen um feste Punkte.
2. Ein Körper befindet sich im flüssigen Aggregatzustand, wenn er ohne nennenswerte äußere Einwirkungen zwar die Gestalt, nicht aber das Volumen verändern kann.
3. Ein Körper befindet sich im gasförmigen Aggregatzustand, wenn er ohne nennenswerte äußere Einwirkungen Gestalt und Volumen verändern kann. Die gegenseitigen Bindungskräfte zwischen den Molekülen sind hier gering, und zwar noch geringer als bei den Flüssigkeiten, mit denen wir uns nun beschäftigen wollen.

1. Ruhende Flüssigkeiten

Flüssigkeiten nehmen - wie bereits erwähnt - stets die Form der sie umgebenden Gefäße an. Infolge der Schwerkraft richtet sich die Oberfläche jeweils so aus, daß der Flüssigkeitsspiegel horizontal verläuft. Dies gilt ebenso für die sogenannten verbundenen Gefäße, wie sie zum Beispiel in der nebenstehenden Zeichnung dargestellt sind.



a) Der Druck

An jeder Stelle innerhalb einer Flüssigkeit, oder auch innerhalb eines Gases herrscht ein Druck.

Man definiert den Druck als Kraft, die senkrecht auf eine Fläche wirkt, dividiert durch diese Fläche :

$$p = \frac{F}{A}$$

$$\text{Einheit } [p] = \frac{N}{m^2} = \text{Pa (Pascal)} = \frac{kg}{m \cdot sec^2}$$

Wir kennen noch andere Einheiten des Drucks (die keine SI-Einheiten sind) :

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,013 \text{ bar}$$

$$1 \text{ Torr} = 133,3224 \text{ Pa} = 1,333224 \text{ mbar}$$

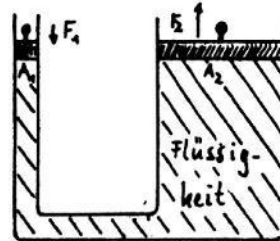
Bei Flüssigkeiten unterscheiden wir mehrere Arten von Drücken, und zwar je nachdem wie sie erzeugt werden :

1) Kolbendruck

Wird von außen (durch eine äußere Kraft \vec{F}) auf eine Flüssigkeit ein Druck ausgeübt, so pflanzt sich dieser auf Grund der freien Verschiebbarkeit der Flüssigkeitsmoleküle allseitig mit gleicher Stärke fort. Diesen Druck nennt man den Kolbendruck.

Eine Anwendung dafür ist die hydraulische Presse.

Hier ein Schnittbild einer solchen Presse. Sie besteht aus einem dicken und einem dünnen Zylinder, die durch ein Rohr miteinander verbunden sind. Zwei Stempel, die verschiebbar sind, schließen die Zylinder nach oben ab. Die beiden Stempel haben die Flächen A_1 und A_2 . Drückt man auf den Stempel mit der kleineren Fläche, so antwortet der Stempel mit der größeren Fläche mit einer größeren Kraft.



Drücken wir mit der Kraft F_1 auf die Fläche A_1 , so erzeugen wir einen Druck von $p = \frac{F_1}{A_1}$. Dieser Druck pflanzt sich durch das Verbindungsrohr fort und drückt von unten gegen den anderen Stempel. Da der Druck ja gleich groß bleibt, bilden dort Kraft und Fläche das Verhältnis $p = \frac{F_2}{A_2}$ also $F_1 : A_1 = F_2 : A_2$ oder $F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$ also: die auf den zweiten Kolben wirkende Kraft ist A_2/A_1 mal so groß wie die Kraft F_1 .

Nehmen wir ein Zahlenbeispiel :

Wir wollen mit Hilfe einer hydraulischen Presse ein Auto aufbocken. Es habe die Masse $m = 900 \text{ kg}$. Die Presse habe die beiden Flächen $A_1 = 0,2 \text{ m}^2$ und $A_2 = 2 \text{ m}^2$. Mit welcher Kraft müssen wir nun auf die Fläche A_1 drücken, damit sich das aufgebockte Auto hebt ?

Wir müssen an A_2 eine Kraft erzeugen, die mindestens so groß ist, daß sie die Gewichtskraft des Autos kompensiert. Diese ist

$$G = m \cdot g = 900 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{m}{sec^2} = 8829 \text{ N}$$

also - auch F_2 muß $= 8829 \text{ N}$ werden.

$$\text{Da } F_1 : A_1 = F_2 : A_2 \implies$$

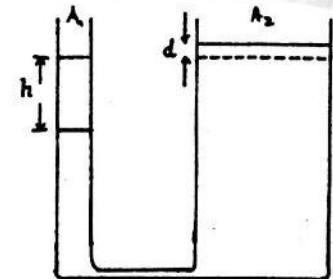
$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} \cdot F_2 = \frac{0,2}{2} \cdot 8829 = 882,9 \text{ N}$$

Wir müssen also mit der Kraft $F_1 = 882,9 \text{ N}$ drücken, oder auch auf den Stempel mit der Fläche A_1 eine Masse auflegen, für die gilt

$$m = \frac{F_1}{g} = \frac{882,9}{9,81} = 90 \text{ kg, dazu reicht ein gutgefütterter Herr !}$$

Heißt das also, daß eine hydraulische Presse eine Maschine ist, die Arbeit erzeugt? Nein - die Arbeit ist auf beiden Seiten gleich :

Wir nehmen an, daß Verbindungsrohrstück habe ein sehr kleines Volumen. Drücken wir den Stempel A_1 um die Höhe h nach unten, so haben wir links das Volumen um $A_1 \cdot h$ verkleinert. Dies muß also zu einer Volumenvergrößerung rechts führen, die genausogroß ist.



Der rechte Stempel hebt sich also um d :

$$A_1 \cdot h = A_2 \cdot d \text{ oder } d = \frac{A_1}{A_2} \cdot h$$

Die Arbeit, die wir links verrichten ist $F_1 \cdot h$. Und was kommt an der rechten Seite als Arbeit heraus ?

$$W_{\text{rechts}} = F_2 \cdot d = F_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} h. \text{ Da aber } F_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} = F_1, \text{ so ist der Betrag}$$

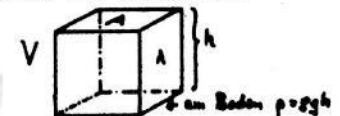
der Arbeit auf beiden Seiten $F_1 \cdot h$, also gleich - Dann ist gut !

2) Schweredruck

Jede Flüssigkeit (das gleiche gilt natürlich auch für Gase) erfährt infolge ihres eigenen Gewichts einen Druck, den sogenannten Schweredruck. So beträgt der Schweredruck einer Wassersäule der Höhe 1 m ca. 10^4 Pa . Betrachten wir einen Würfel des Volumens V , der Fläche A und der Seitenlänge h . Er soll aus einer Flüssigkeit bestehen (sich also in einem Gefäß befinden). Der Druck ist

$$p = \frac{G}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho A h g}{A} = \rho g h$$

also Schweredruck $p = \rho \cdot g \cdot h$. Dieser ist



temperaturabhängig (da auch ρ temperaturabhängig ist). Die Einheit

$$[p] = \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{sec^2} \cdot m = \frac{kg \cdot m}{m^3 \cdot sec^2} = \frac{kg}{m^2 \cdot sec^2} = \frac{N}{m^2} = \text{Pa}$$

3) hydrostatischer Druck

Als hydrostatischen Druck bezeichnet man die Summe aus Kolbendruck und Schweredruck :

$$p = \frac{F}{A} + \rho gh$$

b) Kompressibilität

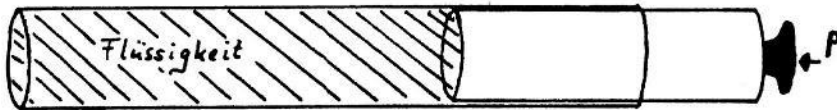
Flüssigkeiten lassen sich nur wenig zusammendrücken.

Bei Gasen ist das schon ganz anders. Bei ihnen kann man ohne große Druckunterschiede schon erhebliche Volumenveränderungen hervorrufen. Aber bleiben wir bei den Flüssigkeiten.

Wenn sich ein Stoff zusammendrücken läßt, nennt man ihn kompressibel. Jeder Stoff ist kompressibel, nur in verschiedenem Maße. Auch Festkörper lassen sich zusammendrücken, aber nur sehr wenig, sie sind nur wenig kompressibel. Bei Flüssigkeiten ist die Kompressibilität schon größer und erst recht bei Gasen.

Wie kann man das Volumen einer Flüssigkeit ändern ?

Zum Beispiel füllen wir eine Flüssigkeit in einen Kolben, und



zwar so, daß der Kolben ganz mit Flüssigkeit gefüllt ist. Jetzt drücken wir auf den Stempel. Wir lassen also einen Druck auf die Flüssigkeit wirken. Das Resultat : Das Volumen der Flüssigkeit wird kleiner!

Und zwar gilt : die relative Volumenänderung $\frac{dV}{V}$ ist proportional zur Druckänderung, also

$$\frac{dV}{V} \sim - dp$$

Das Diagramm zeigt einen kleinen horizontalen Zylinder mit einem Stempel an der rechten Seite. Ein Pfeil zeigt nach links auf den Stempel, beschriftet mit Δp . Ein Pfeil zeigt nach rechts aus dem Zylinder, beschriftet mit ΔV .

Noch einmal :

Wir ändern das Volumen, und zwar um ΔV . Diese Größe ist proportional zur Änderung des Drucks Δp und zum ursprünglichen Volumen. Also $\Delta V \sim V \cdot \Delta p$. Da bei Druckerhöhung eine Volumenverminderung eintritt, kommt noch ein Minuszeichen dazu:

$$\Delta V \sim - V \cdot \Delta p \text{ oder } \frac{\Delta V}{V} \sim - \Delta p, \text{ und exakt, mit infinitesimal}$$

kleinen Änderungen dp und dV gilt

$\frac{dV}{V} \sim - dp$. Führen wir als Proportionalitätsfaktor die Größe α ein, so lautet unsere Beziehung zwischen Druck- und Volumenänderung

$$\frac{dV}{V} = - \alpha \cdot dp$$

das α bezeichnen wir als die Kompressibilität des betreffenden Stoffes. Falls sich ein Stoff leicht zusammendrücken läßt (also große Volumenänderung bei kleiner Druckänderung), so ist α groß- und umgekehrt.

Betrachten wir noch die Einheit der Kompressibilität :

$$\alpha = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \left[\frac{1}{m^3} \cdot \frac{m^3}{N} \cdot m^2 = \frac{m^2}{N} \right]$$

c) Auftrieb

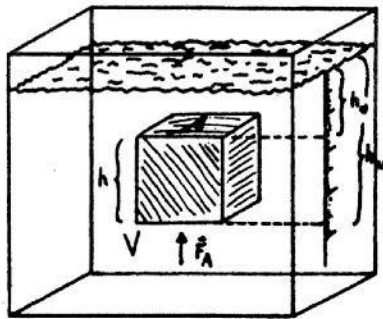
Archimedes (287 bis 212 v.Chr.) entdeckte das nach ihm benannte Prinzip, wonach jeder in eine Flüssigkeit oder in ein Gas eintauchende Körper eine Gewichtsverminderung erfährt. Diese Gewichtsverminderung, auch Auftrieb genannt, ist gleich dem Gewicht der von dem Körper verdrängten Menge des Stoffes.

Beispiel: Wir nehmen einen Eisenwürfel, der die Kantenlänge 5 cm hat. Dieser hat die Masse $m = 0,875$ kg, also eine Gewichtskraft von $G = 8,584$ N. Nun ist der Auftrieb so groß wie das Gewicht der verdrängten Wassermenge (wenn wir den Würfel vollständig in Wasser geben). Und diese ist, da $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = V \cdot \rho = 0,125 \cdot 1 \cdot 1 \frac{kg}{l} = 0,125$ kg

Dies ist die Masse der verdrängten Flüssigkeit, also ist ihr Gewicht $G_{Fl} = 1,226$ N. Das heißt also, daß der Auftrieb (sprich: die Gewichtsverminderung) des Eisenwürfels 1,226 N beträgt. Der Eisenwürfel wiegt also im Wasser nur noch 7,357 N.

Es handelt sich, wie man schon an den Einheiten sieht, beim Auftrieb um ein Gewicht, also um eine Kraft! Diese ist der normalen Gewichtskraft entgegengerichtet. Sie wirkt also nach oben. Der Auftrieb entsteht durch die Differenz der Schweredrucke an der Ober- und der Unterseite des eingetauchten Körpers. Diese Druckdifferenz ist so beschaffen, daß ein resultierender Druck den Körper wieder nach oben zu drücken versucht.

Wir betrachten nun die Schweredrucke an Ober- und Unterseite eines Körpers, der vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht ist :



Zur Vereinfachung nehmen wir einen Würfel der Kantenlänge h , der Fläche A und des Volumens V .

An der Oberseite herrscht der Druck

$$p_0 = \rho_{FL} \cdot g \cdot h_0 \quad h_0 \text{ ist die Strecke von Flüssigkeitsspiegel zu Körperoberseite.}$$

An der Unterseite des Körpers herrscht der Druck

$$p_u = \rho_{FL} \cdot g \cdot h_u$$

Jedem dieser Drucke nun, entspricht eine Kraft. Denn: Druck ist Kraft pro Fläche.

Der Auftrieb entsteht durch die Druckdifferenz zwischen Ober- und Unterseite. Der Auftrieb ist eine Kraft - deshalb können wir als Auftrieb die Kraft nehmen, die als Differenz zwischen den beiden Kräften entsteht, die den Ober-, bzw. Unterdrücken entsprechen :

$$F_A = p_u \cdot A - p_0 \cdot A = (p_u - p_0) \cdot A = (\rho_{FL} g h_u - \rho_{FL} g h_0) \cdot A = \rho_{FL} g A (h_u - h_0)$$

also, da $(h_u - h_0) = h$, und $h \cdot A = V$ gilt :

$$F_A = \rho_{FL} \cdot g \cdot V \quad \text{Einheit : } \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot \text{m}^3 = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{sec}^2} = \text{N}$$

Bei der Herleitung haben wir einen Würfel vorausgesetzt. Gilt $F_A = \rho_{FL} g V$ auch für andere Körper ? Wir finden in der Beziehung nur die Dichte der Flüssigkeit, die Erdbeschleunigung g und das Volumen des Körpers - wir sehen also, die Gestalt des Körpers geht in unsere Beziehung überhaupt nicht ein. Das heißt also, daß die Größe des Auftriebs nur vom Volumen des eingetauchten Körpers abhängt

$$F_A = \rho_{FL} \cdot g \cdot V$$

Jetzt verstehen wir auch, wann ein Körper schwimmt und wann nicht : Wenn F_A genauso groß wie das Gewicht des Körpers ist, so heben sich beide Kräfte auf (da sie in entgegengesetzte Richtungen zeigen) also - der Körper ist in Ruhe : er schwebt in der Flüssigkeit.

also : $G = m \cdot g < F_A$: Körper steigt zur Oberfläche der Flüssigkeit, taucht teilweise ein (bis $F_A = G$) und schwimmt
 $G = F_A$: Körper taucht vollkommen ein und schwebt.
 $G > F_A$: Körper sinkt zum Grund.

2. Strömende Flüssigkeiten

Die nachfolgend beschriebenen Gesetze gelten in ihrer Form auch für strömende Gase, aber nur solange die Strömungsgeschwindigkeiten unter der Schallgeschwindigkeit des betreffenden Gases liegen (bei der Behandlung der Wellen, insbesondere des Schalls werden wir eingehend auf die Schallgeschwindigkeit eingehen).

Zunächst einmal unterscheiden wir zwei Arten von Strömungen :

1. Laminare Strömungen sind Strömungen, bei denen es eine innere Reibung gibt - die aus den Kraftwirkungen zwischen den Molekülen resultiert - bei denen aber keine Wirbelbildung auftritt.
2. Turbulente Strömungen sind solche, bei denen Wirbel entstehen, also Kräfte, die der Bewegungsrichtung entgegenstehen.

Wir wollen uns hier nur auf die erste Art beschränken, also nur die laminare Strömung besprechen. Bei uns wird unter Strömung allgemein laminare Strömung verstanden.

So - Wie entstehen Strömungen ?

Zum Beispiel durch die Schwerkraft - Was bringt einen Bach zum Fließen ? Nun - die Höhendifferenz : die einzelnen Wassermoleküle können - der Schwerkraft gehorchend - zu Tale fließen.

Eine andere Strömungsursache sind Druckdifferenzen - wieso fließt Wasser aus einem Wasserhahn, wenn man ihn aufdreht ? Weil die Wasserrechnung bezahlt ist - Gut. Das ist wohl eine logische Antwort, voller wirtschaftlicher Konsequenzen, aber ohne physikalische Relevanz! Im Wasserwerk wird auf das Wasser, das in die Wasserrohre gepumpt wird, ein starker Druck ausgeübt. Dieser Druck ist größer als der, der auf der anderen Seite des Wasserrohrs - nämlich am häuslichen Hahn - auf das Wasser wirkt (dies ist der Luftdruck). Dann fließt (strömt) das Wasser der Druckdifferenz folgend vom Ort hohen Drucks zum Ort niedrigeren Drucks. Ein besonders eindrucksvolles Beispiel dieser Tatsache zeigt sich, wenn an einem großen Wasserrohr (in dem ein sehr hoher Druck herrscht) durch einen Rohrbruch, dem großen Druck ein relativ kleiner (dem Luftdruck an der Bruchstelle) entgegensteht. Das Ergebnis ist bekannt.

a) Ausflußgeschwindigkeit

In ein Gefäß seien drei Löcher gleichen Durchmessers gebohrt. Sie befinden sich übereinander. Das Gefäß sei mit einer Flüssigkeit gefüllt. Nun fließt diese Flüssigkeit aus den drei Löchern heraus.

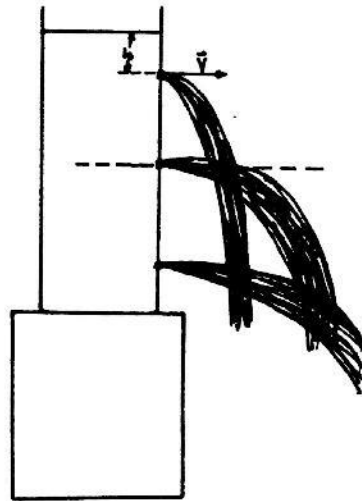
An jedem Loch herrscht ein anderer Schweredruck. Und zwar ist dieser umso größer, je tiefer das Loch angebracht ist. Von dieser Höhe hängt auch die Ausflußgeschwindigkeit ab. Es gilt hier, daß die Ausflußgeschwindigkeit so groß ist wie nach einem freien Fall.

Also mit der Beziehung für die Geschwindigkeit nach dem freien Fall gilt für die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

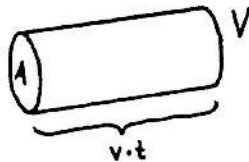
$\mu = 0,62$
 $\mu = 0,85$
 $\mu = 0,90$
 $\mu = 0,99$

In Wirklichkeit ist die Ausflußgeschwindigkeit abhängig von der Ausflußöffnung. Das berücksichtigen wir in der Ausflußzahl μ .



b) Durchfluß durch Röhren

Eine Flüssigkeitsmenge fließt durch ein Rohr. Dieses Rohr habe den Querschnitt A . Das fließende Medium soll mit der Geschwindigkeit v fließen. Diese sei konstant $v = \frac{s}{t}$. Für eine bestimmte Zeit t durchfließen die Flüssigkeitsteilchen die Strecke s . Daher ist $s = v \cdot t$.



Somit erhalten wir für das Volumen der Flüssigkeit, die in der Zeit t mit der Geschwindigkeit v fließt

$$V = A \cdot v \cdot t$$

Teilen wir dies nun durch die Zeit, so erhalten wir ein Volumen pro Zeit, also eine Volumengeschwindigkeit, oder ein

$$\text{Volumenstrom } Q = \frac{V}{t} = A \cdot v$$

Das heißt: durch jeden Querschnitt A fließt in der gleichen Zeit t das gleiche Volumen hindurch. Anders gesagt: Wenn wir in

Rohr vorne den Volumenstrom Q haben, so bekommen wir hinten den gleichen Volumenstrom Q wieder heraus. Also $Q = \text{const.}$! Das heißt aber: Wenn wir ein Rohr haben, bei dem der Querschnitt verschieden groß ist, so ändert sich auch die Fließgeschwindigkeit.

oder:

$$Q = \text{const.} \implies A \cdot v = \text{const.}$$

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

Dies ist die sogenannte Kontinuitätsgleichung, auch Durchflutungsgesetz genannt.

c) Dynamische Viskosität

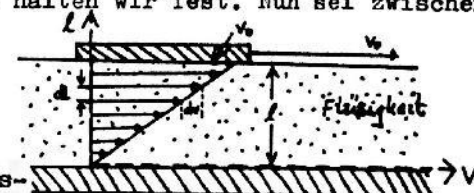
Wir stellen uns vor, wor hätten zwei gegeneinander parallel verschiebbare Glasplatten. Eine davon halten wir fest. Nun sei zwischen beiden eine Flüssigkeitsschicht.

Die eine Platte wollen wir bewegen. Dazu müssen wir eine Kraft aufwenden. Denn:

Zwischen den einzelnen Flüssigkeitsschichten, in die wir uns die gesamte Flüssigkeit gedacht denken können,

herrscht Reibung. Und zwar handelt es sich dabei um eine innere Reibung. Wir denken uns die Breite zwischen beiden Glasplatten (das sei l) in viele Schichten unterteilt, deren Dicke jeweils dl sein soll. Falls wir nun die eine Platte bewegen, und zwar mit der Geschwindigkeit v_0 , so haftet daran die Nachbarflüssigkeitsschicht an und bewegt sich ebenfalls mit der Geschwindigkeit v_0 . An der festen Platte haftet auch die Nachbarschicht an, diese hat also die Geschwindigkeit $v = 0$. Alle Flüssigkeitsschichten dazwischen haben

Geschwindigkeiten zwischen $v = 0$ und $v = v_0$. Und zwar sind diese linear verteilt. Um die eine Platte bewegen zu können, müssen wir eine Reibungskraft überwinden. Diese wollen wir nun berechnen. Zunächst einmal ist diese Reibungskraft proportional zur Berührfläche A . Also $F_R \sim A$. Dann hängt die Reibungskraft ebenfalls von der Geschwindigkeitsdifferenz zwischen zwei benachbarten Schichten ab. Dies drücken wir so aus: Die eine Flüssigkeitsschicht hat die Geschwindigkeit v . Die Nachbarschicht (sie ist um die Strecke dl entfernt) hat die Geschwindigkeit $v + dv$. Die Differenz ist also



dv. Aber die Entfernung zwischen zwei Schichten müssen wir noch berücksichtigen. Es ist die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeitsänderung mit dem Abstand zweier benachbarter Flüssigkeitsschichten. Also

$$F_R \sim \frac{dv}{dl}$$

Sodaß wir insgesamt sagen können $F_R \sim A \cdot \frac{dv}{dl}$. Mit dem Proportionalitätsfaktor η gilt

$$F_R = \eta A \cdot \frac{dv}{dl}$$

η nennen wir dynamische Viskosität. Diese gibt uns Auskunft darüber wie zäh eine Flüssigkeit oder ein Gas ist.

Betrachten wir uns noch die Einheit :

$$\eta = \frac{F_R dl}{A dv} \quad \text{also } [\eta] = \frac{N \cdot m \cdot sec}{m^2 \cdot m} = \frac{kg \cdot m \cdot sec}{sec^2 \cdot m^2} = \frac{kg}{sec \cdot m} = Pa \cdot sec$$

Für die Viskosität gibt es eine eigene Einheit, nämlich das Poise (P), und zwar gilt

$$1 \text{ Poise (P)} = 0,1 \frac{N \cdot sec}{m^2}$$

Schauen wir uns die Beziehung noch einmal an. Darin stand die Geschwindigkeitsänderung pro Schichtdicke $\frac{dv}{dl}$. Dies ist ja nichts anderes als die Steigung der Geraden durch die Pfeilspitzen in der Zeichnung auf der vorhergehenden Seite. Diese ist linear, also ist die Steigung konstant, und statt $\frac{dv}{dl}$ können wir schreiben

$$\frac{dv}{dl} = \frac{v}{l} \quad \text{also folgt}$$

$$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{l}$$

F_R = innere Reibungskraft
 A = Berührfläche
 v = Relativgeschwindigkeit zwischen den

Berührflächen, l = Abstand der Berührflächen voneinander,
 η = dynamische Viskosität.

Man kennt dann zusätzlich noch die kinematische Viskosität ν . Sie ist die auf die Dichte ρ bezogene dynamische Viskosität

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{\text{dynamische Viskosität}}{\text{Dichte}}$$

d) Laminare Strömung durch ein Rohr

Wir untersuchen hier die Bedingung, wie die Flüssigkeitsmenge, die durch ein Rohr fließt, von Druckunterschied, Radius, Zeit, Rohrlänge usw. abhängt. Wie sollen wir das tun?

Eine Menge Wasser, beispielsweise, fließt durch ein Rohr der Länge l . Die Fließgeschwindigkeit (d.h. das Flüssigkeitsvolumen pro Zeit) hängt von der inneren Reibung ab. Aber auch vom Rohrdurchmesser. Machen wir einen Versuch: Wir untersuchen die Reibungskraft, die auf einen kleinen Hohlzylinder, der in unserem Rohr sein soll, wirkt. Warum?

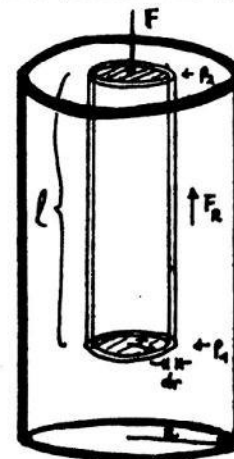
Nun - Ganz außen, an der Rohrwand haftende Teilchen bewegen sich überhaupt nicht, die Teilchen, die genau in der Mitte sind, haben die größte Geschwindigkeit. Das ist genau wie bei einem Fluß. Die Strömungsgeschwindigkeit ist in der Mitte am größten.

Wir können uns das in unserem Rohr so vorstellen: In der Mitte sei ein ganz dünner Strom von Teilchen, die Maximalgeschwindigkeit haben. Direkt um diesen dünnen Strom liegt ein ganz schmaler Hohlzylinder, in ihm sind die Teilchen zusammengefaßt, deren Geschwindigkeit etwas kleiner ist. Darum liegt wieder ein Hohlzylinder. Dort ist die Geschwindigkeit noch kleiner. Und so fort, bis wir einen Zylinder haben, der direkt an der Rohrwand anliegt, und dessen Flüssigkeit kaum eine Geschwindigkeit haben.



Wir picken uns jetzt einen solchen Hohlzylinder heraus und untersuchen ihn etwas näher. Wir wissen, daß auf diesen Hohlzylinder von den Nachbarschichten Reibungskräfte wirken. Diese wollen wir zunächst einmal bestimmen:

Unser kleiner Hohlzylinder (das ist ja nichts anderes als eine Menge von Teilchen, die alle die gleiche Geschwindigkeit haben) habe die Länge l und den Radius r . Die Wanddicke sei dr . R sei der Innenradius des gesamten Rohres, η sei die dynamische Viskosität der Flüssigkeit und $\Delta p = p_2 - p_1$ sei die Druckdifferenz am Ende und am Anfang unseres Zylinders. Diese ist notwendig, da ohne Druckdifferenz keine



Strömung vorhanden ist.

Was wollen wir nun ?

Wir suchen die Geschwindigkeitsverteilung von innen nach außen in unserem Rohr (und daraus ermitteln wir dann die Flüssigkeitsmenge pro Zeit, die durch unser Rohr strömt). Dazu haben wir uns nun einen gedachten Hohlzylinder herausgesucht (der aus den Flüssigkeitsteilchen besteht, die die gleiche Geschwindigkeit haben).

Parallel zur Rohrachse wirken auf diesen Zylinder zwei Kräfte :

1. die Kraft, die die Flüssigkeit vorantreibt, (F)

2. eine Reibungskraft (F_R)

Was treibt die Flüssigkeit voran - weshalb strömt sie ?

Weil ein Druckgefälle da ist, also :

$F = p \cdot A$, also hier Druck auf die Stirnfläche des Zylinders : Kraft oben $F_2 = A \cdot p_2$ und Kraft unten $F_1 = A \cdot p_1$. Insgesamt herrscht die Kraft

$$F = A \cdot \Delta p = \pi r^2 \cdot \Delta p .$$

Wie sieht die Reibungskraft aus ?

Wir wissen $F_R = \eta A \frac{dv}{dl}$. Und was ist A? Die Berührfläche, also hier die Mantelfläche des Zylinders $A = 2\pi r l$.

$$\text{also } F_R = \eta \cdot 2\pi r \cdot l \cdot \frac{dv}{dr}$$

Wir nehmen an, daß es sich in unserem Rohr um eine stationäre Strömung handelt, das heißt, die Fließgeschwindigkeit ist konstant. Dann heben sich beide, am Zylinder angreifenden Kräfte auf, bzw. es gilt

$$\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr} = - r^2 \pi \Delta p$$

$$2\eta l \frac{dv}{dr} = - r \Delta p \quad \text{oder} \quad dv = - \frac{\Delta p r}{2\eta} \cdot dr$$

Dies ist die Geschwindigkeit, die direkt am Rande unseres Zylinders vorhanden ist. Integrieren wir nun über den gesamten Radius, so erhalten wir eine Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Radius, und dies ist unsere gesuchte Geschwindigkeitsverteilung :

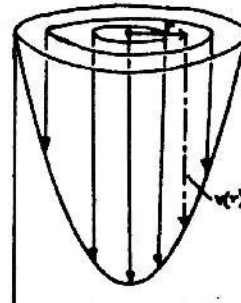
$$\int_0^v dv = - \int_R^r \frac{\Delta p r}{2\eta} dr$$

Ein Wort zu den Grenzen : Für $r = R$, d.h., an der Rohrwand ist $v = 0$.

also $v = - \frac{\Delta p}{2\eta} \cdot \frac{1}{2}(r^2 - R^2)$ und dies ist die Geschwindigkeitsverteilung

$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta}(R^2 - r^2)$ Nun wissen wir also, wie die

Geschwindigkeit vom Radius abhängt, bzw. wie sich die Geschwindigkeit von außen nach innen ändert.



Zunächst einmal sehen wir, daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit quadratisch ist, also

$$v(r) \sim r^2 . \text{ Es handelt sich also}$$

um eine Parabel, hier, im dreidimensionalen um eine Rotationsparabel.

So-jetzt suchen wir noch - denn das war unser ursprüngliches Problem - die pro

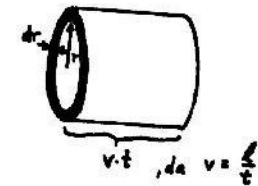
Zeit durch das Rohr fließende Flüssigkeitsmenge. Was wir bisher wissen ist, welche Geschwindigkeit wo auftritt.

Wir berechnen die Flüssigkeitsmenge V , die pro Zeit t durch ein glattes Rohr (Länge l , Radius R) fließt, und an dem die Druckdifferenz Δp herrscht.

Durch einen Hohlzylinder fließt zwischen r und $r + dr$ pro Zeit t das Volumen dV .

$$dV = 2\pi r \cdot dr \cdot t \cdot v . \text{ Warum ?}$$

Siehe rechtes Bild. Volumen des Hohlzylinders ist



obere Ringfläche mal Länge .

Die Länge des Zylinders ist $v \cdot t$, genau wie im Kapitel 2.b) S. 60. Nun zur Ringfläche. Ringfläche ist $\pi(r + dr)^2 - \pi r^2$

$$\begin{aligned} \text{Also } A_r &= \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(r^2 + 2r \cdot dr + (dr)^2 - r^2) \\ &= \pi(2r \cdot dr + (dr)^2) \end{aligned}$$

Nun ist dr eine sehr kleine Länge (zumindest viel kleiner als r), d.h. $(dr)^2$ ist noch wesentlich kleiner, also können wir es vernachlässigen. Somit hat die Ringfläche die Größe $2\pi r dr$.

Also $dV = 2\pi r \cdot dr \cdot t \cdot v$, v , die Geschwindigkeit, hängt aber davon ab,

wo wir den Hohlzylinder betrachten, d.h. von r . Aber diese Abhängigkeit haben wir ja bereits berechnet:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta}(R^2 - r^2) \implies dV = \frac{2\pi r \cdot dr \cdot t \cdot \Delta p (R^2 - r^2)}{4\eta l}$$

Das ist die Flüssigkeitsmenge, die durch den kleinen Hohlzylinder mit dem Radius r fließt. Um nun die Fließmenge durch das ganze Rohr zu ermitteln, müssen wir über r von 0 bis R integrieren.

$$\begin{aligned} \text{also } V &= \int_{v_0}^V dV = \int_{r=0}^{r=R} 2\pi t \cdot \frac{\Delta p (R^2 - r^2)}{4\eta l} r dr \\ &= \frac{2\pi t \cdot \Delta p}{4\eta l} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{2\pi t \Delta p}{4\eta l} \left[R^2 r - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{2\pi t \Delta p}{4\eta l} \left[R^2 \cdot \frac{R}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = \frac{2\pi t \Delta p}{4\eta l} \cdot \frac{R^4}{4} \end{aligned}$$

also folgt für die Fließgeschwindigkeit

$$\frac{V}{t} = \frac{\Delta p \pi}{8\eta l} \cdot R^4 \quad \text{Gesetz von Hagen - Poiseuille}$$

Man sieht, daß die Fließgeschwindigkeit sehr stark vom Rohrradius abhängt. Wenn man also zum Beispiel eine größere Wassermenge transportieren will, so ist es viel besser, den Rohrradius zu vergrößern, als zum Beispiel den Druckunterschied größer zu machen.

Aus dem Gesetz von Hagen - Poiseuille können wir auch noch etwas anderes ablesen. Nehmen wir an, wir hätten ein Rohr mit konstantem Rohrquerschnitt. Wir können das obige Gesetz nach $\Delta p/l$ auflösen, also

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{8 V \eta}{\pi r R^4} = \text{const.} \quad \text{Somit ist } \Delta p \sim l, \text{ und das heißt}$$

Der Druckabfall in einem Rohr mit konstantem Querschnitt ist proportional zur Länge!

Durch Gleichsetzen der Druckkraft (das war die Kraft, die durch die Druckdifferenz bedingt, für die Strömung sorgte) und der Reibungskraft erhalten wir die vom strömenden Medium auf die Rohrwand ausgeübte Reibungskraft. Denn dort sind die Teilchen in Ruhe, und das heißt, daß sich alle Kräfte aufheben:

$$F_R = -F = -R^2 \pi \Delta p = R^2 \pi \cdot \frac{8 \eta l \cdot V}{\pi r R^4} = \frac{8 \eta l \cdot V}{R^2 \cdot t}$$

e) Laminare Strömung um eine Kugel

Bewegt sich eine Kugel durch eine Flüssigkeit, so übt die Flüssigkeit eine Reibungskraft auf die Kugel aus.

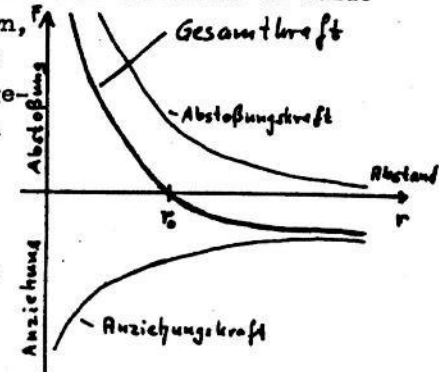
Diese ist nach dem Stokesschen Gesetz $F_R = 6\pi \eta r v$

wobei r der Radius der Kugel, v die Geschwindigkeit der Kugel, und η die Viskosität der Flüssigkeit ist.

Dieses Gesetz ist ohne Herleitung angegeben, da die Herleitung ziemlich schwierig ist.

3. Molekularkräfte

Zwischen den Molekülen (bzw. Atomen oder Ionen) wirken Kräfte, deren Größe für den Aggregatzustand bestimmend ist. Bei Festkörpern und Flüssigkeiten bestimmen diese Kräfte noch das Volumen, bzw. die Gestalt. Einen Körper (fest oder flüssig) kann man zusammendrücken, aber auch auseinanderziehen. Das heißt aber, daß ohne Krafteinwirkung die Moleküle einen bestimmten Abstand voneinander haben müssen. Dieser wird beim Zusammendrücken verkleinert und beim Dehnen vergrößert. Nehmen wir einen Gummistab in beide Hände und versuchen, ihn zu verlängern, also zu dehnen. Wir müssen eine Kraft aufwenden. Haben wir den Stab etwas gedehnt, spüren wir eine Kraft, die den Stab wieder zusammenzuziehen sucht. Es wirken also im Stab zwischen den Molekülen anziehende Kräfte.



Versuchen wir allerdings, den Stab zu stauchen, gilt genau das Umgekehrte. Dann verspürt man Kräfte, die die Moleküle wieder auseinanderzudrücken suchen. Es sind dann also abstoßende Kräfte im Spiel. Es erscheint logisch, daß es anziehende und abstoßende Kräfte gibt, und daß die Moleküle ohne Krafteinwirkung einen bestimmten Abstand einnehmen, bei dem die Kräfte im Gleichgewicht sind.

Bei kleinerem als dem Normalabstand sind die Kräfte abstoßend, bei größerem Abstand sind sie anziehend. Die Molekularkräfte sind resultierende der beiden. Vergleiche dazu obige Skizze:

Dort sind über den Abstand r die Kräfte aufgetragen. Anziehende und abstoßende Kräfte addieren sich zur Gesamtkraft, die beim Normalabstand r_0 eine Nullstelle aufweist.

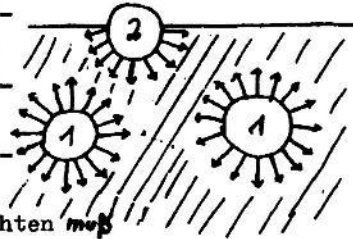
Die Reichweiten der Molekularkräfte sind sehr gering (ca. $10^{-8} \text{ m} \approx 100 \text{ \AA} = 10 \text{ nm}$)

Kräfte zwischen den Molekülen des ein und desselben Stoffes nennt man Kohäsionskräfte (Zusammenhangskräfte), solche zwischen den Molekülen zweier verschiedener Stoffe heißen Adhäsionskräfte (Anhangskräfte).

a) Oberflächenspannung

Die Oberflächenspannung ist eine Folge der Kohäsion. Wir betrachten einige Moleküle, die zu einer Flüssigkeit gehören :

Bei Molekül 1 (es ist im Innern der Flüssigkeit) heben sich alle Kohäsionskräfte gegenseitig auf. Bei Molekül 2 (es befindet sich an der Flüssigkeitsoberfläche) ergibt sich eine resultierende Kohäsionskraft, die ins Innere zeigt.



Daraus folgt aber, daß man Arbeit verrichten muß um ein Molekül gegen diese resultierende Kraft an die Oberfläche zu bringen. \Rightarrow Oberflächenmoleküle besitzen eine potentielle Energie, die sogenannte Oberflächenenergie.

Fehlen äußere Kräfte, so nehmen alle Systeme ein Energieminimum an. Alle Systeme versuchen in den Zustand minimaler potentieller Energie zu kommen (ein Stein fällt nach unten - dort ist E_{pot} kleiner als oben). Falls bei einer Flüssigkeit keine äußeren Kräfte wirken, wird auch die Oberflächenenergie minimal, dadurch wird auch die Oberfläche selbst minimal. Eine kleine Flüssigkeitsmenge strebt stets danach, seine Oberfläche zu verkleinern. Freie Flüssigkeitsoberflächen nehmen Kugelform an (Wassertropfen !).

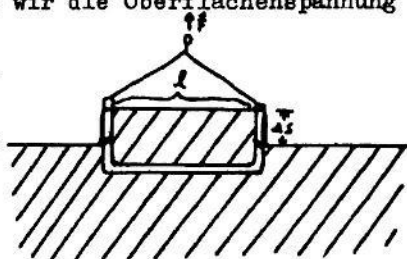
Wir definieren die Oberflächenspannung :
 Oberflächenenergie = zur Oberflächenvergrößerung aufgewendete Arbeit / Oberflächenänderung

$$= \frac{\Delta W}{\Delta A} = \sigma$$

Einheit : $[\sigma] = \frac{J}{m^2} = \frac{Nm}{m^2} = \frac{N}{m} = \frac{kg}{sec^2}$

Die Oberflächenspannung gibt uns an, wie groß das Bestreben der Flüssigkeit ist, minimale Oberfläche zu erreichen. In ihr steckt die potentielle Energie.

Mit Hilfe der Bügelmethode können wir die Oberflächenspannung messen. Mit Hilfe eines Drahtbügels wird eine Flüssigkeitslamelle gebildet. Das heißt, daß wir die vorhandene Oberfläche vergrößern, und zwar um den Flächenanteil der Lamelle. Wir vergrößern die Oberfläche und



kurz vor dem Abreißen dieser Oberfläche, d.h. wenn sie ganz dünn geworden ist, messen wir die Kraft, mit der wir zum Vergrößern am Bügel ziehen müssen. Es gilt nun

$$\text{da } \Delta W = F \cdot \Delta s \quad \text{und} \quad \Delta A = 2 \cdot \Delta s \cdot l \quad (\text{Oberflächenvergrößerung})$$

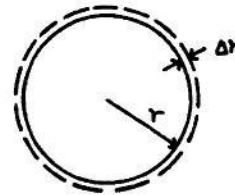
↑
die 2 steht, da die Oberfläche am Bügel eine Vor- und Rückseite hat (doppelseitig)

Also gilt für die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \cdot \Delta s}{2 \cdot \Delta s \cdot l} = \frac{F}{2l}$$

Anwendung

Ein Tropfen bildet sich, wenn eine kleine Flüssigkeitsmenge keiner äußeren Kraft unterliegt. Die Oberfläche minimiert sich, der Tropfen wird kugelförmig. In diesem Tropfen herrscht ein bestimmter Druck, der von σ und damit auch von der Art der Flüssigkeit abhängt.



Angenommen wir haben einen kugelförmigen Tropfen des Radius r. Nun vergrößern wir die Oberfläche so, daß der Radius um Δr größer wird (also $A \rightarrow A + \Delta A$)

Dazu wenden wir die Arbeit auf

$$\Delta W = \sigma \cdot \Delta A = \sigma (4\pi(r + \Delta r)^2 - 4\pi r^2) = \sigma (4\pi r^2 + 8\pi r \Delta r + 4\pi \Delta r^2 - 4\pi r^2)$$

hier vernachlässigen wir wieder Δr^2 , da es gegenüber $r \cdot \Delta r$ sehr klein ist \Rightarrow

$$\Delta W = \sigma 8\pi r \Delta r$$

andererseits ist die aufzuwendende Arbeit $\Delta W = F \cdot \Delta r = p A \Delta r = p \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r$

Beides gleichsetzen :

$$\sigma 8\pi r \Delta r = p \cdot 4\pi r^2 \Delta r \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2\sigma}{r}$$

Betrachten wir dazu ein Zahlenbeispiel

Der Druck in einem Tropfen (Radius r) ist in Pa :

Flüssigkeit	$\sigma \left(\frac{N}{m} \right)$	r (mm)	p(Pa)	r(mm)	p(Pa)	r(mm)	p(Pa)
H ₂ O	0,0727	1	145,4	2	72,7	3	48,46
Hg	0,465	1	930	2	465	3	310
Äthanol	0,0223	1	44,6	2	22,3	3	14,87
Terpentinöl	0,0268	1	53,6	2	26,8	3	17,87

b) Kapillarität

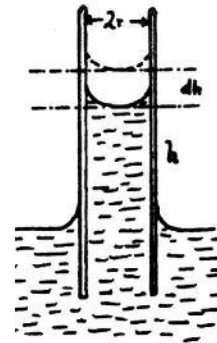
In einer Flüssigkeit, auch im Gas, wirken Kräfte. Wie wir bereits gesehen haben, gibt es Adhäsions- und Kohäsionskräfte. Zwischen der Gefäßwand und den Flüssigkeitsmolekülen wirken Adhäsionskräfte. Diese verursachen im Zusammenwirken mit den Kohäsionskräften den Randwinkel α zwischen Gefäßwand und Flüssigkeitsoberfläche. Die Resultierende aus Kohäsionskraft F_k und Adhäsionskraft F_a steht immer senkrecht auf der Oberfläche. Es kommt stets auf die Größen von F_k und F_a an, wie groß der Winkel α ist.



Wenn $\alpha < 90^\circ$, nennen wir die Flüssigkeit benetzend (z.B. H_2O)
 Falls $\alpha > 90^\circ$, nennen wir sie nicht benetzend (z. B. Hg).



Kapillarität nun, nennen wir die Erscheinung, daß in einem engen Rohr (Kapillare) eine Flüssigkeit um eine bestimmte Höhe h höher, oder tiefer steht, als es nach dem oben gesagten für verbundene Gefäße sein dürfte. Tauchen wir z.B. ein enges Rohr in eine Flüssigkeit, so steigt diese um die Höhe h (falls es sich um eine benetzende Flüssigkeit handelt), bzw. sie fällt um h . Die Flüssigkeit benetzt die Innenwand des Rohres, und zwar umso höher, je dünner das Rohr ist. Wieso? - durch das Ansteigen der Flüssigkeit verkleinert sich die Flüssigkeitsoberfläche und somit auch die Oberflächenenergie. Jedes System (auch der Mensch!) ist bestrebt ein Energieminimum anzunehmen. Eine kleine Hebung des Meniskus (das ist die gekrümmte Oberfläche der Flüssigkeit) um dh gibt eine Oberflächenverkleinerung von $dA = 2\pi r \cdot dh$. Dieses Flächenstück fehlt auf dem Meniskus. Ihm entspricht eine Energieverkleinerung von $dE = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dh$ (nach $\sigma = \Delta W / \Delta A$). Diese Energie wird sozusagen frei, um die Flüssigkeitssäule anzuheben. Diese hat das Volumen $\pi r^2 \cdot dh$.



Sie wird nun durch die freigewordene Energie dE um h angehoben. Und zwar soweit, bis Gleichgewicht zwischen dieser Energie und der Hubarbeit herrscht. Die Hubarbeit, ein solches Volumen um h anzuheben ist

$$dW = dF \cdot h = dm \cdot g \cdot h = \rho \pi r^2 \cdot dh \cdot g \cdot h \quad (\text{da } \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 h})$$

$$\text{und daher } m = \rho \pi r^2 h \implies dm = \rho \pi r^2 \cdot dh$$

Also: da die frei gewordene Energie als Hubarbeit das Flüssigkeitsvolumen um h hebt, müssen wir beide gleichsetzen:

$$dE = dW \quad \text{oder} \quad \sigma 2\pi r \cdot dh = \rho \pi r^2 \cdot dh \cdot g \cdot h$$

$$\text{daraus folgt: } 2\sigma = \rho r g h \quad \text{oder} \quad h = \frac{2\sigma}{\rho r g}$$

So - jetzt müssen wir noch den Benetzungswinkel ins Spiel bringen. Betrachten wir uns die Flüssigkeitsoberfläche. Sie habe den Krümmungsradius r_k . r ist der Rohrradius. Man sieht, daß beide über den Benetzungswinkel α zusammenhängen.

Es gilt:

$$\cos \alpha = \frac{r}{r_k}$$

Bei der vorigen Herleitung haben wir stillschweigend einen Benetzungswinkel von $\alpha = 0^\circ$ angenommen.

Und zwar als wir sagten, daß sich die ursprünglich leere Innenfläche des Rohres benetzt hat. Dort ist also die Flüssigkeitsoberfläche parallel zur Rohrwand, somit ist $\alpha = 0^\circ$. Falls $r = r_k$, stimmt die oben errechnete Steighöhe.

Allgemein aber ist $r = r_k \cdot \cos \alpha$, bzw. $r_k = \frac{r}{\cos \alpha}$

Oben war $r = r_k$. Ist dies nicht der Fall, verringert sich die Steighöhe entsprechend. Es gilt dann:

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho r g}$$

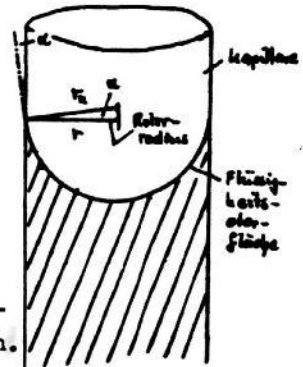
Steighöhe in der Kapillare:

Beispiel: α für Grenzfläche H_2O - Glas ist ca. 0°
 α für Grenzfläche Hg - Glas ist ca. 140°

$$\sigma_{H_2O} = 0,0727 \frac{N}{m} ; \quad \sigma_{Hg} = 0,465 \frac{N}{m} ; \quad \rho_{H_2O} = 1 \frac{kg}{l} ; \quad \rho_{Hg} = 13,546 \frac{kg}{l}$$

$$\text{also } h \cdot r_{H_2O} = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho \cdot g} = \frac{2 \cdot 0,0727 \cdot 1}{9,81 \cdot 1000} \left[\frac{N \cdot m \cdot \cos^2}{m \cdot kg \cdot m} \cdot \frac{kg \cdot m \cdot m^3}{m^3 \cdot kg} \right] = 1,48 \cdot 10^{-5} m^2$$

$$h \cdot r_{Hg} = \frac{2 \cdot 0,465 \cdot (-0,766)}{9,81 \cdot 13546} [m^2] = -5,4 \cdot 10^{-6} m^2$$



Wir haben eben $h \cdot r$ berechnet. Dies ist also für Wasser $1,48 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ und für Quecksilber $-5,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

Wenn wir nun eine Kapillare von $r = 0,5 \text{ mm}$ Durchmesser betrachten (d.h. Radius $r = 0,25 \text{ mm}$) $\Rightarrow r = 0,00025 \text{ m}$

$$h_{\text{H}_2\text{O}} = 1,48 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \frac{1}{0,00025 \text{ m}} = 5,92 \text{ cm}$$

$$h_{\text{Hg}} = -5,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \frac{1}{0,00025 \text{ m}} = -2,16 \text{ cm}.$$

Kapillarität ist ein sehr wichtiges Phänomen. Beispielsweise in der Biologie. Bäume erhalten ihre Nährstoffe in Wasser gelöst aus der Erde. Diese Lösungen treten an den Wurzeln ein und werden durch Kapillarkräfte bis in Höhen von etwa 100 m gesogen (dem entspricht ein Kapillarradius von $1,48 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$!!).

Auch die Saugwirkung von Löschpapier, Filterpapier, Schwämmen, Bierdeckeln, Watte etc. beruht auf Kapillarität.

c) Molekularkräfte

Ich möchte hier, an dieser Stelle ganz kurz auf die Molekularbewegungen eingehen. Alle Moleküle haben eine kinetische Energie. Auf Grund dessen befinden sie sich andauernd in Bewegung. In festen Stoffen sieht das so aus, daß die Moleküle um eine feste Lage schwingen. In Flüssigkeiten bewegen sich die Moleküle auch, aber die Plätze sind veränderlich. In den Gasen bewegen sich die Moleküle mit relativ großer Geschwindigkeit, da die Kohäsionskräfte fehlen. Bei der Bewegung der Gasmoleküle, stoßen diese auch des öfteren gegeneinander. Dazwischen bewegen sie sich geradlinig. Makroskopisch sieht das wie eine Zick-Zack-Bewegung aus. Diese kann man sichtbar machen, wenn man zum Beispiel kleine Teilchen (wie Rauch oder Farbstoffe), die unter der Wirkung der bewegten Moleküle hin und her geschubst werden, unter dem Mikroskop betrachtet. Diese regellose Bewegung nennt man auch Brownsche Molekularbewegung.

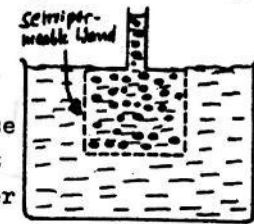
Diffusion: Unter Diffusion versteht man das selbstständige Vermischen der Moleküle als Folge ihrer thermischen Bewegung. In der Wärmelehre werden wir noch ausgiebig auf die thermische Bewegung eingehen. Sie ist nichts anderes als die oben besprochene Molekularbewegung. Als Diffusion bezeichnet man also den Ortswechsel der Moleküle relativ zueinander. Dabei nennt man Selbst- oder Eigendiffusion die Vermischung von Molekülen gleicher Art, Fremddiffusion die Durch-

mischung verschieden gearteter Moleküle.

Osmose

Eine Wand nennt man semipermeabel, wenn sie für Lösungsmittel durchlässig ist, die gelösten Moleküle allerdings nicht passieren läßt.

Füllt man in eine von einer semipermeablen Wand umgebene und mit einem Steigrohr versehene Zelle eine geeignete Lösung und stellt sie in ein Gefäß mit Wasser, so drängt durch diese Membran Wasser nach innen. Die Flüssigkeit steigt im Steigrohr nach oben. Und zwar so lange, bis der hydrostatische Druck im Steigrohr zu groß wird.



Nun herrscht in der Zelle der osmotische Druck p_0 , der dann so groß ist wie der hydrostatische Druck im Steigrohr

4. Aerostatik

a) Luftdruck

Bei den Flüssigkeiten fanden wir einen Schweredruck. Dieser war gleich $p = \rho \cdot g \cdot h$. Also war der Schweredruck der Flüssigkeiten proportional zur Höhe h .

Bei den Flüssigkeiten stieg der Druck linear mit der Höhe.

Bei den Gasen nun, ist das etwas anders.

Dort gilt diese Proportionalität nicht mehr. Und zwar deshalb, weil auch die Dichte abhängig von der Höhe ist.

Aber warum ist das so?

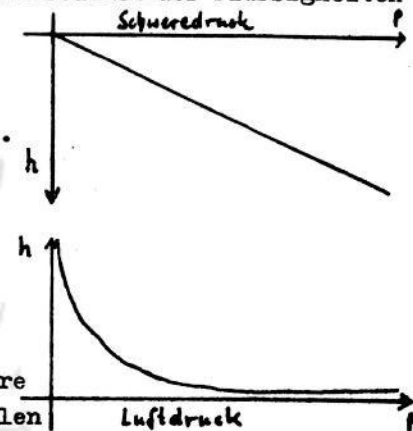
Im Gegensatz zu den Flüssigkeiten sind die Gase sehr kompressibel.

Eine hohe Gassäule hat unten eine größere Dichte als oben, da das Gewicht der vielen höherliegenden Moleküle die unteren mehr zusammendrängt. Die Dichte ist unten größer, also auch der Druck.

Es ergibt sich eine exponentielle Druckzunahme mit der Höhe.

Dies wollen wir uns nun herleiten. Im Ansatz können wir allerdings die Formel für den Schweredruck verwenden: $p = \rho g h$.

-66- Für ganz kleine Höhenänderung dh (nehmen wir an, wir gehen nach



oben) nimmt der Druck auch um eine kleine Größe dp ab.

Insgesamt ergibt sich also :

$$dp = - \rho g dh$$

Nun wissen wir berücksichtigen, daß die Dichte von der Höhe abhängt. aber wie hängt sie von der Höhe ab ?

Hierzu müssen wir nun eine Beziehung aus der Wärmelehre vorwegnehmen, die allerdings recht bekannt ist, und zwar handelt es sich dabei um das Gesetz von Boyle - Mariotte. Dieses sagt aus, daß bei einer Gasmenge bei gleichbleibender Temperatur das Erprodukt aus Druck und Volumen konstant ist. Oder - anders ausgedrückt :

Das Volumen eines eingeschlossenen Gases ist bei gleicher Temperatur seinem Druck proportional. Es gilt also $p \cdot V = \text{const.}$

also können wir auch sagen, daß $p_1 V_1 = p_2 V_2$. Die Indizes 1 und 2

beziehen sich auf verschiedene Zeiten, bzw. verschiedene Höhen

Anders ausgedrückt. Normaldruck mal Normalvolumen = $p(h) \cdot V(h)$

$$\text{Da aber } V = \frac{m}{\rho} \implies p_0 V_0 = p_0 \cdot \frac{m}{\rho} = p V(h) = p \frac{m}{\rho(h)}$$

und daraus folgt : $\rho(h) = \rho_0 \cdot \frac{p(h)}{p_0}$

Also - Dichte in der Höhe h ist gleich Dichte bei Höhe 0 mal Druck in der Höhe h geteilt durch Druck in der Höhe 0.

Dies können wir nun ganz oben einsetzen :

$$dp = - \int_0^h \frac{p(h)}{p_0} \rho_0 g dh \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p(h)} = - \frac{\rho_0}{p_0} g \cdot dh$$

Dies ist also eine infinitesimal kleine Druckänderung bei infinitesimal kleiner Höhenänderung. Um die gesamte Abhängigkeit zu bekommen müssen wir integrieren :

$$\int_{p_0}^{p(h)} \frac{dp}{p} = - \int_0^h \frac{\rho_0}{p_0} g dh$$

und dies ist gleich

$$\ln \frac{p(h)}{p_0} = - \frac{\rho_0}{p_0} g \cdot h \quad \text{und das gibt}$$

Wir müssen vom Boden (Höhe $h=0$), wo der Druck p_0 herrscht bis zur Höhe h integrieren, wo der Druck $p(h)$ herrscht.

$$\left(\ln \frac{p(h)}{p_0} \right) = e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$$

also $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h}$

Barometrische Höhenformel

Für Luft (bei $p_0 = 101,325 \text{ kPa}$, 0°C) ergibt sich :

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7,99 \text{ km}}}$$

b) Luftdruckmessung

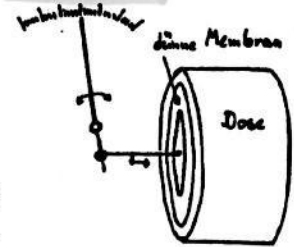
Wie mißt man den Luftdruck ?

Wir wollen hier ganz kurz zwei Methoden beschreiben.

Man mißt den Luftdruck mit dem sogenannten Barometer.

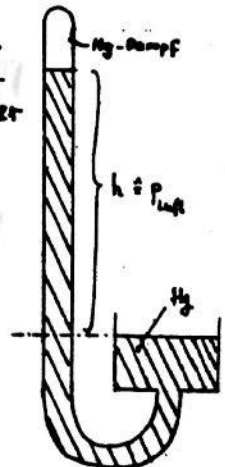
1) Dosenbarometer

Es handelt sich hierbei um eine Dose, die auf der einen Seite von einer dünnen Membran abgeschlossen, und die ansonsten luftdicht verschlossen ist. Ist der Luftdruck gleich dem Innendruck in der Dose, ist die Membran entspannt. Ändert sich der Luftdruck, so vergrößert sich das Dosenvolumen, oder es wird kleiner. An der Membran ist direkt ein Zeiger angeschlossen, bei dem man den Luftdruck ablesen kann.



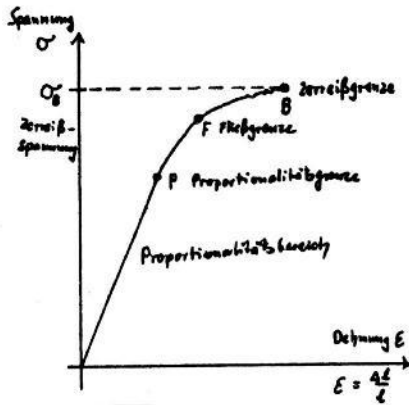
2) Quecksilberbarometer

Wir haben ein U-Rohr aus Glas. Der eine Schenkel ist länger, als der andere. An diesem anderen Schenkel ist eine kleine Wanne, gefüllt mit Quecksilber angebracht. Das obere Ende des langen Schenkels ist geschlossen und enthält Quecksilberdampf. Je stärker nun der Luftdruck, desto stärker drückt dieser auf das Quecksilber. Dieses steigt sodann nach oben, deshalb ist die Quecksilberhöhe ein Maß für den Luftdruck.



5. Elastizität fester Körper

Feste Körper sind nicht starr, wie wir bisher immer idealisiert haben, sondern sie sind elastisch und auch komprimierbar. Lassen wir auf einen festen Körper eine Kraft wirken, so deformiert sich dieser. Geht die Deformation nach der Krafteinwirkung wieder zurück, so nennen wir den Körper elastisch. Bleibt die Deformation aber, auch wenn wir keine Kraft mehr wirken lassen, so nennen wir den Körper plastisch.



Zwischen der Spannung und der Dehnung können wir eine Funktion auftragen. Doch zunächst müssen wir uns erst einmal klar werden, was Dehnung und Spannung sind. Die Spannung ist der Druck oder Zug, den wir dem Körper angedehnt lassen, die Dehnung ist seine Reaktion: eine Längenänderung.

Ohne Spannung ist die Dehnung 0 klar! Danach sind bis zum Punkt P Spannung und Dehnung einander proportional. Danach ergeben sich größere Längenänderungen. Ab Punkt F (Fließgrenze) beginnt der Körper zu "zerfließen" er ist plastisch. Und ab Punkt B ist die Zerreißgrenze erreicht- er zerreißt.

Nun wollen wir uns verschiedene Einwirkungen auf den festen Körper genauer ansehen, und einige Gesetzmäßigkeiten finden.

a) Dehnung

Wir wollen einen Stab in der Länge ändern. Wir dehnen ihn. Es soll die ursprüngliche Länge l haben.

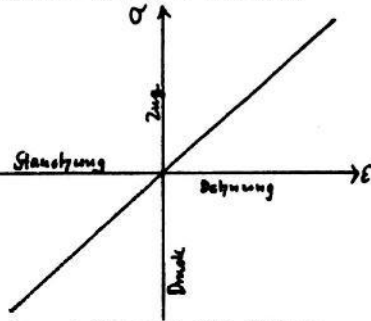
Eine Zug- oder Druckkraft auf einen Stab verursacht eine Längenänderung um Δl . Diese Änderung Δl hängt ab von den Abmessungen des Stabes, von der einwirkenden Kraft und vom Material.

Wir betrachten nun Einwirkungen nur im Proportionalitätsbereich. Das ist im oberen Diagramm der Bereich zwischen Punkt P und dem Ursprung. Dort ist der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung linear. Ziehen wir an dem Stab, lassen wir also einen Zug wirken, so wird der Stab gedehnt. Drücken wir ($\hat{=}$ Druck), so stauchen wir ihn.

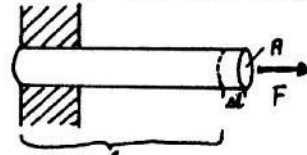
Zunächst möchte ich noch etwas zur Spannung sagen. Irgendeine Einwirkung auf einen festen Körper rührt von einer Kraft her. Diese Kraft wirkt auf eine Fläche, z.B. auf die Stirnfläche unseres Stabes. Daher definieren wir als Spannung:

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{F}{A} \quad (\text{diesem entspricht ein Druck})$$

Und mit $\frac{\Delta l}{l}$ bezeichnen wir eine relative Längenänderung $= \epsilon$.



So - nun wollen wir uns den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung (= relative Längenänderung) genauer ansehen.



Wir halten einen Stab, mit der Querschnittsfläche A , fest eingespannt und lassen auf die Stirnfläche eine Kraft F parallel zur Längsrichtung des Stabes wirken. Was geschieht?

Der Stab verlängert sich (wenn wir, wie hier eine Zugkraft ausüben), bzw. er verkürzt sich (wenn wir eine Druckkraft wirken lassen). Dabei sind Spannung (d.h. Druck- oder Zugkraft) und relative Längenänderung ($\hat{=}$ Dehnung) einander proportional:

$$\frac{F}{A} \sim \frac{\Delta l}{l} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \quad \text{oder} \quad \sigma = E \cdot \epsilon$$

Dies ist das Hooke'sche Gesetz.

Der Proportionalitätsfaktor E heißt Elastizitätsmodul. Dieser Elastizitätsmodul ist eine stoffabhängige Größe. Er hat die Einheit

$$E = \frac{F}{A} \cdot \frac{l}{\Delta l} \quad \text{also} \quad [E] = \frac{N \cdot m}{m^2 \cdot m} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Nehmen wir an, wir spannen verschiedene Stäbe gleicher Abmessungen mit einer Seite in einen Schraubstock ein. Nun lassen wir auf alle die gleiche Kraft, d.h. also die gleiche Spannung σ wirken. Jetzt messen wir die Längenänderung $\frac{\Delta l}{l}$. Wir stellen fest:

Dort, wo die Längenänderung groß ist, muß das Elastizitätsmodul klein sein, und dort, wo wir mit unserer Kraft nur eine kleine Längenänderung erreichen, ist das Elastizitätsmodul groß.

E gibt uns also an, wie elastisch ein Körper ist. Körper mit kleinem Elastizitätsmodul sind sehr elastisch. Es gilt also

$$E_{\text{Gummi}} < E_{\text{Metall}} < E_{\text{Granit}}$$

Das Hooke'sche Gesetz ist uns bei der Beschreibung der Verformungsarbeit schon einmal begegnet. Und zwar sagten wir dort:

Bei einer Feder sind Kraft und Federweg s proportional.

Das ist ja etwas ganz anderes!

Nein - eben nicht. Das ist genau das gleiche:

Eine Feder ist ein ganz spezieller fester Körper, und zwar ein sehr elastischer. Auch hier gilt $\frac{F}{A} \sim \frac{\Delta l}{l}$, und da A und $l = \text{const.}$ sind, gilt sicherlich auch $F \sim \Delta l$ bzw. $F = D \cdot s$. Damals nannten wir den Federweg nämlich nicht Δl , sondern s und D war (ganz ähnlich des Elastizitätsmoduls) die sogenannte Federkonstante.

Bei Druckkräften, übrigens, ergibt sich eine Verkürzung. Spannung und Längenänderung Δl sind dann negativ!

b) Querkontraktion

Eine mechanische Spannung in Längsrichtung verursacht eine Querkontraktion.

Und zwar gilt die Proportionalität

$$\frac{\Delta d}{d} \sim \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \frac{\Delta d}{d} = \mu \frac{\Delta l}{l}$$

Mit d ist die Querabmessung (also z.B. die Breite, oder der Durchmesser) angegeben, mit Δd natürlich die Änderung derselben.

Als Proportionalitätsfaktor führen wir den Buchstaben μ ein, außerdem nennen wir

$$\frac{\Delta l}{l} \text{ wieder } \epsilon \text{ und } \frac{\Delta d}{d} = \epsilon_q \Rightarrow \epsilon_q = \mu \epsilon$$

Das μ ist die sogenannte Poissonzahl. Sie gibt das Verhältnis von relativer Änderung der Querabmessung zu relativer Längenänderung an. Die Einheit der Poissonzahl ist 1, d.h. μ hat keine Einheit, da ϵ und ϵ_q dieselbe Einheit (nämlich auch keine) haben!

Wie sieht es nun aber mit dem Volumen aus? Wie ändert sich dies?

ΔV = neues Volumen - altes Volumen

$$\Delta V = (1 + \Delta l)(d - \Delta d)^2 - d^2 l \quad (\text{wenn wir einen quadratischen Stab mit Querschnitt } d^2 \text{ annehmen})$$

$$\Delta V = d^2 l - 2d l \Delta d + 1 \Delta d^2 + d^2 \Delta l - 2d \Delta d \Delta l + \Delta l \Delta d^2 - d^2 l$$

Δd und Δl sind sehr klein, also können wir Δd^2 und Δl^2 , ebenso $\Delta l \cdot \Delta d$ vernachlässigen. (~~~~)

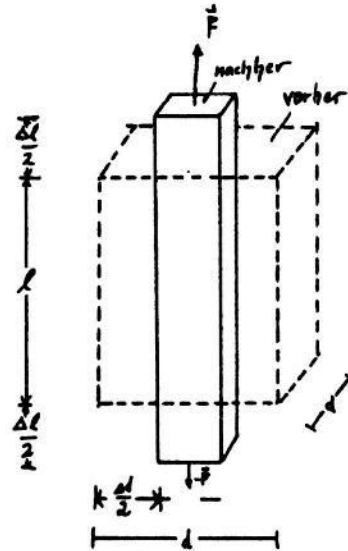
$$\Delta V = d^2 \Delta l - 2d l \Delta d$$

Somit für die relative Volumenänderung

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{d^2 l} = \frac{d^2 \Delta l}{d^2 l} - \frac{2d l \Delta d}{d^2 l} = \frac{\Delta l}{l} - 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta l}{l} \left(1 - 2 \frac{\Delta d}{d} \cdot \frac{l}{\Delta l} \right) = \epsilon (1 - 2\mu)$$

denn $\frac{\Delta d}{d} \cdot \frac{l}{\Delta l} = \mu$

also $\frac{\Delta V}{V} = \epsilon (1 - 2\mu)$



c) Kompressibilität

Wird auf einen Körper allseitig ein Druck $\Delta p = -\sigma$ ausgeübt, so ist die relative Volumenänderung dreimal so groß wie im vorigen (eindimensionalen) Fall:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \epsilon (1 - 2\mu)$$

da nach dem Hooke'schen Gesetz $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$, gilt $\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)$

$$= -3 \frac{\Delta p}{E} (1 - 2\mu), \text{ also}$$

$$\frac{\Delta p \cdot V}{\Delta V} = - \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

Erinnern wir uns: das Elastizitätsmodul E war damals $E = \frac{\Delta p \cdot l}{\Delta l}$.

Deshalb definieren wir hier analog:

$$K = - \frac{\Delta p \cdot V}{\Delta V} \quad \text{und nennen es } \underline{\text{Kompressionsmodul}}$$

Die Einheit: $[K] = \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{m}^3} = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Das Kompressionsmodul ist das Verhältnis der erforderlichen Druckänderung Δp zur erzielten relativen Volumenänderung $\frac{\Delta V}{V}$

also $\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}$ und dies entspricht genau der Kompressibilität bei Flüssigkeiten. Deshalb verwenden

wir auch den gleichen Buchstaben: $K = \frac{1}{\beta}$ (vgl. S. 58)

Auch hier gibt uns das Kompressionsmodul Auskunft darüber, wie kompressibel ein fester Körper ist. Ist er sehr kompressibel, also ist die relative Volumenänderung groß, so ist das Kompressionsmodul klein - und umgekehrt.

Nun gebe ich hier noch einen Zusammenhang zwischen den elastischen Größen (oder auch Elastizitätskonstanten - denn dies sind alles stoffspezifische Konstanten, die für jeden Stoff in Tabellen nachzulesen sind) an:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

E = Elastizitätsmodul

K = Kompressionsmodul

μ = Poissonzahl

B. SCHWINGUNGEN

Im Kapitel MECHANIK besprachen wir allerlei Bewegungen von Massenpunkten und von starren Körpern. Dort haben wir sehr viele Begriffe definiert, die uns immer wieder begegnen werden.

Nun - im Kapitel SCHWINGUNGEN werden wir eine ganz besondere Art von Bewegungen behandeln, nämlich solche, die periodisch sind.

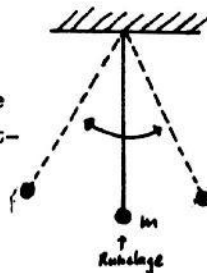
Zunächst zur Definition :

Jeder periodische Vorgang, der durch eine rücktreibende Kraft nach einer Auslenkung aus einer stabilen Gleichgewichtslage verursacht wird, nennen wir Schwingung.

Im vorliegenden Kapitel werden wir nur die mechanischen Schwingungen besprechen, andere folgen noch in anderen Kapiteln. Hier werden wir etwas über die Berechnung von Schwingungsvorgängen erfahren, über die Physik von Schwingungen ganz allgemein, speziell etwas über Frequenzen, Amplituden, Schwingungsdauern usw.

Ganz kurz will ich zu Beginn einige ganz einfache Schwingungsvorgänge schildern :

1. Das mathematische Pendel : Es handelt sich hierbei um eine Masse, die an einer Schnur aufgehängt ist. Ist sie in Ruhe, so hat sie eine stabile Lage angenommen. Wird sie seitlich angestoßen, so schwingt die Masse hin und her.



2. Das Federpendel

Hier kann man gleich eine ganze Menge von Beispielen anführen. Im Prinzip ist jede Feder ein Pendel. Hängen wir eine Feder senkrecht auf und hängen unten eine Masse dran, so ist diese in Ruhe. Ziehen wir nun die Masse nach unten, so schwingt sie auf und ab.

Wir können auch eine Masse zwischen zwei festgehaltenen Federn einspannen - auslenken und auch hier schwingt die Masse hin und her.



Wir sehen schon - bei beiden handelt es sich um echte Schwingungen... In beiden Fällen schwingen die Massen nur deshalb, weil rücktreibende Kräfte vorhanden sind (Im ersten Fall die Schwerkraft, im zwei-

ten die Federkraft).

Unter der Ruhelage oder Nulllage wollen wir die Lage des schwingenden Systems verstehen, in der es im Gleichgewicht ist.

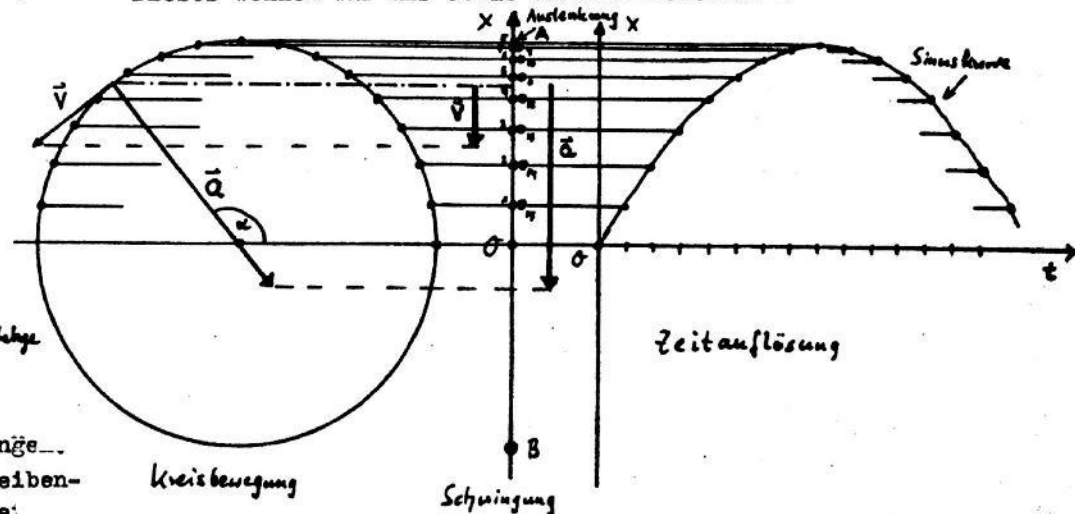
Nun wollen wir eine Analogie betrachten. Gerade die Kreisbewegung hat mit der Schwingung sehr viel zu tun. Sie ist allerdings keine. Denn : Zwar ist die Kreisbewegung ein periodischer Vorgang; aber keine rücktreibende Kraft verursacht diese Bewegung. Wir haben allerdings über die Kreisbewegung einen guten Einstieg in die Schwingungen.

I. ANALOGIE : KREIS BEWEGUNG - SCHWINGUNG

Wir gehen von der Kreisbewegung aus : Ein Massenpunkt bewegt sich im Kreis. Wir wollen dies einmal praktisch durchführen : Wir befestigen auf dem Außenrand eines Schallplattentellers eine Kugel. Nun lassen wir den Plattenteller kreisen. Beleuchten wir nun diesen Plattenteller von der Seite, so sehen wir im Schattenbild eine periodische Hin- und Herbewegung der Kugel :



Dieses wollen wir uns etwas exakter zeichnen :



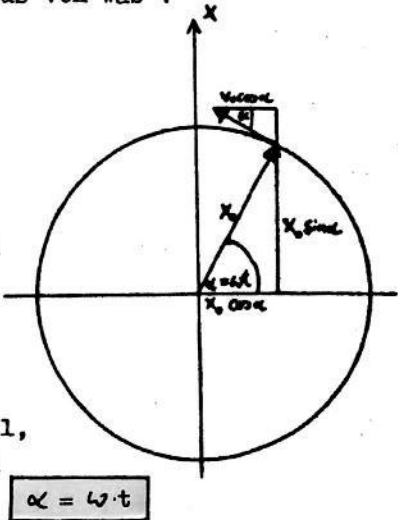
Im Bild auf der letzten Seite ist zusätzlich der Ort der Kugel nach der Zeit aufgelöst gezeichnet. Diese Zeitauflösung ist eine Sinuskurve. Erinnern wir uns an den Einheitskreis in der Schule. Ließen wir den Zeiger (der uns den Winkel α veranschaulichte) um den Mittelpunkt laufen, und zeichneten auf einem Diagramm die Abhängigkeit des Sinus des Winkels zum Winkel selbst auf, erhielten wir eine Sinuskurve. Nun lassen wir den Plattenteller mit konstanter Winkelgeschwindigkeit laufen, d.h. wir vergrößern den Winkel α linear mit der Zeit - das bedeutet, qualitativ ist es egal, ob wir die Auslenkung aus der Ruhelage gegen α oder gegen die Zeit auftragen. Hier allerdings befassen wir uns mit Schwingungsproblemen, und Schwingungen sind zeitabhängig (!), deshalb hier die Auftragung über die Zeit - deshalb die Zeitauflösung dieser Hin- und Herbewegung.

Aus der Zeichnung ersehen wir, daß bei $\alpha = 0^\circ$ auf der Schwingungsachse die Nulllage passiert wird. Bei $\alpha = 90^\circ$ wird die maximale Auslenkung erreicht. Die Auslenkung selbst wollen wir bei den Schwingungen Elongation nennen, die maximale Elongation heißt Amplitude. Bei der Kreisbewegung können wir eine Geschwindigkeit v (= Bahngeschwindigkeit) und eine Beschleunigung a bestimmen. Diese sind im vorliegenden Fall konstant. $v = v_0$ ist deshalb konstant, da $\omega = \text{const.}$ sein soll, und da der Radius auch gleichbleibt, gilt mit $v = \omega \cdot r \implies v = \text{const.}$ Da auch $a = v \cdot \omega$, bleibt auch $a = \text{const.}$ Dies gilt natürlich nur für die Beträge - die Richtungen von \vec{v} und \vec{a} ändern sich bei der Kreisbewegung fortwährend. Betrachten wir uns diese Analogie genauer:

<u>Kreisbewegung</u>	$\hat{=}$	<u>Schwingung</u>
Radius r	$\hat{=}$	Elongation $x(t)$, $x_{\max} = x_0 = \text{Amplitude}$
Geschwindigkeit v	$\hat{=}$	-falls die Kugel die Nulllage passiert ist $v' = v_0 = \text{maximal}$ -falls Kugel bei Amplitude (A oder B) ist $v' = 0$.
Beschleunigung a	$\hat{=}$	-falls die Kugel die Nulllage passiert ist $a' = 0$ -falls Kugel bei Amplitude (A oder B) ist $a' = a_0 = \text{max.} = \pm \frac{v_0^2}{r}$

Nun wollen wir uns Beziehungen aufstellen, wie die Größen x , v und a von der Zeit abhängen. Für x haben wir schon schon eine Zeitabhängigkeit gefunden. Dies war eine Sinusfunktion. Aber - Sinus von was?

Zeichnen wir uns die Kreisbewegung noch einmal heraus: Der Pfeil mit der Länge x_0 dreht sich um den Mittelpunkt. Er entspricht der Entfernung Mittelpunkt bis zur Kugel. Seine Projektion auf die x -Achse entspricht der Elongation. Aber die kennen wir ja - die ist $x_0 \cdot \sin \alpha$. Aber wo ist hier die Zeitabhängigkeit? Nun - was ist zeitabhängig? Na - der Winkel α . Denn wir wissen doch: $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$. Und da nach Voraussetzung $\omega = \text{const.}$ sein soll, können wir statt dieser Differentiation auch schreiben: $\omega = \frac{\alpha}{T}$ also auch



$$\alpha = \omega \cdot t$$

Daraus folgt also für die Zeitabhängigkeit unserer Elongation:

$$x(t) = x_0 \sin \omega t$$

Übrigens nennen wir $\alpha = \omega \cdot t$ die Phase der

Schwingung. Sie gibt uns an, in welchem Schwingungsstadium die Schwingung gerade ist. So - $x(t) = x_0 \sin \omega t$ - Gut und Schön. Dieses Ergebnis ist auch ganz logisch. Der Sinus schwankt immer zwischen +1 und -1. Das heißt: die Elongation schwankt immer zwischen $+x_0$ und $-x_0$. So - nun haben wir die Zeitabhängigkeit der Elongation herausgefunden. Wie sieht es nun mit der Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit und der Beschleunigung aus?

Betrachten wir uns den Geschwindigkeitsvektor. Falls die Schwingung am Umkehrpunkt ist (Punkt A oder B), so ist die Geschwindigkeit $v(t) = 0$, bei Nulldurchgang ist die Geschwindigkeit maximal, also $v(t) = v_0$. Wir nehmen an (auch durch das Ergebnis von $x(t)$ motiviert), daß die Funktion $v(t)$ auch durch eine trigonometrische Funktion des Winkels $\alpha = \omega \cdot t$ bestimmt wird, nur muß dies hier dann der Kosinus sein. Also gilt:

$$v(t) = v_0 \cos \omega t$$

Aber halt!

Das können wir überprüfen, denn wir wissen ja: $v = \frac{dx}{dt}$ und

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 \sin \omega t) = x_0 \omega \cos \omega t$$

Also muß gelten

$x_0 \cdot \omega = v_0$. Stimmt denn das? Erinnern wir uns: x_0 ist ja der Radius der Kreisbewegung und bei der Kreisbewegung hängen Bahn- und Winkelgeschwindigkeit so zusammen:

$$v = \omega \cdot r \text{ also hier } v_0 = \omega \cdot x_0 \text{ aha! Stimmt also.}$$

Somit halten wir fest

$$v(t) = v_0 \cos \omega t$$

Kommen wir noch zur Beschleunigung. Offensichtlich erhalten wir diese nun auch durch differenzieren der Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = v_0 \frac{d}{dt} \cos \omega t = -v_0 \omega \sin \omega t$$

Hier ist der Vorfaktor $-v_0 \omega = -\omega x_0 \cdot \omega = -x_0 \omega^2$.

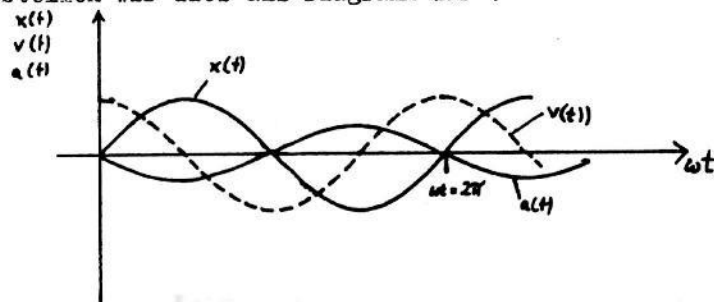
Wie war's bei der Kreisbewegung? Die Zentripetalbeschleunigung war gerade $a = -r \cdot \omega^2 =$ (hier bei uns) $= -x_0 \omega^2$. So - stimmt also alles. Stellen wir kurz die drei Beziehungen zusammen:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cdot \sin \omega t \\ v(t) &= v_0 \cdot \cos \omega t \\ a(t) &= -a_0 \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Schwingung in Abhängigkeit von der Zeit.

$$\text{Es gilt noch } a_0 = -x_0 \omega^2 \text{ und } v_0 = x_0 \omega$$

Stellen wir dies als Diagramm dar:



Wir nannten die Zeit, die zu einem Kreisumlauf bei der Kreisbewegung vonnöten war, die Umlaufzeit oder Periode. Hier nennen wir diese Zeit auch Periode T. Der Kehrwert der Periode nannten wir bei der Kreisbewegung Frequenz ν, auch das behalten wir bei. Eine Schwingung von einem Hertz, also, bedeutet: wir haben eine Schwingung vor uns, die einmal pro Sekunde hin, her und wieder zum Ausgangspunkt zurück schwingt.

Noch etwas zu oben Gesagtem:

Anhand der Vorzeichen sieht man, daß $x(t)$ und $a(t)$ einander proportional, aber entgegengerichtet sind.

Nach dem Newton'schen Gesetz (man sieht: dies wird uns noch ins Grab verfolgen!!) resultiert eine Beschleunigung immer aus einer Kraft. Diese Kraft muß wirken, damit eine Beschleunigung auftritt. Vorhin sprachen wir schon einmal von Kräften und zwar von rücktreibenden Kräften oder auch Rückstellkräften: Eine Masse befindet sich in einem stabilen Gleichgewicht. Wir lenken sie aus und lassen sie los. Was geschieht? - Sie bewegt sich zum Gleichgewichtszustand zurück, bleibt dort aber nicht in Ruhe (sie hat noch zuviel kinetische Energie - doch davon später mehr), sondern bewegt sich über die Nullage hinaus. Bei der Amplitude bleibt die Masse stehen und wird von einer Rückstellkraft (Schwerkraft oder Federkraft) wieder zur Nullage hin beschleunigt. Dort bewegt sie sich wieder darüber hinaus usw. usw.

Sehen wir uns nun diese Rückstellkraft genauer an: Die Masse wird durch die Rückstellkraft beschleunigt. Diese Beschleunigung kennen wir aber schon - es ist dies die

$$a(t) = -a_0 \sin \omega t \text{ . Und wie sieht dazu die Kraft aus?}$$

$$\text{Newton (!): } F = m a = -m \omega^2 x$$

also $-F \sim -x$; diese Kraft ist also proportional zur Auslenkung. Halt irgendwoher kennen wir das doch. Das Hooke'sche Gesetz behauptete auch so etwas:

Dort war $F = D \cdot s$, D war die Federkonstante (Eine Feder um die Strecke s zusammenzudrücken erfordert die Kraft F . Definiert man die Richtung der s -Achse geeignet, so haben F und s gleiche Vorzeichen).

Bei uns nun soll das Minuszeichen auch zum Ausdruck bringen, daß F eine Rückstellkraft ist. Allerdings verwenden wir als Proportionalitätsfaktor das gleiche.

$$\text{Also } \boxed{F = -D x} \text{ dies nennt man auch } \text{elastische Kraft}$$

D ist wieder die Federkonstante mit der Einheit $\frac{N}{m}$.

$$\text{Jetzt sehen wir aber auch } D = m \omega^2 \text{ oder auch } \boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}}$$

Also: ω ist die Winkelgeschwindigkeit: - was heißt das hier bei der Schwingung? Bei der Kreisbewegung fanden wir: $\omega = \frac{360^\circ}{T}$

Also pro Umlaufzeit T ein Umlauf von 360° , bzw. 2π .

Also gilt auch $\omega = \frac{2\pi}{T}$ oder $\omega = 2\pi \nu$. Und was heißt das?

ν ist die Frequenz der Schwingung, also eine Aussage darüber, wie oft das System in der Sekunde hin- und herschwingt (Einheit auch Hertz). Somit ist auch ω eine Frequenz, sie heißt Kreisfrequenz.

Wir sahen hier also : Frequenz (hier in diesem Fall Kreisfrequenz) ist gleich Wurzel aus D (Federkonstante) durch Masse.

Was heißt das ?

Das bedeutet : Je größer die Federkonstante D , desto schneller die Schwingung. Betrachten wir uns eine solche schwingende Feder: Wovon hängt D ab ? Erinnern wir uns - großes D bedeutete eine "harte" Feder. Also hier : Bei einer harten Feder ist die Frequenz größer (das heißt die Schwingung schneller) als bei einer weichen Feder.

So wir haben die Kreisfrequenz zu $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ bestimmt. Daraus können wir die Frequenz bestimmen: $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ also hier $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$

Also folgt für die Periode (= Schwingungsdauer)

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Noch ein allgemeines Wort zu den Schwingungen :

Wir haben uns eben - bei den Federschwingungen - auf das Hooke'sche Gesetz berufen. Nun wissen wir aber, daß das Hooke'sche Gesetz nicht immer gilt. Es gilt nur in dem Bereich, bei dem die Funktion $F(x)$ linear ansteigt, also im Proportionalitätsbereich. Vgl. dazu Seite 68. Dort war aufgetragen: Spannung ($\hat{=}$ Zugkraft) gegen die Längenänderung. Nur in einem kleinen Längenänderungsbereich ist diese Funktion proportional. Und nur in diesem Proportionalitätsbereich gilt das Hooke'sche Gesetz. Das heißt aber, daß unsere bisherigen Berechnungen, die Federschwingungen betreffend nur für kleine Längenänderungen gelten. Was heißt aber Längenänderungen bei Federschwingungen? Nun - Lenkt man eine Masse (die durch Federkräfte in einer Gleichgewichtslage war) um eine Strecke x aus, so beginnt sie zu schwingen. Die Längenänderung ist also die Elongation x ! Diese darf also nur so groß sein, wie es das Hooke'sche Gesetz zuläßt, also nur innerhalb des Proportionalitätsbereiches. Ist die Elongation größer, gelten viel kompliziertere Beziehungen für die Schwingungen. Wir wollen aber nur die Schwingungen behandeln, bei denen das Hooke'sche Gesetz gültig ist. D.h. bei denen die Auslenkungskraft proportional zur Auslenkung ist. Solche Schwingungen wollen wir harmonische Schwingungen nennen.

1. Anwendung : mathematisches Pendel

Im vorigen Kapitel haben wir allgemein die Federschwingungen berechnet. Dort erhielten wir :

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Jetzt betrachten wir eine Pendelschwingung. Und zwar die Schwingung des mathematischen Pendels. Unter einem mathematischen Pendel wollen wir folgendes verstehen :

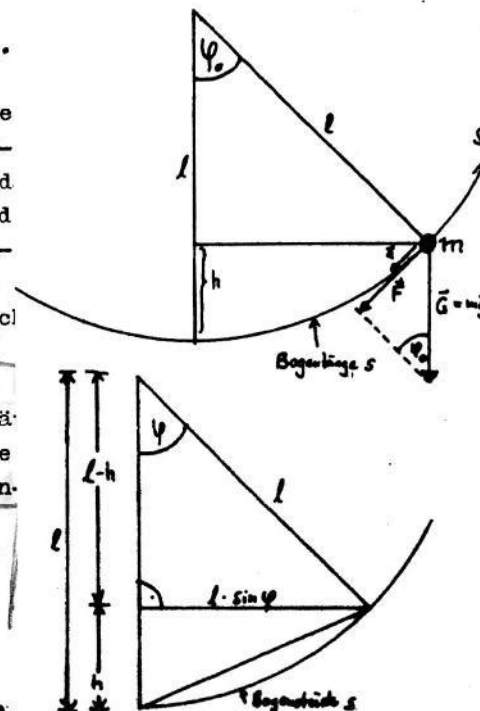
Ein Massenpunkt hängt an einer masselosen Schnur. Dies ist ein mathematisches Pendel. Das bedeutet also, daß wir - zur Vereinfachung - mit einem idealisierten Pendel arbeiten. In Wirklichkeit gibt es ein solches natürlich nicht - es gibt keinen masselosen Faden, und auch davon, daß es keine Massenpunkte gibt, haben wir ja schon gesprochen. Allerdings kann man Systeme bauen, die dem mathematischen Pendel sehr nahe kommen, z.B. eine kugelförmige schwere Masse an einen ganz dünnen Draht- oder Nylonfaden befestigt. - So, nun zur Behandlung unseres Pendels.

Wir lenken das Pendel um einen gewissen Winkel φ_{\max} aus. Dann schwingt es hin und her. Wir wollen noch eine Vereinfachung durchführen. Es soll dieser maximale Auslenkwinkel klein sein, und zwar so klein, daß gilt $|\sin \varphi \approx \varphi|$. $\varphi < 15^\circ$

Wenn man im Bogenmaß rechnet, ist das möglich bei Winkeln bis 30° , denn $30^\circ \hat{=} 0,523 \text{ rad}$, und $\sin 0,523 = 0,5$ (d.h. Fehler von 4,5 %, bei 10° sogar nur Fehler von 0,5 %).

Außerdem können wir bei kleinen Winkeln das Bogenstück s gleich $l \sin \varphi$ bzw. s gleich $l \varphi$ setzen.

Lenken wir nun das Pendel ein wenig aus der Ruhelage aus (um den Winkel φ_0), so hängt die Masse um h höher als vorher. Dort hat sie also eine höhere potentielle Energie.



Und diese können wir berechnen. Doch dazu brauchen wir zunächst die Höhe h . Natürlich hängt diese Höhe h vom Winkel φ ab, je größer φ , desto größer h . Wir können aus der Zeichnung auf der letzten Seite herauslesen, daß

$$\cos \varphi = \frac{l-h}{l} \quad \text{also auch} \\ l \cos \varphi = l - h \implies h = l(1 - \cos \varphi).$$

Diesen Kosinus können wir entwickeln. Aus dem mathematischen Anhang wissen wir, daß man für kleine Winkel φ den Kosinus nach dem Taylor'schen Satz in einer Taylorreihe entwickeln kann.

Führen wir das einmal ganz kurz durch :

es gilt : $\cos x = f(x)$ und damit :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0) \cdot x}{1!} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0) \cdot x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0) \cdot x^4}{4!} + \dots$$

und $f(0) = \cos 0 = 1$, $f'(0) = -\sin 0 = 0$

$$f''(0) = -\cos 0 = -1, \quad f'''(0) = \sin 0 = 0 \quad \text{und} \quad f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$$

$$\text{also gilt : } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

für einen kleinen Winkel (z.B. $= 10^\circ \hat{=} 0,174 \text{ rad}$) werden die Glieder immer kleiner, hier z.B. $\frac{x^2}{2!} = 0,01523$, $\frac{x^4}{4!} = 0,0000387 \dots$

das heißt aber, daß wir ohne große Fehler zu machen, sagen können $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$. Also können wir unser $h = l(1 - \cos \varphi)$ umschreiben

$$\text{Für kleine Winkel gilt } h = l \left(1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) = \frac{l \cdot \varphi^2}{2}$$

Nun stört uns nur noch etwas der Winkel φ . Aber oben haben wir gesehen, daß wir diesen durch die Bogenlänge s und die Fadenlänge l ausdrücken können. Es war $s = l \varphi$. Also hier

$$h = \frac{s^2}{2 \cdot l} \quad \text{Somit hat die Masse, wenn sie um den Winkel}$$

φ ausgelenkt ist, bzw. in der Höhe h über der Nullagenhöhe ist die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = m g h = \frac{m g s^2}{2 \cdot l} = \frac{1}{2} \left(\frac{m g}{l} \right) s^2$$

So - jetzt noch etwas : Bei den Federschwingungen verwendeten wir das Hooke'sche Gesetz. $F = D \cdot s$. Allgemein behandelt bedeutet das : Dehnt man eine Feder um s , so muß man eine dazu proportionale Kraft $F = D s$ aufwenden, D heißt, wie schon gesagt, Federkonstante oder Richtgröße.

Hier, beim mathematischen oder Fadenpendel gilt etwas ganz analoges. Wir fanden für die potentielle Energie $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \left(\frac{m g}{l} \right) s^2$.

Außerdem können wir die Größe einer Verformungsarbeit (Spannarbeit)

$$\text{diese ist } E_{\text{Spannung}} = E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D \cdot s^2$$

$$\text{Vergleichen wir beide } E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D s^2 \quad \text{und} \quad E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \left(\frac{m g}{l} \right) s^2.$$

Auch $\left(\frac{m g}{l} \right)$ ist eine Konstante (nichts davon ändert sich zeitlich).

Was liegt also näher, auch dem Fadenpendel eine Richtgröße D zu geben, für diese gilt dann :

$$D = \frac{m g}{l}.$$

$$\text{Also nochmals : } E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \left(\frac{m g}{l} \right) s^2 = \frac{1}{2} D \cdot s^2$$

Aus der Zeichnung ersehen wir noch etwas, nämlich

$$F = m g \sin \varphi \approx m g \varphi. \quad \text{Dies ist die Kraft, die die Masse}$$

wieder zur Nullage zurückzieht, also die Rückstellkraft.

$$\text{Da nun } s = l \varphi \implies \varphi = \frac{s}{l} \quad \text{bzw.} \quad F = m \cdot g \cdot \frac{s}{l} = \frac{m g}{l} \cdot s = D \cdot s$$

Somit kann man sagen, daß auch die Rückstellkraft beim Fadenpendel eine elastische Kraft ist.

Vorhin hatten wir für die elastische Kraft $F = - D s$, also zusätzlich ein Minuszeichen. Dieses Minuszeichen drückt aus, daß die Kraft F entgegengesetzt zur Bogenlänge s wirkt, wenn man s von der Nullage nach außen zählt.

Also auch hieraus folgt, daß wir dem Fadenpendel eine Richtgröße D zuordnen können, für die gilt

$$D = \frac{m g}{l}.$$

Vorhin fanden wir eine Beziehung zwischen Richtgröße und Frequenz - er war $D = m \omega^2$ oder $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Somit können wir auch die Frequenz und die Schwingungsdauer für das Fadenpendel errechnen, wenn wir nur das D durch $\frac{m g}{l}$ ersetzen :

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{m g}{m l}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right)$$

Die Schwingungsdauer, bzw. die Frequenz der Pendelschwingung hängt nur von der Fadenlänge des Fadenpendels ab - und nicht von der Masse, wie man vielleicht intuitiv vermuten könnte. Dies ist eine sehr wichtige Erkenntnis : Die Schwingungsdauer beim Fadenpendel ist unabhängig von der Masse - sie hängt nur von der Fadenlänge ab!

2. Schwingungsenergie

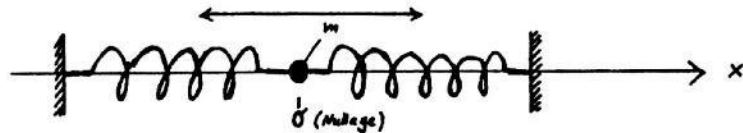
Im Kapitel zuvor haben wir schon einmal eine potentielle Energie berechnet. Es war die, die man einer Masse zusätzlich gibt, wenn man sie - falls sie mit einem Faden an einem festen Punkt befestigt ist - auslenkt.

Wir wollen nun ganz allgemein für die Schwingungen eine Energiebilanz aufstellen. D.h. wir berechnen kinetische und potentielle Energie, wir stellen den Energiesatz auf, und schauen, ob man Energie in ein schwingendes System hineinstecken muß, oder ob Energie frei wird, oder ob sie konstant bleibt.

kinetische Energie : $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$

potentielle Energie: $E_{\text{pot}} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Wir wollen die Energie zunächst für eine ganz spezielle Schwingung berechnen: Es soll eine Masse zwischen zwei Federn befestigt sein und somit in einer Dimension schwingen können :



Was brauchen wir zur Berechnung der Energie ?

In der kinetischen Energie kommt die Geschwindigkeit vor, in der potentiellen der Ort der Masse. Aber beides kennen wir ja schon, haben beides - in Abhängigkeit von der Zeit - schon berechnet :

es war $x(t) = x_0 \sin \omega t$ und $v(t) = \frac{d}{dt}(x(t)) = x_0 \omega \cos \omega t$.

Somit folgt für die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \quad \text{da } m \omega^2 = D \Rightarrow$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} D x_0^2 \cos^2 \omega t$$

Zur Berechnung der potentiellen Energie :

$E_{\text{pot}} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Wie groß ist F bei einer Schwingung ?

Elastische Kraft $\vec{F} = -D \cdot \vec{s}$. Das Minus haben wir eingefügt, nur um zu dokumentieren, daß F eine Rückstellkraft ist. Bei der Spannungsarbeit und dem Hooke'schen Gesetz hatten wir allerdings ein Plus, deshalb müssen wir dies hier auch benutzen :

Danach folgt für die potentielle Energie :

$$E_{\text{pot}} = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^x D \cdot x \cdot dx.$$

Dazu machen wir folgende Randbedingung: Wir sagen : Bei der Nullage soll die potentielle Energie gleich Null sein. (In dieser Lage sind beide Federn entspannt - deshalb ist diese Randbedingung gerechtfertigt).

bzw. $E_{\text{pot}}(x=0) = 0$

Also noch einmal :

$$E_{\text{pot}} = \int_0^x D \cdot x \cdot dx = D \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} D x_0^2 \sin^2 \omega t$$

Also potentielle Energie , $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D x_0^2 \sin^2 \omega t$

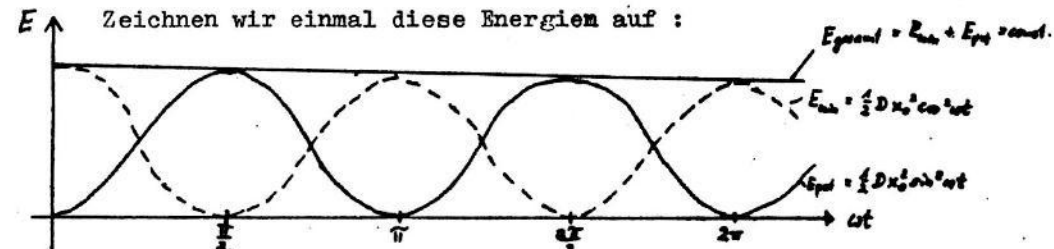
3. Energieerhaltungssatz

Betrachten wir was mit diesen Energien geschieht.

Energieerhaltungssatz war $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.} = E_{\text{gesamt}}$

Also hier $E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} D x_0^2 \sin^2 \omega t$
 $= \frac{1}{2} D x_0^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{1}{2} D x_0^2$

Und $E = \frac{1}{2} D x_0^2 = \text{Konstant}$. Also ist der Energieerhaltungssatz erfüllt.



Wie aus diesem Diagramm zu ersehen ist pendelt also die Energie dauernd zwischen E_{pot} und E_{kin} hin und her.

Auf der nächsten Seite ist dies für Fadenpendel und Federpendel in Momentaufnahmen dargestellt.

Tabelle

Fadenpendel	Federpendel	Zeit $t =$	Elongation $x(t) =$ <small>$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t)$ $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t)$</small>	Geschwindigkeit $v(t) =$ <small>$v(t) = \omega \cdot x_0 \cdot \sin(\omega t)$ $v(t) = -\omega \cdot x_0 \cdot \cos(\omega t)$</small>	Energie	
					E_{kin}	E_{pot}
		0	0	v_0		$E_{kin} = E_{pot}$ $E_{pot} = 0$
		$\frac{T}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_0$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_0$		$E_{kin} = E_{pot}/2$ $E_{pot} = E_{pot}/2$
		$\frac{2T}{8}$	x_0	0		$E_{kin} = 0$ $E_{pot} = E_{pot}$
		$\frac{3T}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_0$		
		$\frac{4T}{8}$	0	$-v_0$		
		$\frac{5T}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_0$		
		$\frac{6T}{8}$	$-x_0$	0		
		$\frac{7T}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_0$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_0$		
		$\frac{8T}{8}$	0	v_0		

II. ALLGEMEINE SCHWINGUNGEN - DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

1. Harmonische ungedämpfte Schwingung

Wir wollen nun einen neuen Weg beschreiten. Wir betrachten Schwingungen, indem wir Bewegungsgleichungen aufstellen.

Was ist das: Bewegungsgleichung?

Die Bewegungsgleichung beschreibt die quantitativen Vorgänge bei der Bewegung eines (oder auch mehrerer) Massenpunktes. Es interessiert bei einer Bewegung, wie wir schon gesehen haben, vor allem Geschwindigkeit und Beschleunigung. Einige Bewegungsgleichungen hatten wir schon gehabt, nur wußten wir damals noch nicht, daß es sich um solche handelt. Wir hatten zum Beispiel die gleichförmige Bewegung besprochen. Da war $v = \frac{ds}{dt} = \frac{s}{t}$, hieraus ist abzulesen, daß die Bewegung mit der Geschwindigkeit v erfolgt, und daß sie konstant ist. Auch eine allgemeine ungleichförmig beschleunigte Bewegung hat eine Bewegungsgleichung, nämlich $a = \ddot{s}(t)$.

Wir wollen uns nun Bewegungsgleichungen bei schwingenden Massenpunkten ansehen.

Wir fanden vorhin für das Federpendel (für die Masse, die eindimensional zwischen zwei Federn bewegt werden konnte)

$F = -D x$. Gut - wo tritt jetzt die Bewegung auf? Was beschreibt und nun die Bewegung? Nun - eine Kraft F beschleunigt eine Masse m . Nach dem Newton'schen Gesetz $F = m \cdot a$. Aha! Auch hier bei der Schwingung haben wir es mit einer Kraft zu tun. Diese ist gerade $-D x$. Also sie ist proportional zur Auslenkung. Aber diese Kraft tut zusätzlich noch etwas: sie beschleunigt unsere Masse m . Also können wir sagen:

$$F = m a = -D x. \text{ So - aber was ist } a?$$

Gut - a ist die Beschleunigung. Und diese hängt von der Zeit ab, was uns hoffentlich noch bewußt ist. Es ist nämlich a die zweite zeitliche Ableitung des Weges nach der Zeit; hiermit:

$$m a(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D x.$$

Und das heißt wiederum: Die Kraft $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ ist proportional

zu $-x$. In dieser Gleichung sind also Beschleunigung des Massenpunktes, Masse m und die Richtgröße D einander in Beziehung gesetzt. Was beschreiben uns aber D und m ? Na - die Frequenz

der Schwingung. Denn es war doch $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$. So - wir sehen also, daß in dieser Beziehung alle Größen drinstecken, die die schwingende Bewegung beschreiben. Schreiben wir es noch einmal :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x} = -D x \quad \text{oder auch} \quad \ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

Was ist dies nun ? Hier wird die Bewegung der schwingenden Masse m beschrieben, und zwar über eine Kräftebilanz :

Die beschleunigende Kraft $F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ ist der Auslenkung x proportional - der Proportionalitätsfaktor ist D . Gut - was können wir damit jetzt anfangen ?

Wir wissen $\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$. Was sagt uns das ?

Damit können wir nun einiges anfangen.

Eine solche Gleichung nennen wir eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Differentialgleichung, weil die Variable (in diesem Fall die Auslenkung x) einmal und einmal als 2. Ableitung nach der Zeit (deshaß 2. Ordnung !) vorkommt.

x ist die Auslenkung, die Elongation. Bzw. $x(t)$, denn diese Auslenkung hängt ja von der Zeit ab - und zwar periodisch, wie wir wissen.

Diese Auslenkung $x(t)$ können wir aus der Differentialgleichung (die wir künftig mit Dgl. abkürzen wollen) berechnen, es ist dies die Lösung der Differentialgleichung.

Wie lösen wir nun eine solche Dgl ? Wie macht man das ? Nun - man kann ein Rezept angeben, wie man eine quadratische oder auch eine kubische Gleichung löst; es gibt auch noch viele andere algebraische Gleichungen, die man recht einfach lösen kann. Bei Dgls sieht das etwas anders aus. Für jede Dgl gibt es nämlich eine ganze Lösungsschar, d.h. eine ganze Menge von Lösungen.

Dies werden wir auch gleich an unserem Beispiel sehen.

Frage : Wie löst man eine Dgl ?
Antwort : Gut geraten ist halb gewonnen !
Nicht lachen - ist wirklich so !

Man muß eine Lösung erraten, einsetzen und sehen, ob sie richtig war. Und das ist oftmals eine ganz harte Nuß !

Hier bei unseren einfachen Schwingungsgleichungen ist das nicht so schwierig, da wir uns in etwa vorstellen können, was herauskommen muß. Wir wollen es mal bei unserer Dgl versuchen :

Wir hatten die Dgl

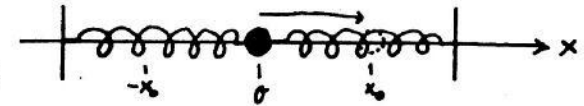
$$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

Dgl der harmonischen ungedämpften Schwingung

Harmonisch ist die Schwingung (das haben wir vorausgesetzt : Rückstellkraft proportional Auslenkung); ungedämpft deshalb, weil wir auf alle Reibungseinflüsse verzichtet haben - das sehen wir aber besser dann bei der Betrachtung der gedämpften Schwingung !

So - nun zur Lösung :

Was geschieht, wenn wir nebenstehende Kugel in x - Richtung auslenken ?



Sagen wir, wenn wir sie

bis $x = x_0$ auslenken ? Sie schwingt. Gut - wie sieht das mathematisch aus ? Wie ändert sich die Koordinate x ?

Sie ändert sich periodisch. $x(t)$ schwingt immer zwischen einer rechten und einer linken Grenze hin und her. Beschreiben wir dies mathematisch auch mit einer periodischen Funktion. z.B. sinus !

Also wir sagen $x(t) \sim \sin t$. Stimmt das nun ?

Zunächst einmal die Proportionalität. Die stimmt schon. Sagen wir also $x(t) = A \cdot \sin t$. Aber so ganz stimmt das noch nicht.

Wir wissen nicht, wie schnell die Schwingung verläuft, wir kennen die Schwingungsdauer nicht. Deshalb können wir nicht $\sin t$ sagen, sondern höchstens $\sin(Bt)$. t ist also bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Also unser Lösungsansatz ist nun

$x(t) = A \cdot \sin(Bt)$. Dies wollen wir nun prüfen :

$$x(t) = A \cdot \sin(Bt) \implies \dot{x}(t) = A \cdot B \cos(Bt) \text{ und } \ddot{x}(t) = -A \cdot B^2 \cdot \sin(Bt)$$

Dies setzen wir nun in die Dgl ein :

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0 \quad -A B^2 \cdot \sin(Bt) + \frac{D}{m} A \cdot \sin(Bt) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{kürzen durch} \\ \sin(Bt) \end{array} \right.$$

$$-A B^2 + \frac{D}{m} A = 0 \quad | : A \implies -B^2 + \frac{D}{m} = 0 \text{ oder}$$

$$B^2 = \frac{D}{m} \quad \text{bzw.} \quad B = \sqrt{\frac{D}{m}} \text{ halt ! Das hatten wir doch schon}$$

einmal - und zwar war B dort die Frequenz, und genau hier ist das natürlich genauso. Nennen wir also B in ω um, dann erhalten wir ein vernünftiges Ergebnis. Was herauskommt ist vernünftig und von physikalischen Standpunkt aus richtig. Also sind die Lösungen brauchbar. Die Lösung war $x(t) = A \cdot \sin(Bt) = A \cdot \sin(\omega t)$.

Was ist nun dieses A ? Die Lösung schwankt immer zwischen $+A$ und $-A$ herum. Also - was kann A nur sein ? Die maximale Auslen-

kung, die Amplitude. Und dies nannten wir x_0 . Also sieht unsere Lösung wie folgt aus :

Dgl $\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$

$\Rightarrow x(t) = x_0 \cdot \sin \omega t$, und $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$x_0 = \text{Amplitude}$

Das alles hatten wir schon einmal. Wir hatten uns das ganze schon einmal über die Energie hergeleitet. War das falsch? Iwo!

Es gibt in der Physik häufig verschiedene Wege, die zu einem vernünftigen Ergebnis führen. Wie wir noch sehen werden, ist es aber viel praktischer, über die Bewegungsgleichungen zum Ergebnis zu kommen. Und zwar deshalb, da bei komplizierteren Schwingungen die Benutzung des Energieerhaltungssatzes viel zu weit führen würde.

Noch etwas - Wir haben gesehen, daß diese Lösung mit sinus aufgeht; aber gilt, das nicht für alle Funktionen, deren zweite Ableitung wieder genauso aussieht, wie die Funktion selbst?

Prüfen wir das nach für den Fall, daß wir statt dem sinus einen Kosinus verwenden :

Lösungsansatz : $x(t) = x_0 \cdot \cos(B \cdot t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -x_0 B^2 \cos(B \cdot t)$

eingesetzt : $\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0 \Rightarrow -x_0 B^2 \cos(Bt) + \frac{D}{m} x_0 \cos(Bt) = 0$;

es ergibt wiederum $B^2 = \omega^2 = \frac{D}{m}$

also ist auch $x(t) = x_0 \cos \omega t$ eine Lösung der Dgl.

Und welche ist die richtige ?

Na -alle beide, und es gibt noch viel mehr, z.B. die Summe dieser beider Lösungen, oder andere Linearkombinationen.

Der Sinus und der Kosinus unterscheiden sich nur in der Phase. Der Sinus fängt bei 0 an ($\sin 0 = 0$) der Kosinus bei 1 ($\cos 0 = 1$). Das heißt aber für unsere Schwingung - der Unterschied der verschiedenen Lösungen kommt daher, daß wir die Schwingung von verschiedenen Phasen aus betrachten. Wir können zum Beispiel die Betrachtung beginnen, daß der Massenpunkt ausgelenkt ist, um x_0 . Oder auch, er ist in der Nulllage. Diese Anfangsbedingungen, die man verschieden wählen kann, sind also der Grund für die Benutzung verschiedener Lösungen, die alle zum richtigen Ergebnis führen.

Überprüfen wir im folgenden noch eine weitere Art der Linearkombination verschiedener Lösung als neue Lösung.

Überprüfen wir noch kurz diesen Lösungsansatz :

$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) + B \sin(\omega t + \beta)$

$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \alpha) + B\omega \cos(\omega t + \beta)$

$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) - B\omega^2 \sin(\omega t + \beta)$.

einsetzen : in $\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$

$-A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) - B\omega^2 \sin(\omega t + \beta) + A \frac{D}{m} \cos(\omega t + \alpha) + B \frac{D}{m} \sin(\omega t + \beta) = 0$

Das heißt aber $(A \frac{D}{m} - A\omega^2) \cos(\omega t + \alpha) + (B \frac{D}{m} - B\omega^2) \sin(\omega t + \beta) = 0$

Wann ist aber $C \cdot \cos \varphi + D' \cdot \sin \varphi = 0$?

Falls wir einmal kurz annehmen, diese Vorfaktoren C und D' seien beide gleich 1, so fragen wir also : Wann gilt $\cos \varphi + \sin \varphi = 0$? Dies gilt nur für $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

Wie sieht bei unserer Gleichung das Argument von Sinus und Kosinus aus ? In beiden steht $\omega t + \alpha$. Das bedeutet aber, daß obige Gleichung nur für ganz bestimmte Argumente (nämlich $\frac{3}{4}\pi$) gilt, und das wiederum würde bedeuten, daß die Gleichung nur zu ganz bestimmten Zeiten Gültigkeit hat (immer dann, wenn $\omega t + \alpha = \frac{3}{4}\pi$). Dies ist aber physikalisch sinnlos ! Heißt das nun, daß die obige Lösung keine ist ? nein - das heißt es nicht. Schauen wir uns oben die Gleichung an. Dort steht, $C \cdot \cos(\omega t + \alpha) + D' \cdot \sin(\omega t + \beta) = 0$. Dies gilt nur für bestimmte Zeiten. Oder aber, wir machen etwas anderes : Wir sagen, diese Gleichung gilt immer - wir brauchen dann nur voraussetzen, daß $C \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ und $D' \cdot \sin(\omega t + \beta)$ beide gleichzeitig Null sind. Dann ist diese Gleichung zu jeder Zeit erfüllt. Also damit erhalten wir nun zwei Gleichungen :

$C \cdot \cos(\omega t + \alpha) = A \left(\frac{D}{m} - \omega^2 \right) \cos(\omega t + \alpha) = 0$ und

$D' \cdot \sin(\omega t + \beta) = B \left(\frac{D}{m} - \omega^2 \right) \sin(\omega t + \beta) = 0$

Das trifft bestimmt für ganz bestimmte Argumente zu (nämlich für $\omega t + \alpha = \omega t + \beta = \frac{3}{4}\pi$ - weil dafür Sinus und Kosinus gleichzeitig Null werden). Wir wollen aber beide Gleichungen gleichzeitig für alle Argumente erfüllt sehen. Und dies ist nur dann der Fall, wenn wir voraussetzen :

$C = D' = 0 \Rightarrow \frac{D}{m} - \omega^2 = 0$; oder $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$.

Da dies nun physikalisch wieder vernünftig ist, so stimmt unsere Lösung also doch - diese obige Lösung übrigens, ist die allgemeine Lösung dieses Problems.

Fassen wir also noch einmal kurz zusammen. Für die ungedämpfte harmonische Schwingung fanden wir eine Dgl :

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

Dafür fanden wir mehrere Lösungen, die alle richtig waren. Alle hatten sie eines gemeinsam : Sie bestanden aus einer periodischen Funktion (Sinus oder Kosinus), die zwischen der positiven und der negativen Amplitude schwankte. Halten wir fest : als einfachste dieser Lösungen fanden wir :

$$x(t) = x_0 \sin \omega t .$$

Diese Lösung galt dann (alle anderen auch), wenn wir voraussetzen

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} .$$

Und dies ist die Frequenz der entstandenen Schwingung.

Noch einmal zur Mannigfaltigkeit der Lösungen :
Alle diese Lösungsansätze

$$x(t) = x_0 \sin \omega t$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$x(t) = C \sin \omega t + D' \cos \omega t$$

haben eines gemeinsam : sie bestehen aus einer periodischen Funktion, die zwischen x_0, A, C, D' hin- und herpendeln. Diese maximalen Auslen-

kungen sind unsere Amplituden.

Kommen wir noch kurz zu diesem Winkel α oder β .

$$\text{Sei } x(t) = x_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

Betrachten wir die zeitliche Entwicklung :

$$\text{was ist bei } t = 0 ? \text{ bei } t = 0 \text{ gilt } x(t) = x(0) = x_0 \sin \alpha .$$

$$\text{und was bei } t = T ? \text{ bei } t = T \text{ gilt } x(t) = x(T) = x_0 \sin(\omega T + \alpha)$$

$$\text{nun ist } \omega T = \frac{2\pi}{T} T = 2\pi . \implies x(T) = x_0 \sin(2\pi + \alpha) .$$

Wie unterscheiden sich $\sin(2\pi + \alpha)$ und $\sin \alpha$?

Sie unterscheiden sich überhaupt nicht. Und das ist auch logisch. Der Sinus ist ja eine periodische Funktion, und zwar eine mit der Periode 2π . Quantitativ ist es für die Beschreibung der Schwingung an sich egal, ob wir diesen zusätzlichen Winkel einführen, oder nicht. Er sagt uns nur darüber etwas aus, bei welchem Auslenkwinkel die Schwingung begonnen hat. Er beschreibt also die Anfangsphase der Schwingung.

So - nun haben wir über diese theoretische Beschreibung der Schwingung furchtbar viel gehört. Fahren wir jetzt mit komplizierteren Schwingungen fort, die wir aber nicht mehr so ausführlich darstellen.

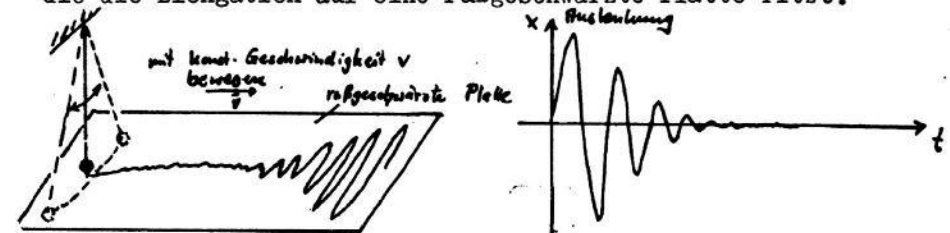
2. Harmonische gedämpfte Schwingung

Was ist das "Dämpfung" ?

Reibung-ok ! Aber was ist das bei einer Schwingung ?

Betrachten wir uns zunächst eine solche gedämpfte Schwingung.

Wir benutzen ein Pendel. An ihm soll eine Nadel befestigt sein, die die Elongation auf eine rußgeschwärzte Platte ritzt.



So sieht also das Diagramm der Auslenkung $x(t)$ bei einer gedämpften Schwingung aus. Wieso ist das Pendel bei dieser Anordnung gedämpft? Nun - zunächst einmal sind alle wirklichen Systeme mehr oder weniger gedämpft, und beim obigen Pendel besteht die Dämpfung in der Reibung zwischen Nadel und Platte.

Betrachten wir uns diese Reibung genauer :

Bei den meisten mechanischen Reibungsarten, gilt :

$$F_R \sim v ,$$

also Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit.

Was heißt das nun ? Dazu ein kurzer Vergleich : Betrachten wir uns die dynamische Viskosität bei Flüssigkeiten (Kap. A. III.2.c) und das Kapitel über die laminare Strömung um eine Kugel (Kap. A.III.2.e). Dort lautete das Stoke'sche Reibungsgesetz :

$$F_R = 6\pi\eta r \cdot v , \text{ also } F_R \sim v .$$

Wir setzen dies hier nun auch bei den mechanischen Schwingungen voraus - und man kann durch Vergleich der Theorie mit dem Experiment nachweisen, daß diese Voraussetzung ($F_R \sim v$) im Großen und Ganzen der Realität entspricht.

$$\text{So: hier also Reibungskraft } F_R \sim v \text{ oder } F_R = -k v = -k \frac{dx}{dt} .$$

Das Minuszeichen deshalb, weil die Richtung der Reibungskraft und die der Geschwindigkeit entgegengesetzt sind,

Stellen wir nun wieder eine Kräftebilanz auf :

$$F_{\text{Ges}} = \text{Rückstellkraft} + \text{Reibungskraft}$$

Welche Kraft beschleunigt die Masse ?

Jetzt wirken Rückstellkraft und Reibungskraft zusammen auf die Masse m ein und beschleunigen diese :

Also gilt $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D x - k \frac{dx}{dt}$ oder $m \ddot{x} = -D x - k \dot{x}$.

Bzw. in der gleichen Form wie die Dgl der ungedämpften Schwingung

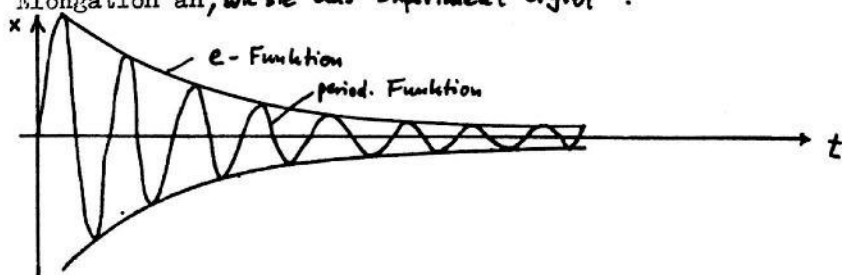
$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

Dgl der gedämpften harmonischen Schwingung

k , den Proportionalitätsfaktor der Reibungskraft wollen wir Reibungskoeffizient nennen.

Versuchen wir nun diese Dgl zu lösen :

Wir sehen uns dazu noch einmal die zeitliche Entwicklung der Elongation an, wie sie das Experiment ergibt :



Wir sehen \Rightarrow das ist eine Überlagerung von zwei Funktionen: Eine periodische Funktion (Sinus oder Kosinus) und eine Exponentialfunktion. Für diese Exponentialfunktion gilt :

Expfkt. $\sim e^{-\alpha t}$, da sie mit der Zeit abnimmt.

Jetzt machen wir einen Ansatz, indem beides steht. Wir multiplizieren beide Funktionen miteinander und setzen einen noch unbekannt Vorfaktor A dazu. Nun sieht also unser Ansatz so aus :

$$x(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t$$

Zunächst - was ist A ? Für t klein, ist die Exponentialfunktion groß. Also nehmen wir an, daß A hier wieder die maximale Auslenkung, die Amplitude ist. Dies ist auch aus dem Graph der Funktion oben klar zu erkennen.

Wir machen die Probe des Ansatzes :

$$x(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t \quad \dot{x}(t) = -\alpha A e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t + A \omega e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t$$

$$x(t) = -A \alpha e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t + A \alpha^2 e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t - \alpha A \omega e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t - A \omega^2 e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t$$

Dies setzen wir jetzt in unsere Dgl ein. Außerdem sehen wir, daß bei jedem Summand der Ableitungen der Term $A \cdot e^{-\alpha t}$ vorkommt. Durch diesen können wir sofort teilen. Dann folgt, in

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = 0 \text{ eingesetzt :}$$

$$-\alpha \omega \cos \omega t + \alpha^2 \sin \omega t - \alpha \omega \cos \omega t - \omega^2 \sin \omega t - \frac{k}{m} \omega \sin \omega t + \frac{k}{m} \omega \cos \omega t + \frac{D}{m} \sin \omega t = 0 \quad \text{oder auch}$$

$$\left(\alpha^2 - \omega^2 - \frac{k}{m} \alpha + \frac{D}{m} \right) \cdot \sin \omega t + \left(-2\alpha \omega - \alpha \omega + \frac{k}{m} \omega \right) \cos \omega t = 0$$

Dies gilt nun wieder überall dann, wenn beide Summanden (sprich : beide Klammern) gleich Null werden :

$$\left(\alpha^2 - \omega^2 - \frac{k}{m} \alpha + \frac{D}{m} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(-2\alpha \omega + \frac{k}{m} \omega \right) = 0$$

Betrachten wir zunächst die rechte Klammer :

$$-2\alpha \omega + \frac{k}{m} \omega = 0 \quad \text{oder} \quad 2\alpha = \frac{k}{m} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{k}{2m}$$

Hier haben wir also schon einmal etwas, nämlich den Vorfaktor im Exponenten. Nun zur anderen Klammer :

$$\alpha^2 - \omega^2 - \frac{k}{m} \alpha + \frac{D}{m} = 0, \text{ mit } \alpha = \frac{k}{2m} \Rightarrow$$

$$\frac{k^2}{4m^2} - \omega^2 - \frac{k^2}{2m^2} + \frac{D}{m} = 0, \text{ also gilt } \omega^2 = \frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}$$

bzw. $\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$ \rightarrow Frequenz der gedämpften Schwingung

Dies ist also die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung mit dem Reibungskoeffizienten k .

Bei der ungedämpften Schwingung war $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$. Deshalb wollen wir

nun die Frequenz der ungedämpften Schwingung ω_0 nennen.

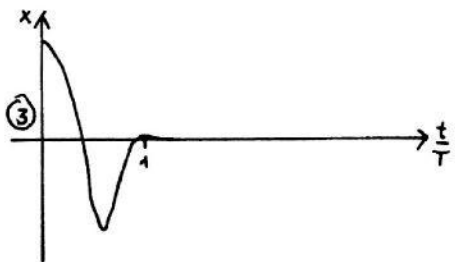
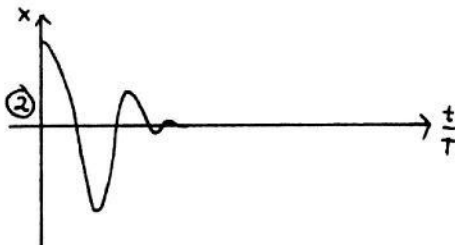
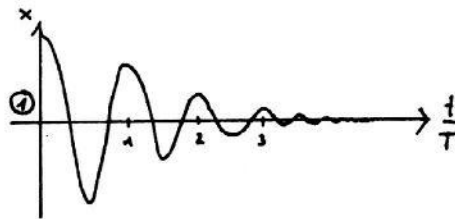
So sagen wir nun $\omega_{\text{ged}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4m^2}}$

Durch die Dämpfung wird die Frequenz um $\frac{k^2}{4m^2}$ verringert. Wir nennen deshalb $\frac{k^2}{4m^2}$ das Dämpfungsglied.

Wir sehen hier : Je nachdem, wie groß dieses Dämpfungsglied, erhalten wir für ω_{ged} eine reelle, eine imaginäre oder eine Lösung gleich Null für die Wurzel. Dies wollen wir uns nun etwas näher, auf seinen physikalischen Gehalt hin untersuchen:

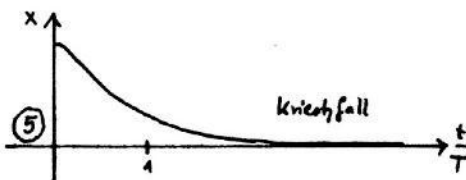
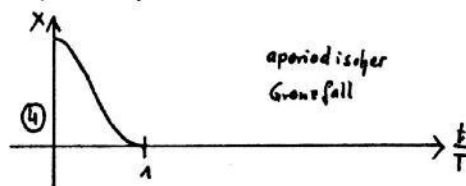
- a) $\frac{k^2}{4m^2} < \omega_0^2$ Lösung ist reell, da das Argument unter der Wurzel positiv ist. \Rightarrow Wir erhalten eine Schwingung mit $\omega_{\text{ged}} > 0$.
- b) $\frac{k^2}{4m^2} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_{\text{ged}} = 0$, und das bedeutet, daß überhaupt keine Schwingung besteht. Dies nennt man den aperiodischen Grenzfall.
- c) $\frac{k^2}{4m^2} > \omega_0^2$ hier ist die Lösung imaginär. Wir nennen hier den Fall aperiodische Bewegung (Kriechfall).

Wir wollen un diese Bewegungen einmal im Bild ansehen, dann wird die Sache klarer.



Von Bild 1 bis 5 nimmt die Dämpfung stets zu. Bei den Bildern 1 bis 3 liegt noch eine Schwingung vor, da die Auslenkung über die Nullage hinausgeht.

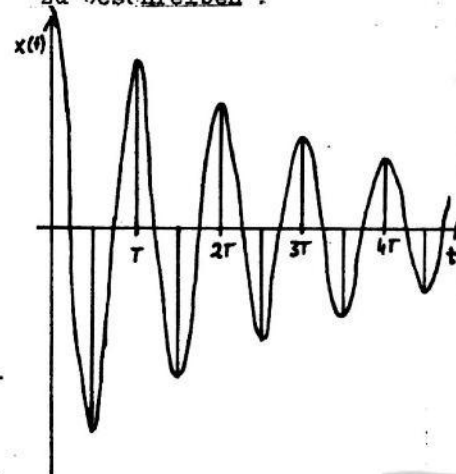
Im Bild 4 (aperiodischer Grenzfall) kehrt die Masse m langsam in ihre Ruhelage zurück, ohne darüber hinauszuschwingen. Ist die Dämpfung noch größer so kehrt die Masse noch viel langsamer in die Nullage zurück (Bild 5, Kriechfall)



Dazu eine bekannte Anwendung :

Stoßdämpfer. Sie haben die Aufgabe, die Federschwingungen, die durch die Bodenunebenheiten entstehen, möglichst aperiodisch zu dämpfen. Hierdurch werden die Schwingungen soweit gedämpft, daß es nicht zur gefürchteten Resonanz kommt. Zum Begriff der Resonanz kommen wir noch ausführlich.

Man hat nun noch eine Möglichkeit gefunden, die Dämpfung einfach zu beschreiben :



Es gilt hier, bei dieser gedämpften Schwingung (wie bei allen anderen auch), daß das Verhältnis der Auslenkungen zweier aufeinanderfolgender Schwingungen konstant ist.

Man nennt den natürlichen Logarithmus dieses Verhältnisses das logarithmische Dekrement. Dieses ist ein Maß für die Stärke der Dämpfung. Je größer das logarithmische Dekrement, d.h. je größer das Verhältnis der Auslenkungen zweier nebeneinanderliegender Schwingungen, desto größer

die Dämpfung. In diesem logarithmischen Dekrement (wir wollen es p nennen) muß also auch irgendwie der Reibungskoeffizient k vorkommen. Wir berechnen dies :

$$\frac{x_0(t=0)}{x(t=T)} = \frac{x(t=T)}{x(t=2T)} = \dots = \frac{x(t=n \cdot T)}{x(t=(n+1) \cdot T)} \quad \text{es ist } p = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$$

$$\text{was ist nun aber } \frac{x(t)}{x(t+T)}$$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{kt}{2m}} \cdot \sin \omega t \quad (\text{das war ja die Lösung unserer DGL})$$

$$\text{und } x(t+T) = x_0 \cdot e^{-\frac{k(t+T)}{2m}} \sin(\omega t + \omega T)$$

$$= x_0 \cdot e^{-\frac{kt}{2m}} \cdot e^{-\frac{kT}{2m}} \cdot \sin(\omega t + \omega T); \text{ da } \omega T = 2\pi \Rightarrow \sin(\omega t + \omega T) = \sin(\omega t + 2\pi) = \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{1}{e^{-\frac{kT}{2m}}} = e^{\frac{kT}{2m}}$$

$$\text{also ist } p = \ln e^{\frac{kT}{2m}} = \frac{kT}{2m} \quad \text{aha!} \quad p = \frac{kT}{2m}$$

p = Dämpfung mal Periode. Je größer k, desto größer p und je länger eine Periode T dauert, desto größer muß auch das logarithmische Dekrement sein. Ja - das ist logisch.

Kommen wir zu einer noch etwas komplizierteren Schwingungsform :

3. Erzwungene Schwingung

Wir haben ein schwingungsfähiges System. Dieses wollen wir nun zur Schwingung anregen. Es schwingt. Gut - aber nach einer gewissen Zeit nimmt die Amplitude ab und die Dämpfung macht sich bemerkbar. Irgendwann hört dann die Schwingung auf. Was können wir nun tun, damit eine Schwingung nicht aufhört, sondern immer weiter schwingt, oder - anders gesagt - wie können wir eine Dämpfung (die immer vorhanden ist) kompensieren?

Natürlich werden sich manche fragen, wozu wir eigentlich eine Schwingung brauchen. Zum Beispiel in einer mechanischen Uhr haben wir ein Schwingungssystem (z.B. die Unruh), das gedämpft ist. Wollen wir nun auch noch in 10 Minuten die Zeit ablesen können, müssen wir die Dämpfung kompensieren. Nun werden einige einwenden - das sind dann die ganz Schlaunen - daß heutzutage ja kaum noch mechanische Uhren benutzt werden, daß man sich heute ja viel lieber der genaueren Quarzuhren bedient. Was sind aber Quarzuhren? In den Uhren befindet sich ein Quarz, der "elektrisch schwingen" kann. Was man im einzelnen unter elektrischen Schwingungen versteht, werden wir noch ausgiebig behandeln. Auch diese elektrischen Schwingungen unterliegen einer Dämpfung, die irgendwie überwunden werden muß. Man sieht: auch in der modernen Zeit brauchen wir Schwingungen. Jeder Funksender hat ein Teil eingebaut, daß ungedämpfte (bzw. "entdämpfte") Schwingungen erzeugt.

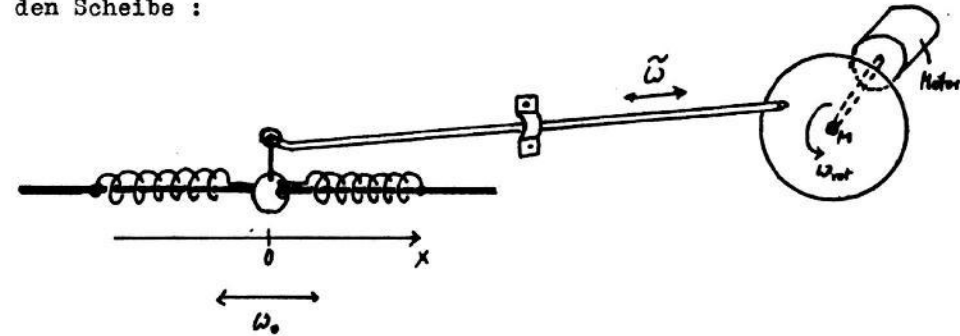
Nun wollen wir solche entdämpften Schwingungen betrachten. Wir können dies so durchführen: Wir lassen ein System Schwingungen ausführen. Bevor sich der Schwinger "ausgeschwängt" hat, schubsen wir ihn einfach periodisch an. Es ist klar, daß das am besten funktioniert, wenn der Schwinger, wie auch der "Anreger" die gleiche Frequenz haben. Dies muß aber nicht sein.

Wir werden im folgenden sehen, was es für Konsequenzen hat, wenn es Frequenzunterschiede zwischen beiden gibt.

Zunächst bauen wir uns einmal ein System auf, das erzwungene Schwingungen durchführt.

Wir nehmen dazu das gleiche eindimensionale Federpendelmodell, das wir schon öfter benutzt haben und bauen daran noch ein Anreger.

Wie könnte solch ein Anreger aussehen? Das braucht ja nur irgendwie ein Arm zu sein, der periodisch hin- und herschwenkt. Dazu befestigen wir einfach einen Arm exzentrisch an einer sich drehenden Scheibe:



Diese Scheibe drehe sich mit der Kreisfrequenz ω_{rot} . Das heißt, daß sie $\frac{\omega_{rot}}{2\pi}$ Umdrehungen pro Sekunde macht. Das bedeutet aber auch, daß der Arm in der gleichen Frequenz hin- und herschwenkt. Gut - wir haben also hierbei eine Anregungsfrequenz von ω_{rot} , wir nennen sie hier $\tilde{\omega}$.

Unser System (nur das Federpendel ohne äußere Anregung) hat eine sogenannte Eigenfrequenz ω_0 . Das ist die Frequenz, in der die Masse m schwingt, wenn sie nur einmal angeschubst wird. Und zwar ist diese Eigenfrequenz - haben wir ja schon öfter bestimmt $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$. Und diese ist durch die Wahl der Federn und durch die Masse m bestimmt. Wenn wir nun diese Schwingung mit einer periodischen Kraft $F(t)$ anregen, ergibt sich da eine neue Frequenz, oder schwingt das System trotzdem in seiner Eigenfrequenz, oder nimmt es die Anregungsfrequenz an?

Wie können wir dies berechnen? Na - wir haben doch in den beiden letzten Kapiteln schon Frequenzen von schwingenden Systemen berechnet. Hier machen wir es ganz genauso!

Zunächst stellen wir die Dgl der erzwungenen Schwingung, also die Schwingungsgleichung auf. Lassen wir hier zunächst einmal die Reibung aus dem Spiel, betrachten wir hier also eine erzwungene ungedämpfte Schwingung. Wir stellen zuerst wieder eine Kräftebilanz auf. Für eine nicht erzwungene ungedämpfte Schwingung hatten wir die Dgl $\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$. Bzw. als Kräftebilanz:

$$m \ddot{x} = -D x.$$

Oder : beschleunigende Kraft = Rückstellkraft .

Bei der erzwungenen Schwingung allerdings, wird die Masse nicht nur von der Rückstellkraft beschleunigt, sondern zusätzlich von der periodischen Kraft $F(t)$. Diese Kraft $F(t)$ kommt also auf der Seite der Rückstellkraft dazu, sodaß unsere Kräftebilanz so aussieht

$$m \ddot{x} = -D x + F(t) \quad \text{oder auch} \quad m \ddot{x} + D x = F(t)$$

Wie sieht aber nun $F(t)$ explizit aus ?

Es ist dies eine Kraft, die periodisch schwingt. Was liegt also näher, als diese Kraft genauso zu beschreiben, wie eine periodische Elongation ? Diese war $x(t) = x_0 \cdot \cos \omega t$ beispielsweise .

Sagen wir hier also $F(t) = F_0 \cdot \cos \tilde{\omega} t$, da $\tilde{\omega}$ die Anregungsfrequenz sein soll. F_0 ist die Maximalkraft. Somit sieht unsere Dgl für die erzwungene Schwingung folgendermaßen aus :

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \tilde{\omega} t \quad \text{Dgl der erzwungenen ungedämpften Schwingung}$$

Wie sieht nun dazu die Lösung aus ?

Im Lösungsansatz müssen wir wieder von einer periodischen Schwingung ausgehen. Bisher hatten wir immer homogene Dgls - das waren solche, bei denen die Summe der Ableitungen gleich 0 war. Jetzt ist die Summe der Ableitungen nach t nicht 0, sondern eben $(F_0/m) \cdot \cos \tilde{\omega} t$.

Wir schreiben in den Lösungsansatz auch die Funktion $\cos \tilde{\omega} t$, da dann bei jedem Summand (auch bei der zweiten Ableitung) dieser Term $\cos \tilde{\omega} t$ steht, und wir ihn dann überall wegstreichen können :

Also Ansatz $x(t) = A \cos \tilde{\omega} t$ (A ist die Amplitude, diese kennen wir noch nicht.)

$$\ddot{x}(t) = -\tilde{\omega}^2 A \cos \tilde{\omega} t$$

einsetzen :

$$-\tilde{\omega}^2 A \cos \tilde{\omega} t + \frac{D}{m} A \cos \tilde{\omega} t = \frac{F_0}{m} \cos \tilde{\omega} t \quad | : \cos \tilde{\omega} t$$

$$-\tilde{\omega}^2 A + \frac{D}{m} A = \frac{F_0}{m}$$

also $A (-\tilde{\omega}^2 + \frac{D}{m}) = \frac{F_0}{m} \implies A (-m\tilde{\omega}^2 + D) = F_0$ also gilt für

$$A = \frac{F_0}{(D - m\tilde{\omega}^2)}$$

Diese Amplitude hängt also von der Erregerfrequenz ab !

Wir können dies nun noch etwas anders schreiben :

Wir wissen doch : $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \implies D = m\omega_0^2$. Also

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

somit lautet die gesamte Lösung :

$$x(t) = \frac{F_0 \cos \tilde{\omega} t}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$$

Auslenkung der erzwungenen Schwingung

So - die Auslenkung bei der Schwingung hängt also zunächst einmal von der anregenden Kraft ab - aber auch von der Differenz der beiden Frequenzen ω_0 und $\tilde{\omega}$. Was geschieht denn nun, wenn beide gleich sind, d.h. wenn das System mit der gleichen Frequenz angeregt wird, die auch ihre Eigenfrequenz ist ?

Dann wird die Auslenkung sehr groß, exakt für $\omega_0 - \tilde{\omega}$ geht $x(t) \rightarrow \infty$. Die Amplitude wird dort also unendlich groß.

Dies trifft natürlich in der Realität nicht ganz zu, da jede Schwingung gedämpft ist, und dort - wie wir sehen werden - wird $x(t)$ zwar sehr groß, doch nicht unendlich groß.

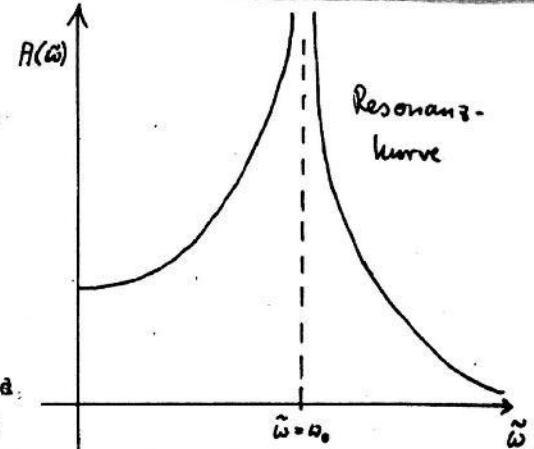
Betrachten wir diesen Effekt näher. Zunächst einmal nennen wir diesen Fall, wo $x(t)$ sehr groß wird, da beide Frequenzen gleich oder ganz ähnlich sind, Resonanz.

Dort wird also die Auslenkung sehr groß. Wir wollen zur Resonanz einige Beispiele betrachten :

1) akustische Resonanz

Ohne Resonanz gäbe es keine Musikinstrumente. Betrachten wir dies am Beispiel der Gitarre. Wer jemals auf einer elektrischen Gitarre (das sind diejenigen, die keinen großen Körper, sondern nur einen sehr flachen Korpus haben) gespielt hat, die nicht an einem Verstärker angeschlossen war, der hat festgestellt, daß die Töne nur sehr schwach waren - man hat fast nichts gehört. Bei der sogenannten akustischen Gitarre findet man außer den schwingenden Saiten noch ein kastenartiges Gebilde (Körper oder corpus genannt), das folgende Aufgabe hat:

Die Eigenfrequenz dieses Korpus sei ω_0 . Nun regt man diesen Korpus an, und zwar indem man durch die Saiten Frequenzen erzeugt, die der Eigenfrequenz des Korpus ziemlich nahekommen. Durch den



Effekt der Resonanz, der dann auftritt, werden die Töne in ihrer Amplitude (das entspricht in etwa der Lautstärke) verstärkt und somit hörbar. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, beschränkt eine Dämpfung die Resonanzkurve nicht nur in ihrer Höhe, sondern durch eine Dämpfung wird auch die Resonanzkurve breiter. Das bedeutet aber, daß ein größerer Frequenzbereich zur Resonanz anregen kann, was gerade bei Musikinstrumenten sehr wichtig ist, denn was nützt ein Instrument, bei dem nur ein einziger Ton zur Resonanz anregen kann, bei dem man also nur einen Ton hören kann.

2) In den Vorschriften der Bundeswehr (das ist eine Zusammenstellung der Maßregeln für den Soldaten - ohne Vorschrift ist der Soldat keiner : dort steht, wie er kämpfen, essen, trinken,....., muß) steht : daß eine Gruppe von Soldaten beim Überschreiten einer Brücke nicht im Gleichschritt marschieren darf - eine an sich sehr unpreußische und unmilitärische Haltung, die aber einzig und allein auf Physikalischem beruht (woraus unter anderem zu erkennen ist, daß die Physik über dem Militarismus steht !!) :

Beim Marschieren im Gleichschritt wird die Brücke zu Schwingungen angeregt, die in der Nähe ihrer Eigenschwingung kommen können. (Auch eine Brücke hat - wie jedes System - eine Eigenschwingung). Das Ergebnis ist klar : Übersteigt die Amplitude die Elastizität der Brücke, so wird diese zerstört.

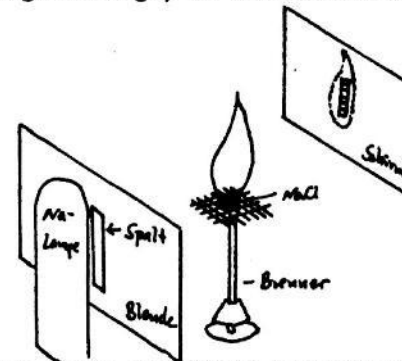
Ein ganz ähnlicher Fall ist das "Zersingen" von Gläsern. Eine Sängerin erzeugt einen sehr hohen Ton (auch das ist im Prinzip nichts anderes als eine Schwingung). Hat dieser die gleiche Frequenz wie die Eigenfrequenz eines Glases beispielsweise, so übersteigt die Schwingungsamplitude des Glases seine Elastizität und das Glas hat höchstens noch für die Altklasverwertung einen Sinn.

3) Atomare Resonanzabsorption
Dieses Beispiel habe ich nur für Interessierte hier hineingenommen, ebenso wie den Mößbauer-Effekt im Beispiel 4). Der eilige Leser kann diese beiden Beispiele getrost überspringen, ohne im weiteren Bearbeiten des Skripts Handicaps befürchten zu müssen.

Hier werden einige Dinge schon vorausgesetzt, die wir erst später ausführlich besprechen werden. Allerdings sind das Dinge, die jeder Chemie-, Geologie-, Biologie-, Mineralogie - Student schon des Älteren gehört hat.

Wir sehen uns die Natriumflamme an. Sie leuchtet gelb, in der ihr eigenen Wellenlänge von 5890 Å. Bestrahlen wir nun diese Flamme mit einer Na-Dampf-Lampe, die genau die gleiche Wellen-

länge erzeugt, so beobachten wir im Bild der Flamme auf dem dahinterstehenden Schirm schwarze Zonen.



Dort wurde das Licht vollständig absorbiert.

Die Anregungsfrequenz muß nicht sehr scharf sein, auch kleine Abweichungen von der Eigenfrequenz $\omega_0 \pm \delta\omega_0$ regen das Na-Atom an.

4) Rückstoßfreie Resonanzabsorption (Mößbauereffekt)

(wörtlich aus : E. Lüscher : Experimentalphysik I, BI - Mannheim, 1967)

Fällt ein angeregtes Atom in seinen Grundzustand zurück, wird die vorher absorbierte Strahlung wieder emittiert und kann ein anderes Atom anregen, da eine gewisse Breite $2 \cdot \delta\omega_0$ und eventuell kleine Verluste $\delta\omega_0$ möglich sind; deshalb muß lediglich die Bedingung

$$\delta\omega_0 < \delta\omega_0$$

erfüllt sein, damit eine Resonanzabsorption möglich ist.

γ -Strahlen-Absorption und -Emission der Atomkerne beschreibt man mit der gleichen Modellvorstellung wie bei den Strahlenabsorptions- und Emissionsvorgängen der Atomhülle. Es gibt einige Niveaus der Kerne, die viel schärfer als diejenigen der Atome sind. Da ein Atomkern bei der Emission eines γ -Quants aus Impulserhaltungsgründen einen Rückstoß erfährt, besitzt das emittierte Quant eine um die Rückstoßenergie verringerte Energie (Abb. 6.30). Im allgemeinen kann deshalb das emittierte γ -Quant nicht von einem anderen gleichen Kern wieder eingefangen werden und diesen anregen, da die Energie nicht mehr ausreicht. Da der Impuls eines Quants $\hbar\omega$

$$p = \frac{\hbar\omega}{c}$$

ist (c = Lichtgeschwindigkeit), muß der gleiche Impuls als Rückstoß aufgenommen werden. Die Rückstoßenergie des Kerns der Masse M beträgt deshalb

$$E_R = \frac{p^2}{2M} = \frac{\hbar^2 \omega^2}{2 \cdot M c^2} = \frac{E_\gamma^2}{2 \cdot M \cdot c^2} \quad (6.67)$$

Bei der Ableitung dieser Rückstoßenergie E_R haben wir vorausgesetzt

daß wir das Problem nichtrelativistisch behandeln können, eine Annahme, die in der Atom- und Kernspektroskopie weitgehend gerechtfertigt ist. Betrachten wir zwei benachbarte Kernzustände, deren Energiedifferenz nach Abb. 6.31 gegeben sei.

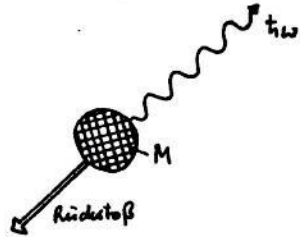


Abb. 6.30 Kernrückstoß bei Quantenemission

Bei der Emission eines γ -Quants geht der Kern vom Zustand II in den Zustand I über. Die Energie des γ -Quants ist gleich der Energiedifferenz der beiden Zustände E , vermindert um die Rückstoßenergie E_R , also

$$h\omega = E - 2 E_R \quad (6.68)$$

Diese γ -Energie $h\omega$ reicht nicht mehr aus, um einen anderen Kern vom Niveau I auf das Niveau II anzuregen; oder mit anderen Worten: Eine Resonanzabsorption dieser emittierten Gammastrahlung $h\omega$ durch einen anderen Atomkern ist nicht möglich (vgl. Abb. 6.32).

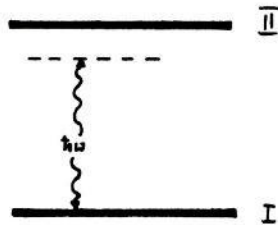


Abb. 6.32 Die emittierte Strahlung reicht nicht aus, um einen Kern vom Zustand I in den Zustand II anzuregen

kann von einem Kern resonant absorbiert werden.

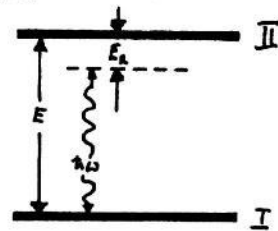


Abb. 6.31. Zwei benachbarte Energiezustände eines Atomkerns

Wenn es gelingt, dem γ -Quant den Energiewert E mitzuteilen, könnte dieses wieder resonant absorbiert werden.

FRANZ METZGER gelang es, die Energie $h\omega$ um den Betrag $2 \cdot E_R$ zu ergänzen, indem er die strahlende Quelle auf eine sehr schnell rotierende Scheibe montierte (nach Abb. 6.33). Der im Punkt S emittierte γ -Strahl erhält die fehlende Energie E_R in Form von Rotationsenergie. Das in diesem Zeitpunkt emittierte γ -Quant

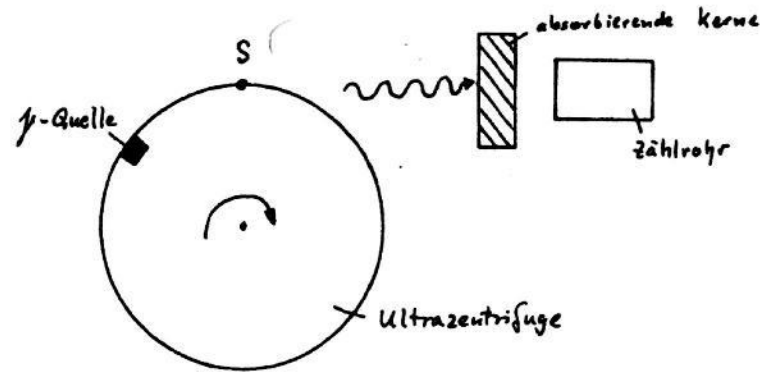


Abb. 6.33 Versuchsanordnung von METZGER zur Kompensation des Rückstoßverlustes

Eine viel elegantere Methode fand der Münchner Physiker RUDOLF MÖSSBAUER, für die er 1961 den Nobelpreis erhielt. Betrachten wir die Beziehung (6.67), so erkennen wir die Abhängigkeit der Rückstoßenergie E_R von der Masse des Kerns M , der den Rückstoß aufnimmt. Sind die γ -emittierenden Kerne sowie die absorbierenden Kerne in ein Kristallgitter eingebaut, so wird der Rückstoß bei Emission nicht von einem einzelnen Kern der Masse M , sondern unter gewissen Bedingungen von dem umgebenden Kristallgitter als ganzes aufgenommen (Mössbauereffekt). In Gleichung (6.67) müssen wir daher in bestimmten Fällen die Masse M durch eine sehr große Summe

$$M \rightarrow \sum_i M_i$$

ersetzen, dabei wird die Rückstoßenergie E_R beliebig klein, d.h. es wird die Energie des γ -Quants wieder gleich der Differenz der Kernenergiezustände

$$h\omega \approx E. \quad (6.69)$$

Diese γ -Strahlung kann von einem anderen Kern resonant absorbiert werden. Eines der Isotope, das am häufigsten für Mössbauereffektmessungen heute verwendet wird, ist ^{57}Fe , mit der 14,4 keV γ -Linie. Die Linienbreite ist von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-9}$ eV, damit wird der Q-Faktor von der Größenordnung 10^{12} . Darin liegt die so große Bedeutung des Mössbauereffektes. Man hat ein äußerst empfindliches Werkzeug zur Hand, um z.B. relativistische Effekte, Magnetfelder, Verschiebungen im Kristallgitter usw. zu messen.

MÖSSBAUER selbst hat diesen Effekt der rückstoßfreien Kern-Resonanzabsorption zuerst an Iridium 191 gefunden (Z.f. Physik 151, 124, 1958). Heute (1966) sind mehr als 80 Isotope bekannt, die für den

Mößbauereffekt geeignet sind. Stichwortartig seien in folgender Tabelle 6.6 einige Beispiele von Anwendungen des Mößbauereffektes aufgezählt.

Die wohl größte Bedeutung hat der Mößbauereffekt für die Aufklärung der Strukturen fester Körper.

Zum weiteren, einführenden Studium des Mößbauereffektes seien folgende Werke empfohlen:

- HORST WEGENER, Der Mößbauereffekt, BI-Hochschultaschenbücher 2/2a, 1965
 IANS FRAUENFELDER, The Mößbauer Effect, Benjamin, N.Y. 1962;
 GÜNTHER K. WERTHEIM, Mößbauer Effect: Principles and Applications. Academic Press, N.Y. 1964.

Tabelle 6.6

Gebiet	Anwendung
Relativität	Frequenzverschiebung eines Lichtquants im Gravitationsfeld
Kernphysik	Bestimmung magnetischer Momente von angeregten Zuständen
Kernphysik	Quadrupoleffekte
Kernphysik	Bestimmung von Kernradien
Festkörperphysik	Messung von inneren Magnetfeldern in Kristallen
Festkörperphysik	Elektrischer Feldgradient am Kernort
Festkörperphysik	Elektronendichte am Kernort
Festkörperphysik	Magnetische Kristallstruktur
Festkörperphysik	Strahlungsschäden
Chemie	Isomerieverschiebung
Chemie	Hüllenordnungen nach Kernprozessen
Chemie	Strukturaufklärung komplizierter Moleküle

4. Erzwungene gedämpfte Schwingung

Der Unterschied zur ungedämpften erzwungenen Schwingung besteht nur darin, daß wir hier noch ein Dämpfungsglied, eine Reibungskraft einbauen. Es war:

$$\text{Dgl der gedämpften Schwingung} \quad \ddot{x} + \frac{D}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\text{Dgl der erzwungenen Schwingung} \quad \ddot{x} + \frac{D}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \tilde{\omega} t$$

Deshalb muß die Dgl der erzwungenen gedämpften Schwingung lauten:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \tilde{\omega} t$$

Und diese wollen wir nun lösen.

Die Lösung wollen wir hier nur anders angehen. Dies hat zum Teil den Grund, die Berechnung zu erleichtern, zum anderen wird dadurch eine sehr elegante Methode der Lösung von Schwingungsgleichungen dargestellt, auf die wir noch gern (!) zurückgreifen werden.

Wir verwendeten für die Periodizität der Anregung eine Kosinusfunktion $\cos \tilde{\omega} t$. Wir können aber auch eine Sinusfunktion, oder eine Summe aus beiden verwenden, also z.B.

$$\begin{aligned} &\cos \tilde{\omega} t && \text{oder auch} && \cos \tilde{\omega} t + \sin \tilde{\omega} t \\ &\sin \tilde{\omega} t \end{aligned}$$

aber auch das ist möglich $\cos \tilde{\omega} t + i \sin \tilde{\omega} t$

Ich hoffe doch, daß die imaginäre Einheit i bekannt ist.

Es ist

$$\cos \tilde{\omega} t + i \sin \tilde{\omega} t = e^{i \tilde{\omega} t} \quad \text{- und das geht locker abzu-}$$

leiten. Vor allem ist bei einer e -Funktion der Vorteil gegeben, daß bei allen Ableitungen u.a. die e -Funktion selbst wieder herauskommt, durch die man dann dividieren kann.

Es ist trotzdem hier an der Zeit, einen mathematischen Einschub zu machen, um die komplexen Zahlen wieder ins Gedächtnis zurückzurufen.

Nicht jede quadratische Gleichung hat eine Lösung, die reell ist. Beispiel: $(x - 5)^2 = -4$ hat die Lösung $x = 5 \pm \sqrt{-4}$

Nun gibt es keine reelle Zahl, deren Quadrat -4 ergibt. Deshalb können wir auch aus -4 keine Wurzel ziehen.

Um nun trotzdem eine Lösung zu erhalten, müssen wir neue Zahlen einführen. Wir formen unsere Lösung etwas um und erhalten

$$x = 5 \pm \sqrt{-1 \cdot 4} = 5 \pm 2 \cdot \sqrt{-1}$$

mun definieren wir $\sqrt{-1} = i$ und schreiben damit unsere

Lösung $x = 5 \pm 2i$

Diese Zahl ist etwas neues. Es ist keine reelle Zahl, sondern wir nennen sie komplexe Zahl. Für diese komplexen Zahlen wollen wir nun einige Regeln angeben:

1) $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ und $i^3 = i^2 \cdot i = -i$; $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$ usw.

2) allgemein wird eine komplexe Zahl z durch den Ausdruck

$$z = a + bi \text{ gegeben. Hier sind } a \text{ und } b \text{ reell.}$$

Wir nennen $a = \text{Re}(z)$ Realteil

und $b = \text{Im}(z)$ Imaginärteil von z .

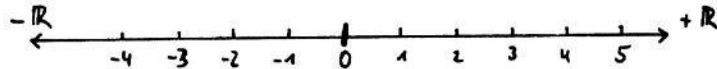
3) Für den Betrag von z gilt:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

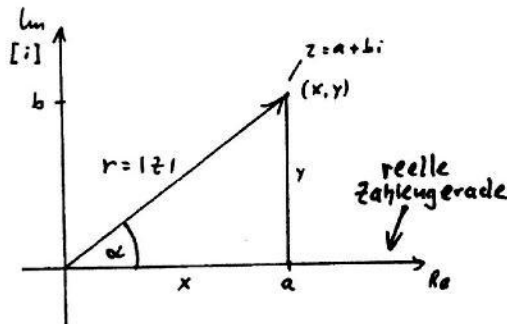
denn: wir nennen (wenn $z = a + bi$) die Zahl $z^* = a - bi$ die zu z konjugiert komplexe Zahl. Das Quadrat von z ist dann $z \cdot z^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 + \cancel{abi} - \cancel{abi} - b^2 i^2 = a^2 + b^2$. Und die Wurzel aus diesem Quadrat ist der Betrag von z .

4) Darstellung von komplexen Zahlen.

Die reellen Zahlen haben wir an der reellen Zahlengeraden dargestellt. Die positiven Zahlen nach rechts, die negativen



nach links. Die komplexen Zahlen stellen wir auf der Gauß'schen Zahlenebene dar.



Dabei entspricht die Zahl z einem Punkt (x, y) in dieser Zahlenebene. Es sei r sein Abstand zum Nullpunkt und α der Winkel zwischen dem Strahl vom Nullpunkt zu z und reelle Achse. Dann gilt:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

also gilt $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ und dies ist auch gleich $r e^{i\alpha}$.

Versuchen wir uns nun in dieser Nomenklatur einfach mal an der einfachsten Schwingungsform, der harmonischen.

Dort hatten wir $\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$

Jetzt lassen wir ja eine komplexe Zahl z zu also gilt

$$\ddot{z} + \frac{D}{m} z = 0 \quad \text{mit dem Ansatz} \quad z = A \cdot e^{i\omega t}$$

$$\implies \dot{z} = i\omega A e^{i\omega t}$$

$$\ddot{z} = i^2 \omega^2 A \cdot e^{i\omega t}$$

also $\ddot{z} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$ in die Dgl eingesetzt:

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + \frac{D}{m} A e^{i\omega t} = 0 \quad | : A e^{i\omega t}$$

$$\implies -\omega^2 + \frac{D}{m} = 0 \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \text{ - sauber!}$$

das stimmt ja schon mal. Wie sieht also nun die Lösung aus?

$$z = A e^{i\omega t} = A (\cos \omega t + i \sin \omega t) = A (\cos(\sqrt{\frac{D}{m}} t) + i \sin(\sqrt{\frac{D}{m}} t))$$

Das bedeutet, wenn wir unsere Lösung aufspalten:

$$\text{Re}(z) = A \cos(\sqrt{\frac{D}{m}} t) \quad \text{und} \quad \text{Im}(z) = A \sin(\sqrt{\frac{D}{m}} t)$$

und das sind beides Lösungen der Schwingungsgleichung, wie wir wissen. Das heißt, sowohl der Real- als auch der Imaginärteil entspricht unseren bisher gefundenen Lösungen.

Der Realteil einer komplexen Lösung gibt uns (bei Schwingungsproblemen) die Frequenz der behandelten Schwingung, während der Imaginärteil einer komplexen Lösung (falls er überhaupt vorhanden ist) uns die Dämpfungskonstanten gibt. Meist hängt der Imaginärteil bei komplexen physikalischen Größen mit Reibungsgrößen zusammen. Davon werden wir später noch mehr hören.

Zurück zu unserem eigentlichen Problem, den erzwungenen gedämpften Schwingungen.

Schreiben wir die Schwingungsgleichung noch einmal auf:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\tilde{\omega} t} \quad (\text{Jetzt müssen wir natürlich auch die periodische anregende Kraft mit einer e-Funktion darstellen, aber das macht nichts, da diese ja auch periodisch ist})$$

Unser Ansatz muß jetzt wie folgt aussehen:

$$x(t) = A \cdot e^{i\tilde{\omega} t}, \text{ gesucht nun diese Lösung, ebenso } A.$$

Leiten wir unseren Ansatz zweimal ab:

$$\dot{x}(t) = i\tilde{\omega} A e^{i\tilde{\omega} t} \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = -\tilde{\omega}^2 A e^{i\tilde{\omega} t}. \text{ Das ist doch viel einfacher, oder? Setzen wir ein:}$$

$$-\tilde{\omega}^2 A e^{i\tilde{\omega} t} + \frac{k}{m} i\tilde{\omega} A e^{i\tilde{\omega} t} + \omega_0^2 A e^{i\tilde{\omega} t} = \frac{F_0}{m} e^{i\tilde{\omega} t} \quad | : e^{i\tilde{\omega} t}$$

$\Rightarrow -\tilde{\omega}^2 A + i \frac{k}{m} \tilde{\omega} A + \omega_0^2 A = \frac{F_0}{m}$. Lösen wir das nun nach A auf, erhalten wir die Amplitude dieser Schwingung:

$$A (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2 + i \frac{k}{m} \tilde{\omega}) = \frac{F_0}{m} \quad \text{oder auch}$$

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2 + i \frac{k}{m} \tilde{\omega})}$$

im Fall 3) (erzwungen, ungedämpft) fanden wir etwas ganz ähnliches,

nämlich
$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Der Unterschied zwischen beiden liegt in diesem $i \frac{k}{m} \tilde{\omega}$. Dies ist ein Reibungsglied (wie man schon an der Größe k, dem Reibungskoeffizienten sieht).

So - einen weiteren Vorteil hat die Benutzung einer e-Funktion bei diesem Problem, wie wir jetzt gleich sehen werden:

Wir können nämlich die Anregung durch den äußeren Anreger mit einer konstanten Phasendifferenz durchführen. Was heißt das?

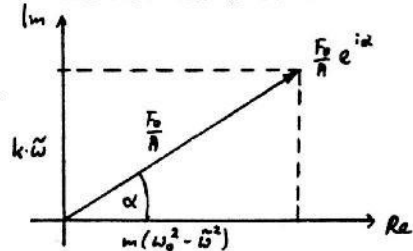
Wir können die Masse jeweils anschubsen, wenn sie rechts ist, wir können sie aber auch auf der anderen Seite anschubsen, oder in der Mitte. Der Erfolg ist derselbe. Aber die Phasendifferenz zwischen beiden ist verschieden. Und diese Phasendifferenz können wir bei diesem neuen Lösungsweg mit einbauen:

wir wählen als Lösungsansatz $x(t) = A e^{i(\tilde{\omega}t - \alpha)}$, wobei hier α die Phasendifferenz ist. Leiten wir nun ab, und setzen ein, erhalten wir:

$$A (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2 + i \frac{k}{m} \tilde{\omega}) = \frac{F_0}{m} e^{i\alpha}$$

Es unterscheidet sich von obigem durch die Konstante $e^{i\alpha}$.

Zeichnen wir dies in der komplexen Ebene auf:

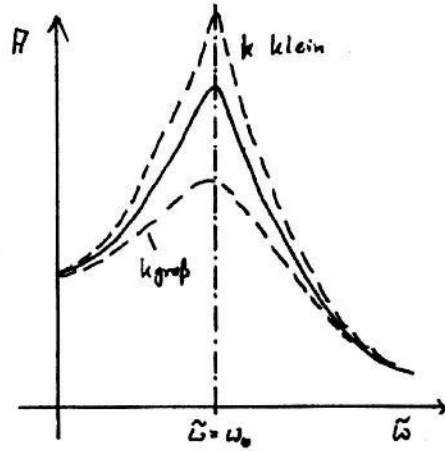


Hier ist jetzt der Phasenwinkel deutlich zu erkennen.

Zur zeitlichen Änderung dieses Winkels kommen wir noch zurück. Zunächst betrachten wir uns das Resonanzverhalten bei dieser Schwingungsform.

Durch diesen Reibungsterm $i \frac{k}{m} \tilde{\omega}$ wird die Amplitude der Resonanz verkleinert. Das heißt, daß die Amplitude hier nicht mehr unendlich werden kann, wie es auch in der Realität zutrifft.

Zeichnen wir uns die Resonanzkurve, hier dargestellt für verschiedene



dene Oftmals benutzt man auch die auf die Kraft normierte Amplitude $R = \frac{A}{F_0}$. Dann sieht diese also so aus:

$$R = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2 + i \frac{k}{m} \tilde{\omega})}$$

Ziehen wir nun aus diesem R den Phasenwinkel α heraus, so müssen wir schreiben $R = \rho e^{i\alpha}$.

Und sehen wir uns ρ^2 an, das ergibt

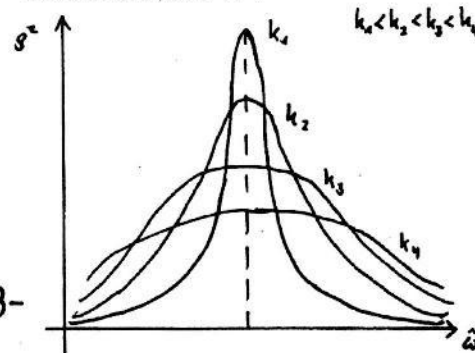
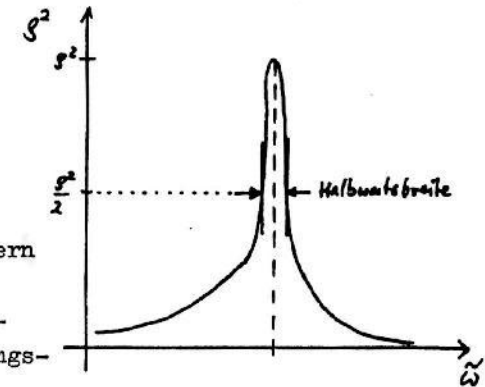
$$\rho^2 = \frac{1}{m^2(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2 + i \frac{k}{m} \tilde{\omega})(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2 - i \frac{k}{m} \tilde{\omega})} \quad \left(\begin{array}{l} \text{wir betrachten deshalb} \\ \text{das Quadrat, weil dann} \\ \text{der i-Term wegfällt.} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{m^2 [(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + (\frac{k}{m})^2 \tilde{\omega}^2]}$$

Der gezeichnete Verlauf sieht dann so aus:

Die Breite der Resonanzkurve auf halber Höhe (das ist die sogenannte Halbwertsbreite) also bei $\frac{\rho^2}{2}$ ist gerade $\frac{k}{m}$

Das heißt also, daß eine Dämpfung nicht nur die Höhe der Resonanzkurve verkleinert, sondern auch die Kurve verbreitert. Im unteren Bild einige Resonanzkurven, mit verschiedenen Reibungskoeffizienten k:



$k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ Bleiben wir nun hier noch etwas beim Phasenwinkel. Dieser war α . Er steht in $R = \rho e^{i\alpha}$.

Wie wir sehen werden, ist der Phasenwinkel α abhängig von der Anregungsfrequenz. Wie sieht diese Abhängigkeit aus?

5. mathematisches Pendel

Erweiterung, um Nenner null zu machen.

$$R = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2 + i \frac{k}{m} \tilde{\omega})} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2 - i \frac{k}{m} \tilde{\omega})}{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2 - i \frac{k}{m} \tilde{\omega})} = \frac{\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2 - i \frac{k}{m} \tilde{\omega}}{m[(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + (\frac{k}{m})^2 \tilde{\omega}^2]}$$

da $R = \text{Re}(R) + i \cdot \text{Im}(R)$ folgt für den Real- und den Imaginärteil:

$$\text{Re}(R) = \frac{\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2}{m[(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + (\frac{k}{m})^2 \tilde{\omega}^2]}$$

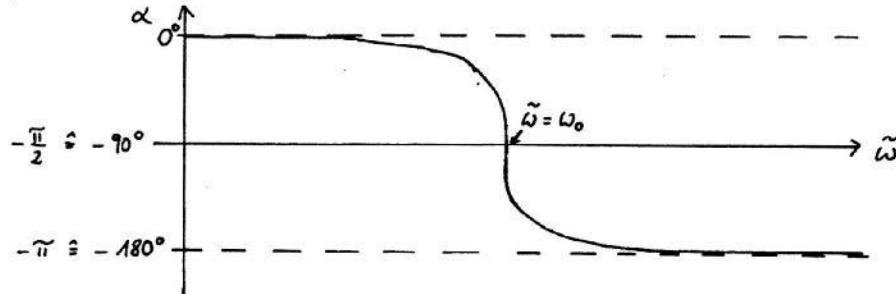
$$\text{Im}(R) = \frac{-\frac{k}{m} \tilde{\omega}}{m[(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + (\frac{k}{m})^2 \tilde{\omega}^2]}$$

Anhand des Diagramms in der Gauß'schen Zahlenebene können wir den Winkel α bestimmen. Es ist dort

$$\tan \alpha = \frac{\text{Im}(R)}{\text{Re}(R)} = \frac{-\frac{k}{m} \tilde{\omega}}{\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2} \quad \text{also gilt für den Phasenwinkel}$$

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{k}{m} \tilde{\omega}}{\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2}$$

Als Diagramm: Phasenwinkel in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz:



Was heißt das nun?

Wenn man ein System anregt mit der Frequenz $\tilde{\omega}$, so antwortet das System. Es kommt zu Resonanzerscheinungen, wenn die Anregungsfrequenz ähnlich der Eigenfrequenz des Systems wird. Vergrößert man die Anregungsfrequenz, so ändert sich die Phasenbeziehung zwischen beiden Systemen nach der obigen tan-Funktion.

Was ist das? - Schon wieder Pendel, das hatten wir doch schon! Ja, das stimmt wohl. Doch wollen wir nun einen anderen Weg beschreiben. Im Kapitel B.I.1. besprachen wir das Fadenpendel. Dort erhielten wir folgende Ergebnisse:

Für die Eigenfrequenz des mathematischen Pendels ergab sich $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ und für die potentielle

Energie erhielten wir das Ergebnis $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D \cdot s^2$, wobei s die Bogenlänge war.

In den letzten Kapiteln nun sahen wir, daß es sehr praktisch ist, Schwingungen mit Differentialgleichungen zu beschreiben,

Die bisherigen Dgls, die wir erarbeiteten, hatten alle die Form: $f(\ddot{x}, \dot{x}, x) = \text{const.}$, zu Deutsch:

Irgendeine Gleichung f hängt von \ddot{x} , von \dot{x} und von x ab und ist gleich irgendeiner Konstanten. Als Beispiele bekamen wir:

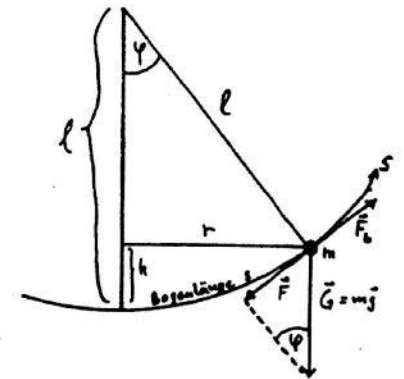
harmonische Schwingung ungedämpft	$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$
harmonische Schwingung gedämpft	$\ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = 0$
harmonische Schwingung erzwungen	$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = \frac{F_0}{m} e^{i\tilde{\omega} t}$
harmon. gedämpfte erzw. Schwingung	$\ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = \frac{F_0}{m} e^{i\tilde{\omega} t}$

All diese Dgls sind Gleichungen für die Variable x . Wir betrachteten bisher immer lineare Bewegungen (sprich: Schwingungen) in x -Richtung.

Beim Pendel nun handelt es sich nicht mehr um eine Bewegung in x -Richtung. Man kann zwar diese Bewegung im kartesischen Koordinatensystem behandeln. Allerdings brauchen wir dabei eine x - und eine y -Koordinate.

Sollen wir nun - bei der Pendelbewegung - s als Koordinate auffassen? Nein - eine krummlinige Koordinatenachse ist nichts.

Wir brauchen einen Parameter, der uns genau Auskunft darüber gibt, wo sich die Masse m in Abhängigkeit von der Zeit befindet. Wenn l konstant bleibt, ist die Masse m immer irgendwo auf dem



Kreisbogen um den Aufhängepunkt mit dem Radius l zu finden.

Das aber würde bedeuten, daß uns der Winkel φ eindeutig über den Ort von m Auskunft gibt.

Betrachten wir also den Winkel φ als neuen Parameter und stellen wir eine Dgl mit φ als Variable auf.

Der Weg ist wieder genau der gleiche - wir stellen eine Kräftebilanz auf :

Was greifen an m für Kräfte an ?

Zunächst einmal die Rückstellkraft F . Wie groß ist diese ?

Es gilt $\sin \varphi = \frac{F}{G} \implies F = m g \sin \varphi$. Aha - hier haben

wir schon einmal eine φ -Abhängigkeit.

Nun wirkt noch auf m eine beschleunigende Kraft F_b . Sie ist gerade gleich der Rückstellkraft (wenn wir hier auf äußere Kräfte und Reibungskräfte verzichten). Wie sieht aber nun eine solche beschleunigende Kraft in Abhängigkeit von φ aus?

Es ist $F_b = m \cdot a = m \cdot \ddot{s} = -F = -m g \sin \varphi$.

Bei der ersten Besprechung des Pendels haben wir nur kleine Winkel

φ zugelassen (d.h. nur kleine Auslenkungen bis ca. 30°). Tun wir dies hier auch, so können wir sagen, daß $\sin \varphi \approx \frac{s}{l}$. Wieso ?

Da für kleine Winkel $\sin \varphi \approx \varphi$, und $s = l \cdot \varphi$ ist, gilt einfach $\sin \varphi \approx \frac{s}{l}$. Bzw. bei kleinen Auslenkungen φ sind Bogenlänge s und der direkte Abstand r (siehe Skizze) etwa gleich.

Deshalb können wir sagen $\sin \varphi \approx \varphi = \frac{r}{l} \approx \frac{s}{l}$ - also gilt auch $s = l \varphi$. Und dies können wir für $m \ddot{s} = F_b$ oben einsetzen :

$F_b = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} (l \cdot \varphi) = m \cdot l \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\varphi) + m \cdot \varphi \cdot \frac{d^2}{dt^2} (l)$. Wir setzten voraus

daß $l = \text{const.}$ bleibt, so ist auch die zweite Ableitung von l nach der Zeit gleich 0 und es bleibt :

$$F_b = m l \ddot{\varphi}.$$

Die Rückstellkraft war $F = -m g \sin \varphi \approx -m g \varphi$.

Da ja beide gleich sind (daß sie entgegengerichtet sind, steckt schon im Minus bei F), gilt

$$m l \ddot{\varphi} = -m g \varphi \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0}$$

Vorhin hatten wir eine Dgl der gleichen Art. Es war

$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$, bei der Lösung bekamen wir noch heraus, daß $-90-$

$\frac{D}{m} = \omega_0^2$. Also könnten wir die Dgl der linearen harmonischen Schwingung gleich so schreiben $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$!

Hier ist es ebenso : wir können sagen $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$ oder $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$, sodaß folgt $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Also beträgt die Eigenfrequenz des mathematischen Pendels der Länge l $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Explizit für die Ungläubigen unter uns :

allgemeiner Lösungsansatz : $\varphi(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t - \omega_0^2 B \sin \omega_0 t$$

dies eingesetzt \implies

$$-\omega_0^2 A \cos \omega_0 t - \omega_0^2 B \sin \omega_0 t + \frac{g}{l} A \cos \omega_0 t + \frac{g}{l} B \sin \omega_0 t = 0$$

oder

$$\left(-\omega_0^2 + \frac{g}{l}\right) A \cos \omega_0 t + \left(-\omega_0^2 + \frac{g}{l}\right) B \sin \omega_0 t = 0$$

Dies gilt dann, wenn beide Klammern gleich 0 werden.

Also $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ bzw. $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$. Also doch !

Und dies ist das gleiche Ergebnis, das wir schon einmal für das mathematische Pendel gefunden hatten.

Somit lautet die Lösung : $\varphi(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$.

Nun suchen wir noch A und B . Wir sagen : zu einer Zeit $t = 0$ sei das Pendel maximal ausgelenkt. Also gilt dann $\varphi(t=0) = \varphi_0$.

$$\varphi(t=0) = A \cos(\omega_0 \cdot 0) + B \sin(\omega_0 \cdot 0) = A = \varphi_0 \implies A = \varphi_0.$$

Betrachten wir noch die erste Ableitung zur Zeit $t = 0$, da dort der \cos zum \sin wird und umgekehrt (und deshalb nicht gleich der zweite Term Null wird) - Die erste zeitliche Ableitung des Winkels was ist das ? Das ist die Winkelgeschwindigkeit. Also ist

$\dot{\varphi}(t=0)$ die Geschwindigkeit am Anfang der Bewegung. Da wir dann das Pendel erst loslassen, ist dort die Geschwindigkeit noch Null.

$$\dot{\varphi}(t=0) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 \cdot 0) + \omega_0 B \cos(\omega_0 \cdot 0) = \omega_0 \cdot B = 0$$

$\implies B = 0$

Somit kommen wir also zur richtigen Lösung für die Pendelbewegung

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos \omega_0 t \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \implies T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Alles wie schon gehabt !

Jetzt wollen wir noch die Energie betrachten und vergleichen mit der Energiebetrachtung, die wir für das Pendel schon angestellt haben.

Aus der Zeichnung des Pendels folgt : $\cos \varphi = \frac{1-h}{l}$

also $h = l (1 - \cos \varphi)$. Die potentielle Energie ist nun (wenn wir die potentielle Energie im untersten Punkt = Null setzen)

$$E_{\text{pot}} = m g h = m g l (1 - \cos \varphi)$$

Dies ist nun die potentielle Energie in Abhängigkeit des Winkels φ . Suchen wir noch die kinetische Energie für die gleiche Abhängigkeit :

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} \varphi \cdot l\right)^2 = \frac{m l^2}{2} \cdot \dot{\varphi}^2$$

also insgesamt $E_{\text{pot}} = m g l (1 - \cos \varphi) \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$

Machen wir die Probe mit dem Energieerhaltungssatz :

Dieser fordert, daß im abgeschlossenen System die Gesamtenergie konstant bleibt. Hier haben wir ein abgeschlossenes System und für die Gesamtenergie gilt :

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = m g l (1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$= m l (g - g \cos \varphi + \frac{1}{2} l \dot{\varphi}^2)$$

ist das konstant ? Keine Ahnung !

Wie können wir feststellen, ob ein Ausdruck konstant ist ? Nun - wir leiten ihn ab, und wenn die Ableitung gleich Null ist, so ist der Ausdruck konstant. Gut - und nach was ist abzuleiten ? Was heißt Energie ist konstant ? Das heißt einfach: die ist vorher und nachher gleich, also ist sie zeitlich konstant. Bzw. die zeitliche Ableitung der Energie muß Null werden. Probieren wir's.

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{ges}}) = m l \cdot \frac{d}{dt}(g - g \cos \varphi + \frac{1}{2} l \dot{\varphi}^2)$$

$$= m l (0 - g \frac{d}{dt}(\cos \varphi) + \frac{1}{2} l \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi}))$$

Führen wir dies explizit aus :

$\frac{d}{dt} \cos \varphi = ?$ Nach der Kettenregel gilt $\frac{d}{dt}(u(v(\varphi))) = \frac{d}{dt} u \cdot \frac{d}{dt} v$
 also $u = \varphi \implies \dot{u} = \dot{\varphi}$
 $v = \cos u \implies \dot{v} = -\sin u = -\sin \varphi$

$$\implies \frac{d}{dt} (\cos \varphi) = -\dot{\varphi} \cdot \sin \varphi$$

$$\text{und } \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi}) = \dot{\varphi} \frac{d}{dt} \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \frac{d}{dt} \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = 2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}$$

also gilt $\frac{d}{dt}(E_{\text{ges}}) = m l (g \dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{1}{2} l \dot{\varphi} \ddot{\varphi})$

dies ist dann gleich Null, wenn die Klammer Null wird. Also fragt sich, ob gilt :

$$g \sin \varphi + l \ddot{\varphi} \stackrel{?}{=} 0$$

Da wir ja $\sin \varphi$ durch φ annähern können, können wir auch schreiben $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi \stackrel{?}{=} 0$ Gilt das ? Schauen wir uns einmal die Dgl für das Pendel an, wie lautete die? Sie lautete $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$ Oha !

Also stimmt diese Beziehung (denn die Dgl ist ja richtig) und somit ist auch der Energiesatz gezeigt, bzw. jetzt haben wir die Richtigkeit der Gleichungen für E_{pot} und E_{kin} gezeigt.

Wir haben jetzt zwar gezeigt, daß die Gesamtenergie beim mathematischen Pendel konstant ist, wir haben aber noch nicht deren Wert ermittelt :

$$E(\varphi) = m g l (1 - \cos \varphi) + \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}^2$$

Für kleine φ können wir den Kosinus entwickeln $\left\{ \cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right\}$

$$= m g l \left(1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}^2$$

$$= m l \left(\frac{g \varphi^2}{2} + \frac{l \dot{\varphi}^2}{2} \right)$$

Hier ist $\varphi = \varphi(t)$ noch eine Variable, deren Zeitabhängigkeit wir aber kennen : $\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t$ also $\dot{\varphi}(t) = -\omega_0 \varphi_0 \sin \omega_0 t$ und $\dot{\varphi}(t)^2 = \varphi_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t$ und $\varphi(t)^2 = \varphi_0^2 \cos^2 \omega_0 t$.

Damit gilt $E(t) = m l \left(\frac{g}{2} \varphi_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} \varphi_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t \right)$
 mit $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ $= m l \left(\frac{g}{2} \varphi_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{l} \varphi_0^2 \sin^2 \omega_0 t \right)$
 $= m l \frac{g}{2} \varphi_0^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = m l \frac{g}{2} \varphi_0^2$

Dies können wir noch etwas verändern : da $\sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{D}{m}} \implies$

$$D = \frac{g m}{l} = \frac{m l g}{l^2} \text{ also } E_{\text{ges}} = \frac{D \cdot l^2}{2} \varphi_0^2 \text{ oder mit } s_0 = \varphi_0 \cdot l$$

$$E = \frac{1}{2} D s_0^2$$

hier ist s_0 die maximale Auslenkung, die φ_0 entspricht

Dies ist, wie man sieht, eine Konstante und gleich der Gesamtenergie bei jeder allgemeinen Schwingung (vgl. Kap. B.I.3.)

6. Drehpendel

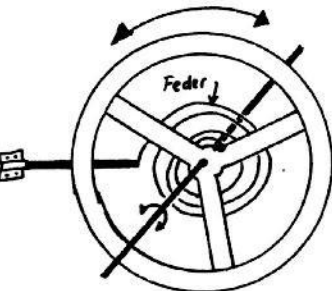
Wir betrachten nun ein anderes als das mathematische Pendel. Es ist dies das **Drehpendel**.

Es handelt sich hierbei um ein Schwungrad, das federnd gelagert ist.

Wir stellen auch hier zunächst eine Schwingungsgleichung, also eine Dgl auf, die wir dann lösen.

Was ist hier die Variable? Nehmen wir wieder den Drehwinkel φ .

Um unser Drehpendel aus der Ruhelage zu drehen, brauchen wir ein Drehmoment M . Dieses ist proportional zur Auslenkung φ . Analog dazu hatten wir für eine lineare Ausdehnung einer Feder das Hooke'sche Gesetz, nach dem die Kraft der Auslenkung s proportional war. Dort galt $F = D s$. Und hier machen wir die gleiche Analogie: Da $M \sim \varphi$, sagen wir



Drehpendel, z.B. Uhrwerk

$M = D^* \varphi$. D^* heißt Winkelrichtergröße. Weiterhin gelte ein Reibungsdrehmoment. Wir betrachten also eine gedämpfte Schwingung. Dieses Drehmoment ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit (bei der linearen Bewegung war die Reibungskraft proportional zur Lineargeschwindigkeit); also können wir sagen $M_p = k^* \dot{\varphi}$. Hierbei ist k^* der Reibungskoeffizient für diese "Drehreibung". Nun hatten wir auch bei allen Schwingungen Gebrauch vom Newtonschen Gesetz gemacht. Hier nun verwenden wir (da Drehbewegung) das Grundgesetz der Rotation, welches war $M = J \ddot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ war die Winkelbeschleunigung ($= \alpha$)

Stellen wir also hier die Drehmomentbilanz für unser Drehpendel auf, können wir dazu das Analogon: gedämpfte lineare Schwingung nehmen, denn dort hatten wir:

$$\text{Beschleunigungskraft} + \text{Reibungskraft} + \text{Federkraft} = 0$$

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + D x = 0$$

dazu das Rotationsanalogon:

$$\text{Beschleunigungsdrehmoment} + \text{Reibungsdrehmoment} + \text{Federdrehmoment} = 0$$

$$\text{bzw. } J \ddot{\varphi} + k^* \dot{\varphi} + D^* \varphi = 0$$

Also heißt unsere Dgl für:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k^*}{J} \dot{\varphi} + \frac{D^*}{J} \varphi = 0 \quad (\text{dazu analog } \ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = 0)$$

Bei der Dgl der gedämpften Schwingung erhielten wir als Eigenfrequenz

$$\omega_{\text{gen.}} = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$$

Und hier ist es dann wieder ganz genauso; ersetzen wir:

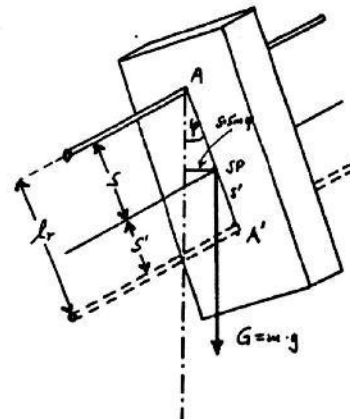
$$D \rightarrow D^*, k \rightarrow k^*, m \rightarrow J \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{Drehp.}} = \sqrt{\frac{D^*}{J} - \frac{k^{*2}}{4J^2}}$$

Man sieht hier, wie praktisch und arbeitersparend es ist, daß wir die Schwingungsarten allgemein mit Dgls besprochen haben. Wir können davon auch bei anderen Schwingungsproblemen Gebrauch machen. Dazu noch ein anderes Beispiel:

7. Physikalisches Pendel

Bisher besprochen wir nur das mathematische Pendel. Dies war ein Massenpunkt an einer masselosen Schnur. Allerdings gibt es so etwas in Wirklichkeit nicht. Es gibt keine Massenpunkte und auch keine masselosen Schnüre. Betrachten wir zum Beispiel ein Pendel in einer alten Standuhr. Dort kann man weder von Massenpunkt, noch von masseloser Schnur sprechen. Trotzdem handelt es sich um ein Pendel. Ein solches wollen wir nun besprechen. Es ist dies ein sogenanntes **physikalisches Pendel**, ein schwingender



starrer Körper: Jeder starre Körper, der um eine nicht durch den Schwerpunkt gehende Achse drehbar ist, vollführt im Erdschwerefeld bei kleinen Auslenkungen Schwingungen.

Dies schauen wir uns jetzt beim gezeichneten starren Körper genauer an. Am Pendel, das um φ aus der Ruhelage ausgelenkt ist, greift das Drehmoment $M = F \cdot r = m g s \sin \varphi$ an. Da kleine Auslenkungen vorausgesetzt sind, gilt $\sin \varphi \approx \varphi$, also $M = m g s \varphi = D^* \varphi$.

Hier gilt prinzipiell das gleiche, wie bei dem Drehpendel im Kapitel vorher. Der Einfachheit halber wollen wir auf eine Dämpf-

5- Abstand Schwerpunkt - Drehachse

fung verzichten. Dann ergibt sich als Frequenz :

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{J}} \quad \text{Dies ist auch hier so. Nur wie groß ist hier } D^* ?$$

Wir fanden $D^* = m g s$, also können wir schreiben statt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D^*}} \quad \text{für das physikalische Pendel} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m g s}}$$

Erhebt sich nun die Frage, was das J eigentlich für ein Trägheitsmoment ist. J hier ist das Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch den Aufhängepunkt. Nennen wir es deshalb besser J_A .

Also hier ist $T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{m g s}}$, dahingegen beim mathematischen Pendel $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Somit kann man das physikalische Pendel auf das mathematische zurückführen, indem man die Länge $l_r = \frac{J_A}{m s}$ einführt.

Der Punkt A' (um l_r von A entfernt) heißt Schwingungsmittelpunkt und l_r nennt man die reduzierte Pendellänge.

Es ergibt sich, daß die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels genauso groß ist, wie die eines mathematischen Pendels mit $l = l_r$, also als hinge die Gesamtmasse des physikalischen Pendels (als Massenpunkt vereinigt) an einem masselosen Faden der Länge l_r . Dies soll hier noch kurz gezeigt werden.

Nach dem Satz von Steiner gilt $J_A = J_S + m s^2$.

$$\text{hier } l_r = \frac{J_S + m s^2}{m \cdot s} = \frac{J_S}{m s} + s$$

Läßt man das Pendel um A' schwingen, wird

$$l_r' = \frac{J_A'}{m s'} = \frac{J_S + m(l_r - s)^2}{m(l_r - s)} = \frac{J_S}{m(l_r - s)} + l_r - s = \frac{J_S}{m(l_r - s)} + \frac{J_S}{m \cdot s}$$

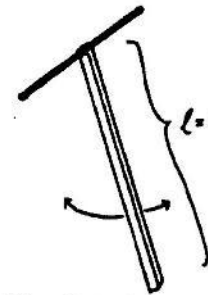
$$= \frac{J_S}{m \left(\frac{J_S}{m s} + s - s \right)} + \frac{J_S}{m \cdot s} = s + \frac{J_S}{m \cdot s} = l_r \implies l_r' = l_r$$

Daher gilt für die Schwingungsdauern :

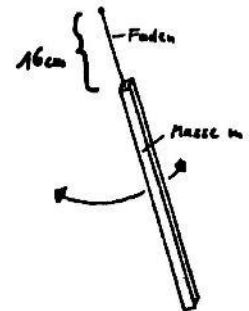
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r'}{g}} = T'$$

Somit bleibt die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels unverändert, wenn man die Achse durch den Schwingungsmittelpunkt legt.

Dazu ein kurzes Beispiel : Wir betrachten nebenstehendes physikalisches Pendel.



$$l_r = \frac{J_S}{m \cdot s} + s = \frac{\frac{1}{12} m l^2}{m \cdot \frac{l}{2}} + \frac{l}{2} = \frac{l^2}{3} \cdot \frac{2}{l} + \frac{l}{2} = \frac{2}{3} l + \frac{l}{2} = l \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6} \cdot l \quad \text{hier also } l_r = 1,16 \text{ m}$$



Die Schwingungsdauern oben und rechts sind also gleich !

III. SUPERPOSITION

Zunächst wollen wir uns weiter mit allgemeinen Überlegungen zu Schwingungsphänomenen befassen.

Betrachten wir die Dgls, die wir bisher hatten :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = \frac{F_0}{m} e^{i \tilde{\omega} t} \quad \text{und} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

Diese Dgls sind alle linear, d.h. daß \ddot{x} , \dot{x} , x , $\ddot{\varphi}$, $\dot{\varphi}$, φ usw. alle mit dem Exponenten 1 auftreten. \ddot{x}^1 , \dot{x}^1 etc.

Eine nichtlineare Dgl ist z.B. folgende $E(x) = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + m g x$ wegen dieses Quadrates

Nun gilt :

Falls zu einer Dgl die Lösung $x_1(t)$ und die Lösung $x_2(t)$ existiert, so ist auch die Summe von beiden $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ eine Lösung der Dgl.

Dies haben wir bei der Einführung der Dgls ja schon gesehen. Was heißt das aber physikalisch ?

Was sind in unserem Falle Lösungen von Dgls gewesen ?

Es waren alles Schwingungen.

Wenn sich also die Lösungen von Dgls ungestört überlagern, so gilt das auch für Schwingungen :

Wird ein Körper zu mehreren Schwingungen angeregt, so überlagern sich diese ungestört.
 Superpositions- oder Überlagerungsprinzip

Wir wollen jetzt untersuchen, was geschieht, wenn man Schwingungen überlagert. Das Ergebnis hängt davon ab, ob es gleiche oder verschiedene Frequenzen, Amplituden, Phasen sind, die zur überlagerten Schwingung beitragen.

1. Schwebung, Interferenz

Fall 1. Wir überlagern zwei Schwingungen gleicher Frequenz, gleicher Amplitude und gleicher Phase:

d.h. $x_1(t) = x_0 \cos \omega t$ und $x_2(t) = x_0 \cos \omega t$

$\Rightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 x_0 \cos \omega t.$

Dies ist wieder eine harmonische Sinusschwingung mit der Amplitude $2x_0$ und der Frequenz ω . \rightarrow Skizze

Fall 2. Wir überlagern zwei Schwingungen verschiedener Amplitude, aber gleicher Frequenz und gleicher Phase:

$x_1(t) = x_0 \cos \omega t$ und $x_2(t) = x'_0 \cos \omega t$

$\Rightarrow x(t) = (x_0 + x'_0) \cos \omega t.$

d.h. die Schwingung bleibt bestehen, nur vergrößert sich jetzt die Amplitude.

Bei Schwingungen gleicher Frequenz, gleicher Phase überlagern sich die Amplituden so, daß die resultierende Amplitude die Summe aus den ursprünglichen ist. \rightarrow Skizze

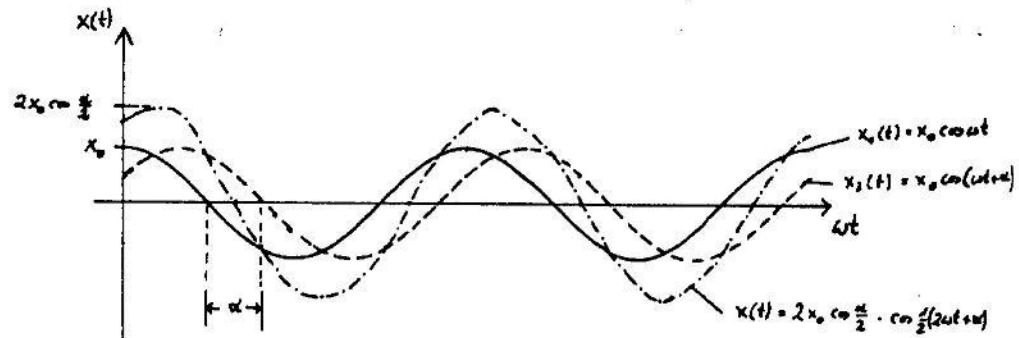
Fall 3. Wir überlagern zwei Schwingungen gleicher Amplitude, gleicher Frequenz, aber verschiedener Phase.

$x_1(t) = x_0 \cos \omega t$ und $x_2(t) = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$

$x(t) = x_0(\cos \omega t + \cos(\omega t + \alpha)) =$

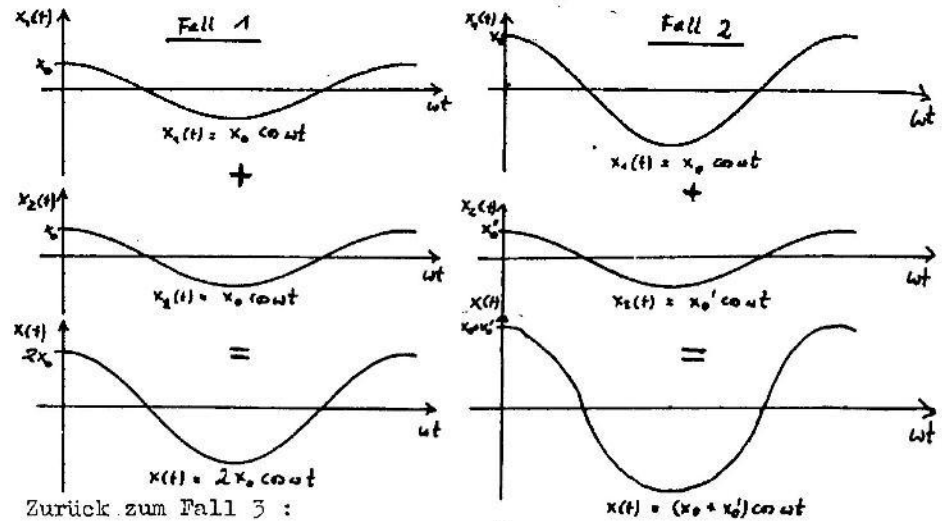
$= 2 x_0 \cos \frac{1}{2}(2\omega t + \alpha) \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha$

Sehen wir uns diese letzte Schwingung genauer an:
 Zeichnen wir sie:



Wir sehen: es ändern sich Phase und Amplitude, aber es handelt sich nach wie vor um eine harmonische Schwingung.

Zeichnen wir auch noch die Fälle 1 und 2:



Zurück zum Fall 3:

Wir hatten dort $x(t) = 2x_0 \cdot \cos \frac{1}{2}(2\omega t + \alpha) \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha.$

Hier hängt nur noch der $\cos \frac{1}{2}(2\omega t + \alpha)$ von der Zeit ab. Alles andere ist konstant und gehört somit zur Amplitude:

$x(t) = (2 x_0 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}) \cdot \cos \frac{1}{2}(2\omega t + \alpha).$

Wie die Schwingung im Endeffekt aussieht, hängt also von der Phasendifferenz von beiden ab. Betrachten wir einige Möglichkeiten:

Möglichkeit a) $\alpha = 0 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = 1 \hat{=} \text{Schwingung mit verdoppelter Amplitude und ursprünglicher Frequenz (= Fall 1.)}$

b) $\alpha = \pi \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \hat{=} \text{keine Amplitude mehr, das heißt es gibt auch keine Schwingung mehr!}$

Möglichkeit c) $\alpha = 2\pi \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = -1 \hat{=} \text{Schwingung im Fall 1. mit umgekehrtem Vorzeichen.}$

d) $\alpha = 3\pi \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = 0$, wie in Möglichkeit b) also keine Schwingung mehr.

e) $\alpha = 4\pi \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = 1 \hat{=} \text{Möglichkeit a).}$

Alle dazwischenliegenden Möglichkeiten haben eine Amplitude, die zwischen $-2x_0$ und $+2x_0$ liegt.

Man nennt diesen Fall 3., d.h. die Überlagerung zweier oder mehrerer Schwingungen mit einer festen Phasendifferenz. Interferenz. Die extremsten Fälle bei der Interferenz sind die, bei der die Amplitude verdoppelt wird, also eine Verstärkung der Schwingung sichtbar wird - das ist bei Phasendifferenz $= 0, 2\pi, 4\pi$ usw. der Fall - und bei der die Amplitude 0 wird, also eine Auslöschung der Schwingung stattfindet - das ist bei Phasendifferenz $= \pi, 3\pi$, usw. so.

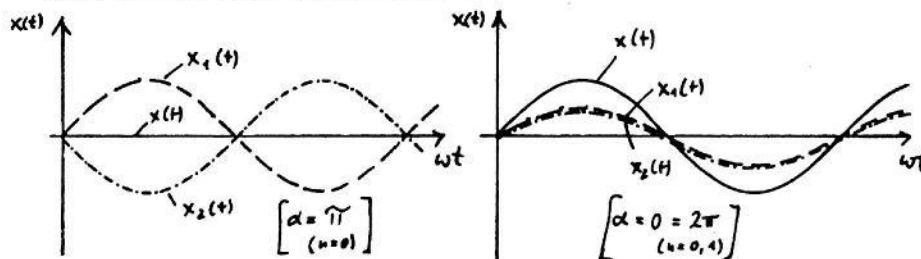
Also, wenn wir mit α die Phasendifferenz bezeichnen, dann gilt Für $\alpha = 0, 2\pi, 4\pi$, usw. = $2n\pi$ erfolgt Verstärkung

Für $\alpha = \pi, 3\pi, 5\pi$, usw. = $(2n+1)\pi$ erfolgt Auslöschung

wobei n alle ganzen Zahlen annehmen kann. Also noch einmal:

Phasendifferenz $\alpha = 2n\pi \Rightarrow$ Verstärkung	$n \in \mathbb{N}$
$\alpha = (2n+1)\pi \Rightarrow$ Auslöschung	

noch einmal eine Skizze dazu:



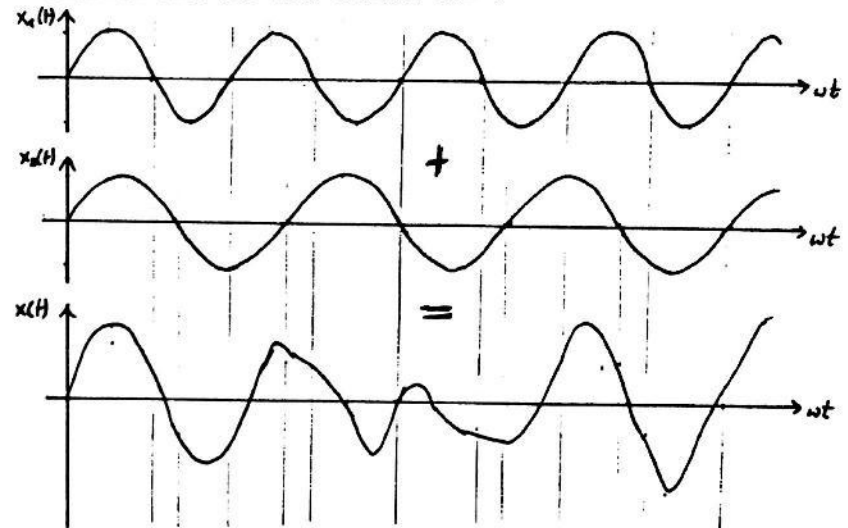
Wir haben nun bis hierher Fälle betrachtet, bei denen die Frequenz der beiden ursprünglichen Schwingungen gleich war. Machen wir es noch komplizierter. Wählen wir im nächsten Fall:

Fall 4. Zwei Schwingungen unterschiedlicher Frequenz, gleicher Phase, gleicher Amplitude.

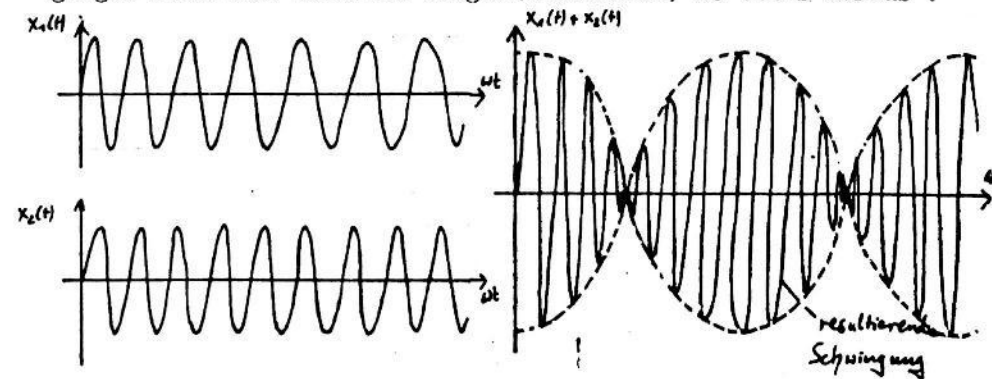
$$x_1(t) = x_0 \cos \omega_1 t \quad \text{und} \quad x_2(t) = x_0 \cos \omega_2 t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= x_0 (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ &= x_0 \left(2 \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cdot \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \right) \\ &= 2 x_0 \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2)t \cdot \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2)t \end{aligned}$$

Zeichnen wir uns das einmal auf:



Es kommt zu einer merkwürdigen Schwingung. Diese können wir uns viel besser betrachten, wenn wir voraussetzen, daß die beiden verwendeten Schwingungen nicht allzu unterschiedlich sind. Sagen wir $\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow$ es kommt dann (wenn wir beide Schwingungen Punkt für Punkt im Diagramm addieren) so etwas heraus:



Dies ist nun wiederum eine Überlagerung zweier Schwingungen: Eine schnelle sin-Schwingung (oder cos- wie man will), und einer langsameren.

Wir hatten $x(t) = 2 x_0 \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$

Es soll sein $\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 \approx 2 \omega_1$

aber $\omega_1 - \omega_2 \neq 0$

Soweit darf die Näherung nicht gehen, denn setzt man Zahlen ein so sieht man:

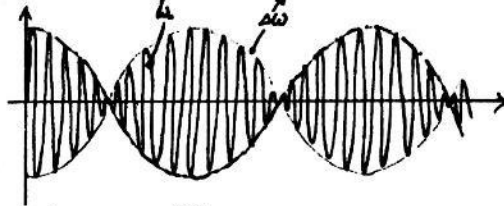
$$\begin{aligned} \text{mit } \omega_1 = 1000 \text{ und } \omega_2 = 1002 &\Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = 2 \omega_1 \\ &\hat{=} 1002 + 1000 = 2002 \\ &\text{Fehler } 0,1\% \end{aligned}$$

aber mit $\omega_1 - \omega_2 = 0$

$$\hat{=} -2 = 0 \quad \text{Fehler} = \infty$$

(Für die Unbelehrbaren !!)

Also angenähert $x(t) = 2 x_0 \cos \omega_1 t \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$



Die schnelle Frequenz ist

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

Die langsame ist die Differenzfrequenz $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$.

Falls $\Delta\omega = 0$ also $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \cos \frac{\Delta\omega}{2} t = 1$ und deshalb

$x(t) = 2 x_0 \cos \omega_1 t$, wie es auch zu erwarten war (das ist dann der Fall 1.)

Diese langsame Schwingung nennt man Schwebung. Sie tritt immer dann auf, wenn sich zwei Schwingungen ähnlicher Frequenz überlagern.

Beispiel: Um eine Gitarre zu stimmen, bedient man sich oft des folgenden Tricks: Man geht davon aus, daß eine Saite richtig gestimmt ist (Vergleich mit anderem Instrument). Dann greift man auf ^{dieser und der} benachbarten Saite so, daß der gleiche Ton erklingt. Dieser Ton ist natürlich nur dann wirklich gleich, wenn die Nachbarsaite relativ zur richtig gestimmten Saite exakt gestimmt ist. Ist dies nicht der Fall, also unterscheiden sich die Frequenzen geringfügig, so hört man eine Schwebung als auf- und ab-schwellende Lautstärke. Man stimmt nun die eine Saite so lange, bis die Schwebungsfrequenz verschwindet.

Gerade in der Akustik ist das Phänomen der Schwebung besonders gut zu zeigen und zu hören.

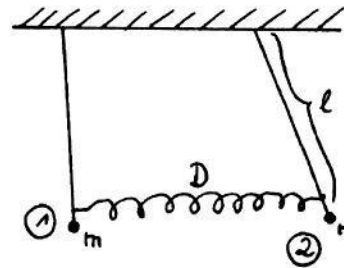
2. Gekoppelte Pendel

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß sich Schwingungen überlagern und neue Schwingungen bilden können.

Was geschieht nun, wenn wir zwei schwingende Systeme verwenden, die auf irgend eine Art miteinander verbunden, man sagt gekoppelt sind?

Wir betrachten uns dafür das gekoppelte Pendel.

Es handelt sich dabei um zwei Fadenpendel, die mit einer Feder untereinander verbunden sind. Sie sind nicht starr miteinander verbunden; wären sie es, könnten wir uns dieses Kapitel sparen, da ^{man} zwei starr miteinander verbundene Systeme als ein System betrachten kann, da beide Einzelsysteme immer nur die gleiche Frequenz haben können. Sind sie aber nicht starr verbunden, so können sie verschiedene Frequenzen und auch verschiedene Amplituden annehmen. Wir benutzen also als Kopplung eine weiche Feder, die beide mathematischen Pendel miteinander verbindet.



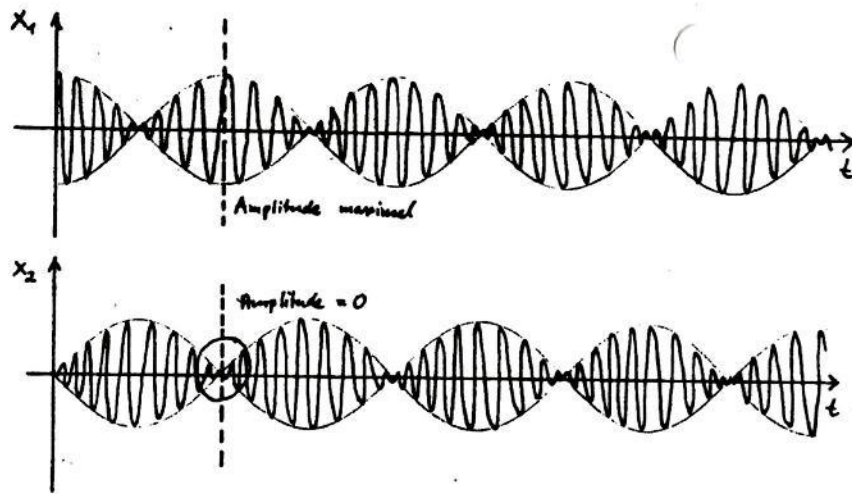
Da wir eine weiche Feder nehmen wollen (wer ein gutes Gedächtnis hat, der weiß noch, daß weiche Federn ein kleines D haben), handelt es sich hier um eine schwache Kopplung.

Die Feder übt nun, wenn sie sich dehnt, eine periodisch wechselnde Kraft aus. Es ist dies eine gegenseitige erzwungene Schwingung, nur mit dem Unterschied zur echten erzwungenen Schwingung, daß die erregende Schwingung hier keinen beliebigen Energievorrat hat.

Die Amplitude von 2 kann nicht größer werden, als die von 1 ist, da 2 nicht mehr Energie aufnehmen kann, als 1 hatte.

Insgesamt ergibt sich eine Schwebung, bei der die Energie dauernd von einem auf das andere Pendel übertragen wird.

Dies kann man zum Beispiel sichtbar machen, indem man als Pendel zwei Hohlkugeln verwendet, die unten ein Loch haben, und die mit Sand gefüllt sind. Unten läuft ein Fließband vorbei und der auslaufende Sand zeichnet das Elongations- Zeit- Diagramm dieser gekoppelten Pendelschwingung auf :



Dies sieht tatsächlich wie eine (bzw. zwei) Schwebung(en) aus. Wie kam eine Schwebung noch zustande? Eine Schwebung ergab sich als Überlagerung von zwei Schwingungen ähnlicher Frequenz. Hier ist es im Prinzip genauso. Aber was sind hier die beiden Frequenzen ω_1 und ω_2 ? Stellen wir zuerst einmal die Dgls der beiden gekoppelten Pendel auf:

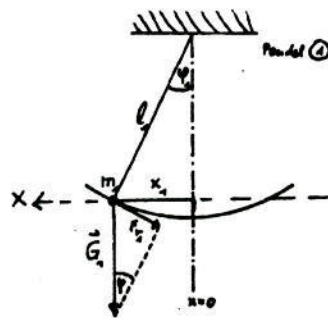
Wir gehen wieder davon aus, daß φ_1 und φ_2 , also die Auslenkungen klein sein sollen.

Was wirken auf die beiden Pendel für Kräfte?

Zunächst einmal wirken auf beide Pendel jeweils die Schwerkraft.

Diese berechnen wir zunächst:

Aus der unteren Zeichnung sieht man: $\sin \varphi_1 = \frac{x_1}{l_1} = \frac{F_{R1}}{m_1 g}$



Pendel ① also $F_{R1} = \frac{m_1 \cdot g}{l_1} \cdot x_1$

analog für das zweite Pendel

$$F_{R2} = \frac{m_2 \cdot g}{l_2} \cdot x_2$$

Zu unserer Erleichterung setzen wir gleiche Massen und gleiche Fadenlängen voraus $m_1 = m_2$ und $l_1 = l_2$

Wir legen unser Koordinatensystem (die x-Achse) so, daß sie von innen (also von der Nulllage) nach links zeigt. Deshalb haben die Rückstellkräfte F_R und die Koordinaten x_1 bzw. x_2 entgegengesetzte Richtungen. Dies machen wir durch ein Minuszeichen deutlich.

Also ergibt sich:

$$F_{R1} = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot x_1 \quad \text{und} \quad F_{R2} = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot x_2$$

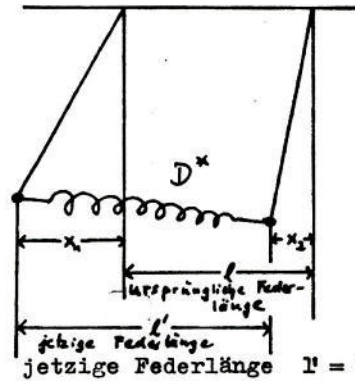
Machen wir es wie vorhin beim einfachen Pendel und ersetzen die Konstante $\frac{m \cdot g}{l}$ durch die Konstante D_0 .

Also ergibt sich für unsere Rückstellkräfte F_1 und F_2 :

$$F_1 = -D_0 \cdot x_1 \quad \text{und} \quad F_2 = -D_0 \cdot x_2$$

Sind das die einzigen Kräfte die wirken? Nein - bisher haben wir ja die Kopplung noch garnicht in unsere Berechnung mit einbezogen.

Dadurch, daß die Pendel über eine Feder miteinander gekoppelt sind ergibt sich noch eine weitere Kraft. Durch das wechselseitige Schwingen beider Pendel wird die Feder dauernd gedehnt. Aber um eine Feder zu dehnen, muß man eine Kraft aufwenden. Diese Kraft müssen wir noch miteinbeziehen. Wie groß ist sie?



Bei einer bestimmten Pendelstellung - wie zum Beispiel in der Zeichnung - ist die Kopplungsfeder um die Strecke $x_1 - x_2$ gedehnt. Wieso?

Sehen wir uns das Bild genau an: Bezeichnen wir die ursprüngliche Federlänge (bei der die Kopplungsfeder entspannt war) mit l und die jetzige Länge mit l' , so ergibt sich für die Dehnung gerade $l' - l$.

Aus der Zeichnung ist zu ersehen:

$$\text{jetzige Federlänge } l' = l + x_1 - x_2$$

$$\Rightarrow l' - l = l + x_1 - x_2 - l = x_1 - x_2$$

Erinnern wir uns an das Hooke'sche Gesetz, welches besagte, daß die Kraft, um eine Feder um die Länge s zu ändern gleich $-D s$ war. Dabei war D eine für die Feder charakteristische Größe (die sogenannte Federkonstante) ... Hier ist es genauso -

$F = \pm D^* (x_2 - x_1)$ Wir schrieben $\pm D^*$. D^* ist die Federkonstante für unsere Kopplungsfeder. Klar. Aber warum \pm - einfach: + für das linke und - für das rechte Pendel.

Damit können wir nun beide Kräftebilanzen (für beide Pendel) aufstellen.

Es gilt:

$$F_1 = m \ddot{x}_1 = -D_0 \cdot x_1 + D^* (x_2 - x_1)$$

$$F_2 = m \ddot{x}_2 = -D_0 \cdot x_2 - D^* (x_2 - x_1) \quad \text{oder}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{D_0 + D^*}{m} x_1 - \frac{D^*}{m} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{D_0 + D^*}{m} x_2 - \frac{D^*}{m} x_1 = 0 \end{cases}$$

Dies ist ein System gekoppelter Dgl's. (Denn in jeder kommen zwei verschiedene Koordinaten vor).

Auch ein solches System kann man lösen. Wir wollen hier aber darauf verzichten. Es kommt die schon aufgezeichnete Schwebung heraus.

Wir wollen hier nur zwei Fälle betrachten, wo es keine Schwebung gibt:

Fall 1 : Beide Pendel schwingen mit gleicher Phase mit gleicher Amplitude $x_{1\max} = x_{2\max} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

\Rightarrow Die beiden Pendelschnüre sind dauernd parallel. Somit ist die Kopplungsfeder immer entspannt. Es handelt sich also einfach um zwei unabhängig voneinander schwingende Pendel. Es ist logisch, daß die Eigenfrequenz für dieses System gerade gleich $\omega_0 = \sqrt{\frac{D_0}{m}} = \omega_1$ ist. Dies wollen wir prüfen.

$$x_1 = x_2 = x \quad \text{also}$$

$$\ddot{x} + \frac{D_0 + D^*}{m} x + \frac{D^*}{m} x = \ddot{x} + \frac{D_0}{m} x = 0$$

Aha - das ist ja gerade wieder die Dgl der einfachen harmonischen Schwingung mit der Eigenfrequenz

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D_0}{m}} = \sqrt{\frac{D_0}{m}}$$

und so sieht die Schwingung aus :

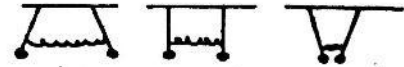


Fall 2 : Beide Pendel schwingen mit gleicher Amplitude, aber entgegengesetzt, d.h. mit einer Phasendifferenz von

$$\tilde{u} = 180^\circ \quad \text{bzw.} \quad \boxed{x_1 = -x_2}$$

setzen wir dies in die Dgl ein :

$$\ddot{x}_1 + \frac{D_0 + D^*}{m} x_1 + \frac{D^*}{m} x_1 = 0$$



Die andere Dgl sieht genauso aus !

$$\text{also } \ddot{x} + \frac{D_0 + 2D^*}{m} x = 0$$

Somit ergibt sich eine Eigenfrequenz von

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D_0 + 2D^*}{m}} = \sqrt{\frac{D_0}{m}} \cdot \sqrt{1 + 2 \frac{D^*}{D_0}}$$

Diese beiden Schwingungen ω_1 und ω_2 sind zwei besondere Schwingungen des Systems. Es sind die einzigen, bei denen keine Schwebung auftritt.

Deshalb nennt man sie auch Fundamentalschwingungen.

$\omega_1 = \sqrt{\frac{D_0}{m}}$	$\omega_2 = \sqrt{\frac{D_0}{m}} \cdot \sqrt{1 + 2 \frac{D^*}{D_0}}$	Phasendifferenz 180°
-----------------------------------	--	-----------------------------

Beim gekoppelten Pendel erhalten wir zwei Fundamentalschwingungen, die parallele und die entgegengesetzte Schwingung.

Bei einem System, daß aus drei Schwingern besteht, z.B. drei voneinander durch Federn abgetrennte Massen, erhalten wir drei Fundamentalschwingungen, USA.

3. Eigenschwingungen

Wir betrachten nun einen elastischen dünnen Metallstab. Beispielsweise eine Autoantenne. Auch so etwas kann schwingen. Ein solcher Stab hat allerdings sehr viele verschiedene Eigen- bzw. Fundamentalschwingungen. Wir können uns nämlich diesen Stab ersetzt denken durch eine Vielzahl von kleinen Massen, die durch Federn miteinander verbunden sind. Da wir viele Massen haben, erhalten wir auch viele Fundamentalschwingungen.

Es gibt eine sogenannte Grundschwingung, und mehrere Oberschwingungen. Die Frequenzen dieser Schwingungen verhalten sich zueinander wie ganze Zahlen.

Betrachten wir dies am Beispiel unseres Stabes.

Hier kommt es noch darauf an, wie der Stab eingespannt ist, d.h. wie die Randbedingungen aussehen. In der Zeichnung auf der nächsten Seite sind die Eigenschwingungen eines langen dünnen zylindrischen Stabes dargestellt, der a) frei schwingt, b) an einer Seite und c) an beiden Seiten eingespannt ist :

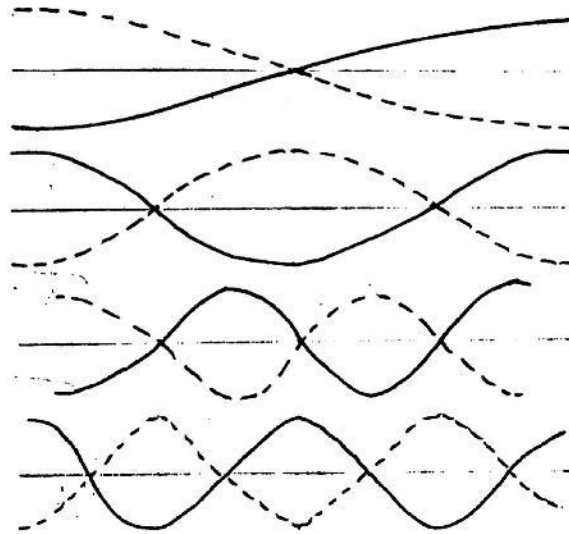
Eigenschwingungen - frei schwingender Stab

1. Eigenschwingung
(= Grundschw.)

2. Eigenschwingung
(= 1. Oberschw.)

3. Eigenschwingung
(= 2. Oberschw.)

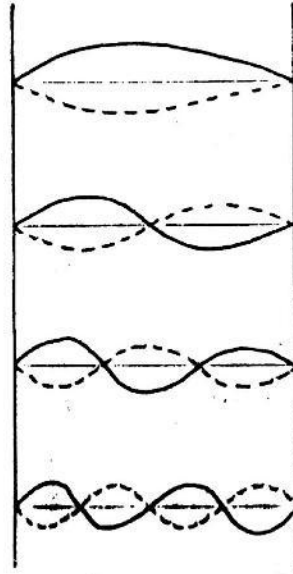
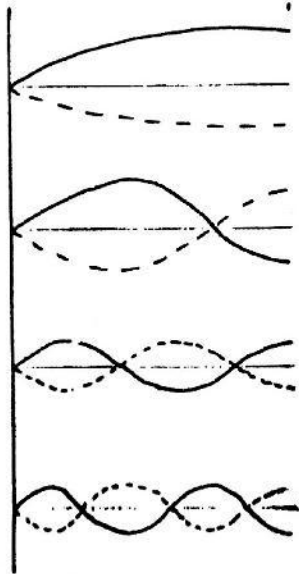
4. Eigenschwingung
(= 3. Oberschw.)



einseitig

beidseitig

eingespannter langer Stab.



Grundschw.

1. Oberschw.

2. Oberschw.

3. Oberschw.

C. WELLEN

I. EINFÜHRUNG

1. Begriffe

Was sind Wellen, bzw. wodurch unterscheiden sich Wellen von Schwingungen?

Wir verstehen unter Wellen die Fortpflanzung von Schwingungen, bzw. die Fortpflanzung von irgendwelchen Störungen.

Wir unterscheiden:

- Wellen, die an ein materielles Medium gebunden sind (man nennt sie auch mechanische Wellen), so z.B. Schall (bewegt sich in Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern fort); elastische Wellen (im Festkörper), Erdbebenwellen (in der Erde), Wasserwellen (in Flüssigkeiten) usw.
- Wellen, die sich auch im Vakuum ausbreiten können z.B. elektromagnetische Wellen (insbes. Licht, γ -Strahlen), Gravitationswellen usw.

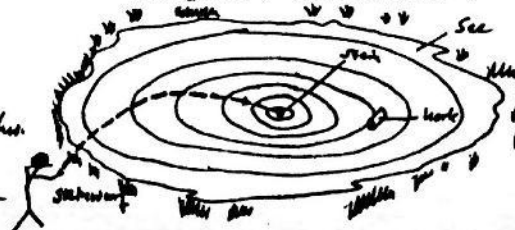
In diesem Kapitel wollen wir uns nur auf die erste Art beschränken, also auf die mechanischen Wellen. Zur Behandlung von elektromagnetischen Wellen brauchen wir noch die ganze Elektrizitätslehre und den Magnetismus, was alles erst später durchgenommen wird.

Zunächst einmal betrachten wir nur eindimensionale mechanische Wellen.

Bei den Wellen ist allgemein folgendes zu beachten:

Durch eine Welle wird keine Materie transportiert

Beispiel: Wasserwelle:



Wirft man einen Stein ins Wasser, so sieht man Wellen, die sich ringförmig ausbreiten. Legt man einen Kork irgendwo auf die Wasseroberfläche, müßte er sich auch nach außen bewegen,

wenn die entstandenen Wasserwellen Materie (hier die den Kork umgebenden Wasserteilchen) transportieren würden. Dies ist nicht der Fall, der Kork bleibt liegen.

Was geschieht mit ihm - er bewegt sich nur auf- und ab. Das heißt aber, er führt eine Schwingung aus. Das gilt selbstverständlich auch für die Wasserteilchen, die den Kork umgeben. Kein Teilchen bewegt sich vom Wellenzentrum weg - aber alle Teilchen führen Schwingungen nach oben und unten aus.

physikalisch :

In dem aus vielen gekoppelten schwingungsfähigen Wasserteilchen bestehenden System breitet sich ein an einer Stelle angeregter Schwingungszustand räumlich nach allen Seiten aus. Wenn sich eine Schwingung räumlich ausbreitet, nennen wir das eine Welle. Der Raumbereich, in dem sich diese Schwingung ausbreitet nennen wir Wellenfeld.

Wir werden sehen, daß man die Begriffe Amplitude, Frequenz, Schwingungsdauer und Phase, die wir bei den Schwingungen definiert hatten, auch auf die Wellen anwenden kann.

2. mathematische Beschreibung

Wir beschreiben eine Schwingung mit

$$A(t) = A_0 \sin \omega t \quad \text{oder} \quad A(t) = A e^{i \omega t}$$

Also - bei der Schwingung war die Amplitude zeitabhängig. Genaugenommen war die Phase der Schwingung zeitabhängig. (Die Phase war die den momentanen Schwingungszustand charakterisierende Größe). Zu verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 war die Phase verschieden (mit Ausnahme, wenn $t_2 - t_1 = n \cdot T$ - $n \in \mathbb{N}$)

Wie sieht es nun bei den Wellen aus ?

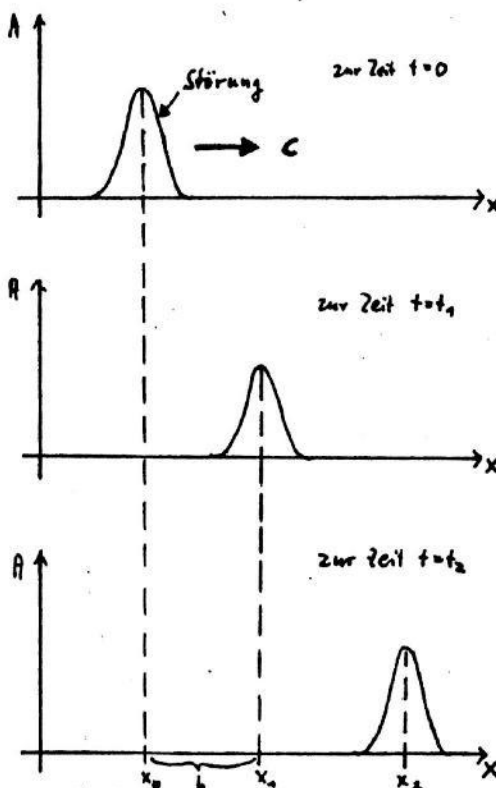
Wir legen einen zweiten Korken auf den See, der vom ersten Korken einen gewissen Abstand hat. Wir sehen, daß beide in verschiedenen Phasen schwingen. Die Phasendifferenz ist aber gleichbleibend. Ändern wir ihren Abstand voneinander, so ändert sich auch ihre Phasendifferenz.

⇒ Bei der Welle ist die Phasendifferenz nicht nur zeitsondern auch ortsabhängig.

Nun wollen wir diese Abhängigkeit mathematisch untersuchen :

Sei die Amplitude für eine harmonische Störung = A
(Eine harmonische Störung ist auch eine Schwingung, aber das Wort Störung bringt zum Ausdruck, daß ein schwingungsfähiges Gebilde aus seiner Ruhelage ausgelenkt wurde und daß sich diese Störung dann räumlich ausbreitet).

Also gilt $A = A(x, t)$. Früher verwendeten wir den Buchstaben x für die Elongation $x(t)$. Das vergessen wir schnell wieder. Jetzt ist x die Ortskoordinate für unsere Welle. Die zeitliche Elongation nennen wir nun $A(t)$.



Es gilt $A(t) = A_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$

$\sin \omega t$ beschreibt die Schwingung und φ_0 ist die augenblickliche Phase. Sie ist aber vom Ort abhängig - und zwar ist sie linear vom Ort abhängig (die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist konstant) - also

$$\varphi_0 = k \cdot x$$

$$\Rightarrow A(x, t) = A_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$$

War's zu schnell ? - Gut

A ist abhängig von Ort und Zeit $A = A(x, t)$. Betrachten wir uns die Bilder. Für $t=0$ sei $x = x_0$ (erstes Bild)

$$\Rightarrow x_1 = x_0 + c t_1$$

$$\text{Denn } \rightarrow b = x_1 - x_0$$

$$\text{Geschwindigkeit } c = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

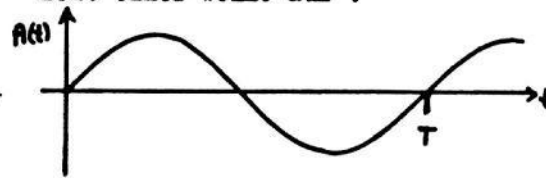
$$\text{Also (da } t_0 = 0) \Rightarrow c = \frac{x_1 - x_0}{t_1} \quad \text{bzw. } t_1 \cdot c = x_1 - x_0 \quad \text{oder}$$

$$x_1 = x_0 + c t_1, \quad \text{ganz analog gilt für das dritte Bild}$$

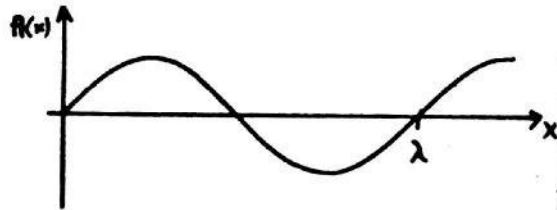
$$x_2 = x_0 + c t_2$$

Die Störung A pflanzt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit c fort (längs der x -Achse). Wie groß ist nun $A(x, t)$?

Führen wir zunächst noch eine neue Größe ein - zu unserer Erleichterung. Zeichnen wir einmal die Zeit- und die Ortsabhängigkeit einer Welle auf :



Bei der Zeitabhängigkeit nannten wir die Zeit, die verstrich, bis die Schwingung wieder gleiche Phase hatte $T = \text{Schwingungsdauer}$.



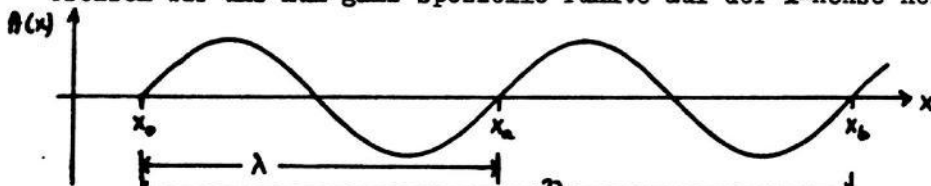
Bei der Ortsabhängigkeit wollen wir etwas Ähnliches machen. Wir nennen die Länge, die eine Welle zwischen zwei Punkten gleicher Phase hat Wellenlänge (λ).

Kommen wir zu unserem Problem zurück, eine Gleichung aufzustellen, die beide Abhängigkeiten enthält :

Wandert unser Wellenberg mit der Geschwindigkeit c weiter (siehe Zeichnungen auf der letzten Seite), so gilt

$$x_1 = x_0 + c t_1 \quad \text{und} \quad x_2 = x_0 + c t_2 .$$

Greifen wir uns nun ganz spezielle Punkte auf der x -Achse heraus:



hier ist, wenn die Welle um eine Wellenlänge fortgeschritten ist -

$$x_1 = x_0 + c T \quad \text{oder auch} \quad x_1 = x_0 + \lambda$$

ist sie um zwei Wellenlängen fortgeschritten, gilt

$$x_2 = x_0 + c(2T) \quad \text{oder} \quad x_2 = x_0 + 2\lambda .$$

$$\Rightarrow c T = \lambda \quad \text{bzw.} \quad c(2T) = 2\lambda \quad \text{also} \quad c = \frac{\lambda}{T} .$$

Wir wissen ja, daß $\frac{1}{T} = \nu$ also erhalten wir einen Zusammenhang zwischen Frequenz einer Welle und deren Wellenlänge :

$$\boxed{c = \lambda \cdot \nu}$$

Betrachten wir eine normale Welle, so stellen wir fest, daß die Wellenlänge und auch die Frequenz konstant bleiben, gleiches gilt dann auch für die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

\Rightarrow Die Ortsabhängigkeit der Amplitude ist linear mit x oder : Die Ortsabhängigkeit der Phase ist linear in x .

Sei φ_0 die Phase einer Welle, so gilt $\varphi_0 \sim x$ oder mit Proportionalitätskonstante k : $\varphi_0 = k \cdot x$.

Wir hatten für eine beliebige Schwingung zum Beispiel die Beziehung

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$$

Breitet sich diese Schwingung räumlich aus (wie betrachten hier nur eine Dimension, die x - Richtung), so ist lediglich die Phase ortsabhängig, und zwar linear, wie wir oben gesehen haben.

Für unsere somit zeit- und ortsabhängige Amplitude gilt dann

$$\boxed{A(x, t) = A_0 \sin(\omega t - k x)}$$

k war der Proportionalitätsfaktor zwischen Phase und Ort. Was ist nun k physikalisch, oder : wo macht sich k bemerkbar ?

Versuchen wir es mal mit der Einheit. Bei unseren Schwingungsgleichungen (z.B. $A(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx)$) lag das Argument der Winkelfunktion (hier $\omega t - kx$) immer im Bogenmaß vor. Es hatte also keine Einheit.

Das heißt daß ωt und auch kx dimensionslos sein müssen. Bei ωt ist das klar. ω hat die Einheit $\left[\frac{1}{\text{sec}}\right]$ und t hat die Einheit $[\text{sec}]$. Gut - Auch kx muß dimensionslos sein. x hat die Einheit $[\text{Meter}]$, also muß die Einheit von k $\left[\frac{1}{\text{m}}\right]$ sein. Das ist doch schon was ! Wie hängt aber nun k mit anderen Wellengrößen (Frequenz, Wellenlänge usw.) zusammen?

Zunächst einmal - k nennen wir Wellenzahl. Diese Wellenzahl hat die Einheit $\left[\frac{1}{\text{m}}\right]$

Genau wie eine Schwingung ist natürlich auch die Ortsabhängigkeit der Welle periodisch in 2π . Die Phase einer Welle ist im Abstand λ genauso groß. Also :

$$A(x, t) = A(x + \lambda, t) \quad \text{somit}$$

$$A_0 \sin(\omega t - kx) = A_0 \sin(\omega t - k(x + \lambda)) \quad \text{und wir wissen ja} \\ = A_0 \sin(\omega t - kx - 2\pi) .$$

-101- Dies alles gilt also dann, wenn gilt $k\lambda = 2\pi$ oder

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \boxed{k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}} .$$

Somit können wir nun die Orts- und Zeitabhängigkeit der Amplitude mit verschiedenen Größen schreiben :

$$\begin{aligned}
 A(x,t) &= A_0 \sin(\omega t - k x) \\
 &= A_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \\
 &= A_0 \sin k(\omega t - x)
 \end{aligned}$$

Insgesamt ist wichtig zu wissen, daß eine Welle zeit- und ortsabhängig ist, und zwar gilt

$$A(x,t) = A_0 \sin(\omega t - kx)$$

wobei $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl und λ die Wellenlänge ist.

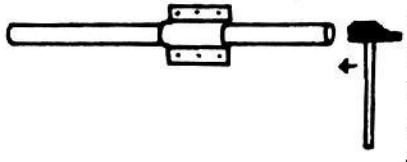
3. Wellenarten

Bei einer Welle ist natürlich das, was es nun zu untersuchen gilt, die Ortsabhängigkeit, denn die Zeitabhängigkeit ist ja das, was wir bereits bei den Schwingungen unter die Lupe genommen haben. Nun kann man zwei grundlegende Wellenarten unterscheiden.

- 1) **Transversalwelle** - bei der Transversalwelle steht die Störung A, damit die Amplitude senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung.
 Beispiel: angezupfte Saite, Wasserwelle.
 Bei der Wasserwelle sahen wir, daß der Kork von unten nach oben schwingte, während sich die Welle senkrecht dazu ausbreitete.
- 2) **Longitudinalwelle** - bei der Longitudinalwelle steht die Störung parallel zur Ausbreitungsrichtung.
 Dies ist zum Beispiel bei den Schallwellen der Fall.

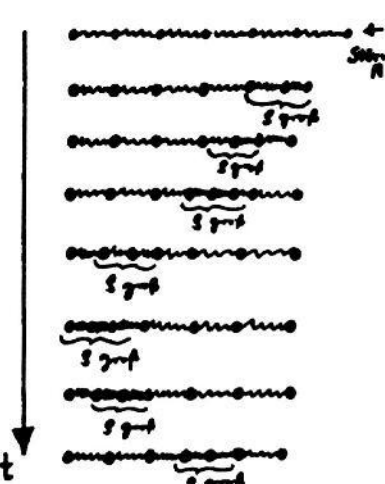
Schallwellen sind Druckschwankungen des Mediums (Gas, Flüssigkeit, Festkörper), die sich durch das Medium fortpflanzen.

Nehmen wir einen langen Stab und klopfen mit einem Hammer auf eines seiner Enden, so gibt es dort eine Druckverdichtung. Der Druck versucht sich mit dem Nachbardruck auszugleichen. Das heißt, daß an der Stelle des Nachbardrucks der



Druck größer wird, während er an der Anschlagstelle kleiner wird. Auf diese Weise pflanzt sich diese Druckänderung durch das ganze Medium mit einer bestimmten Geschwindigkeit fort. Die Störung A war ja der Schlag mit dem Hammer. Und der erfolgte in Richtung der Stab längsachse. Die Welle (auch eine Druckschwankung ist eine Welle) pflanzt sich in der gleichen Richtung fort. Aus diesem Grunde ist solch eine Schallwelle eine Longitudinalwelle.

Wir sprachen eben von der Geschwindigkeit einer elastischen Welle. Schall ist eine elastische Welle. Und dieser Schlag mit dem Hammer ist der Ursprung einer elastischen Welle, mithin einer Schallwelle. Idealisieren wir den langen Stab durch eine



Menge von kleinen Massen, die durch elastische Federn miteinander verbunden sind, und schlagen mit dem Hammer auf eine Ende (verursachen also eine Störung), so werden an dieser Stelle die Massen zusammengedrückt. Diese größere Massendichte (denn dies ist ja nichts anderes) pflanzt sich nun durch diese Kette fort. Die Wanderungsgeschwindigkeit der Störung (hier der Druck- oder Dichteerhöhung) hängt von den Federkonstanten der Federn und irgendwie von den Massen ab. Dies wollen wir uns etwas näher betrachten.

Wir fragen also : Wovon hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit c einer solchen elastischen Welle ab ?

Oftmals kann man schon mit einer Dimensionsbetrachtung einiges sehen. Wenn wir uns einen langen Stab durch unser Federmodell ersetzt denken, so ist es einsichtig, daß c wahrscheinlich irgendwie von den Federkonstanten und den Massen abhängt. Da wir aber in Wirklichkeit einen ausgedehnten Körper haben, wird c vom Elastizitätsmodul und der Massendichte des Körpers (des Stabes) abhängen. Stellen wir eine Dimensionsbetrachtung für E und für ρ auf, so können wir in etwa erkennen, wie diese Abhängigkeit

$c = c(\rho, E)$ aussehen könnte:

$$c = \left[\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right] ; \rho = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] ; E = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m sec}^2} \right]$$

Durch Probieren findet man :

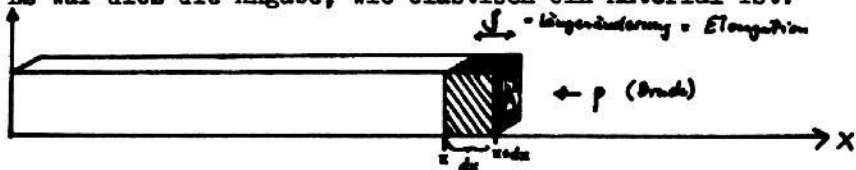
$$\left[\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right] \sim \left[\frac{\left(\frac{\text{kg}}{\text{m sec}^2} \right)^{1/2}}{\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)} \right] \Rightarrow c \sim \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

II. WELLENGLEICHUNGEN

Dieses ganze Kapitel, indem es um die mathematische Beschreibung von Wellen durch sogenannte Wellengleichungen, könnte auch weggelassen werden. Die Wellengleichungen sind hauptsächlich für Physiker interessant. Trotzdem sind diese Gleichungen für Nicht-Physiker nicht unverständlich. Man wird sehen, daß für alle Wellen die Gleichungen analog sind, daß eine örtliche mit einer zeitlichen Änderung über die Ausbreitungsgeschwindigkeit zusammenhängt. Beim schnellen Durchlesen dieses Skriptes kann dieses II. Kapitel übergangen werden, die Kenntnisse werden für das weitere Verständnis nicht vorausgesetzt.

1. Longitudinalwellen

Wir betrachten nun einen langen Stab mit dem Querschnitt A , der Dichte ρ und dem Elastizitätsmodul E . In der Mechanik besprochen wir bereits das Elastizitätsmodul. Es war dies die Angabe, wie elastisch ein Material ist.



Wir dehnen durch Druck p den Stab an der Stelle x um Δl .
 \rightarrow Dehnung des Stabes an der Stelle $x + dx$ um $\Delta l + d\Delta l$.
 Wir stellen uns als "Störung" einen bestimmten Stabquerschnitt vor, der um Δl aus seiner Ruhelage verschoben wird.
 Es wird nicht nur irgendein Punkt P verschoben, sondern der Stab verformt sich auch.

Wir lassen also einen Druck p auf den Querschnitt A wirken.

$$p = \frac{F}{A} = \sigma = E \frac{\Delta l}{l} \quad \text{oder - da bei uns } \Delta l = \Delta l \quad \text{und } l = x$$

$$p = \frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{x} \quad (\text{Erinnern wir uns: } \sigma = \text{Spannung})$$

Das Stück dx wird um Δl verschoben. Es wird aber außerdem noch um $d\Delta l = \frac{d\Delta l}{dx} dx$ kürzer!

$$p = E \frac{d\Delta l}{dx} \quad \text{es gilt aber genauso auch} \quad p = E \frac{d\Delta l}{dx}$$

Da dx um $d\Delta l$ kürzer wird, entspricht dies einem Druckzuwachs von

$$dp = d\left(E \frac{d\Delta l}{dx}\right) = E d\left(\frac{d\Delta l}{dx}\right) = E \frac{d^2\Delta l}{dx^2} dx$$

Da nun $dF = A dp = A \cdot E \frac{d^2\Delta l}{dx^2} dx$ und da nach Newton der Kraft eine Beschleunigung eines Masselementes entspricht,

$$dF = d(m \cdot a) = a \cdot dm + m \cdot da$$

$$= a \cdot dm \quad (\text{denn } da = 0, \text{ da Beschleunigung konst.})$$

$$\rightarrow dF = a \cdot dm = \frac{d^2\Delta l}{dt^2} \cdot d(A \cdot \rho \cdot x) = \frac{d^2\Delta l}{dt^2} \cdot A \cdot \rho \cdot dx$$

setzen wir beid gleich \Rightarrow

$$A \cdot E \frac{d^2\Delta l}{dx^2} dx = \frac{d^2\Delta l}{dt^2} A \cdot \rho \cdot dx \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\Delta l}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \frac{d^2\Delta l}{dx^2}$$

Ganz exakt wäre die Beziehung (da $\Delta l = \Delta l(x, t)$) vgl. S. 104

$$\left(\frac{\partial^2 \Delta l}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \Delta l}{\partial x^2} \right)$$

Das ist die eindimensionale Wellengleichung der elastischen Longitudinalwelle

Suchen wir dafür eine Lösung:

Wir sehen hier zwei zweite Ableitungen nach Ort und Zeit. Einen Lösungsansatz kennen wir ja schon, nämlich unsere Beschreibung der Orts- und Zeitabhängigkeit der Amplitude.

$$\text{es war } A(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx) \quad \text{Was ist hier } A(x, t) ?$$

Die Amplitude ist hier natürlich Δl .

Also lautet unser Lösungsansatz:

$$\Delta l(x, t) = \Delta l_0 \sin(\omega t - kx) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\Delta l}{dx^2} = -\Delta l_0 k^2 \sin(\omega t - kx)$$

$$\text{und} \quad \frac{d^2\Delta l}{dt^2} = \Delta l_0 \omega^2 \sin(\omega t - kx)$$

Dies in unsere Wellengleichung eingesetzt ergibt:

$$\Delta l_0 \omega^2 \sin(\omega t - kx) = \frac{E}{\rho} \cdot \Delta l_0 k^2 \sin(\omega t - kx) \quad \rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho} \cdot k^2 \quad \text{Wir wissen (S. 104), daß } k = \frac{\omega}{c}$$

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho} \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{oder} \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad \text{bzw. } \boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

Und das hatten wir schon einmal durch eine Dimensionsbetrachtung herausgefunden.

Stellen wir also eine Wellengleichung auf, lösen sie, so kommt als Lösungsbedingung die Wellengeschwindigkeit heraus.

Bei den Schwingungen hatten wir etwas Ähnliches :

Dort stellten wir Schwingungsgleichungen auf, lösten sie und erhielten als Lösungsbedingung die Winkelgeschwindigkeit, bzw. die Frequenz.

Nun noch etwas -

Wir schrieben vorhin die zweite Ableitungen mit runden d's :

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ Was bedeutet das ? Haben wir eine Funktion $y = f(x)$, so können wir sie nach x ableiten.
 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$.

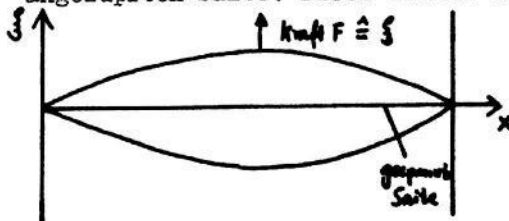
Hängt nun diese Funktion $f(x)$ noch von etwas anderem ab, z.B. von der Zeit t , so können wir sie auch nach x ableiten, wir müssen dabei allerdings die Zeitvariable t konstant halten. Dann schreiben wir statt

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = f'(x, t)$$

Auch hier hängt ξ nicht nur von x , sondern auch von t ab. Kennen wir die Funktion $\xi(x, t)$, so können wir die zweite Ableitung nach der Zeit berechnen, indem wir die Koordinate x als Konstante ansehen. Ebenso berechnen wir die zweite Ableitung nach dem Ort x , indem wir nun die Zeit t als Konstante ansehen. Dies haben wir auch vorhin getan, als wir den Lösungsansatz ableiteten und einsetzten. Es kann dies jeder für sich einmal mit diesem Lösungsansatz ausprobieren.

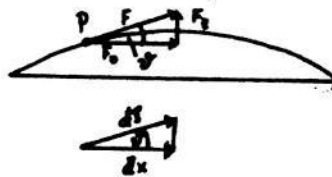
2. Transversalwelle

Am einfachsten betrachten wir die Transversalwelle an einer angezupften Saite. Diese lenken wir aus ihrer Ruhelage aus,



und zwar um die Strecke ξ . Die Wellengleichung ist unabhängig vom Angriffspunkt der Kraft (eine Saite klingt in ihrer Grundfrequenz gleich, egal wo sie angezupft wird).

Wir betrachten uns nun auf der Saite irgendeinen Punkt P und schauen uns an, wie er sich im Ort und in der Zeit ändert.



Wenn wir die Saite anzupfen, müssen wir die Kraft F aufbringen. Wenn F_0 die Spannkraft der Saite ist (die Kraft mit der die Saite gespannt ist), dann gilt $\cos \varphi = \frac{F_0}{F} = \frac{dx}{d\xi} \Rightarrow$

Also gilt für eine kleine Kraft dF , die man zusätzlich wirken lässt um die Saite um das Stück $d\xi$ zu dehnen

$$dF = d\left(\frac{F_0}{\cos \varphi}\right) = F_0 d\left(\frac{1}{\cos \varphi}\right) = F_0 d\left(\frac{d\xi}{dx}\right) = F_0 \frac{d^2 \xi}{dx^2} dx$$

Ein kleines Massenstück der Saite (das Stück des Punktes P) wird aber durch diese Kraft beschleunigt. Und zwar gilt :

$$dF = d(m \cdot a) = d(A \cdot \rho \cdot x \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2}) = \frac{d^2 \xi}{dt^2} A \cdot \rho \cdot dx$$

gleichsetzen :

$$F_0 \cdot \frac{d^2 \xi}{dx^2} dx = \frac{d^2 \xi}{dt^2} A \cdot \rho \cdot dx \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{F_0}{A \cdot \rho} \frac{d^2 \xi}{dx^2}$$

oder exakt

eindimensionale Wellengleichung für die Transversalwelle einer Saite.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{F_0}{A \cdot \rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Lösung : Ansatz - wie vorhin

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \xi_0 k^2 \sin(\omega t - kx)$$

$$\text{und } \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \xi_0 \omega^2 \sin(\omega t - kx)$$

eingesetzt in die Wellengleichung

$$\omega^2 = \frac{F_0}{A \cdot \rho} k^2 = \frac{F_0}{A \cdot \rho} \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$c = \sqrt{\frac{F_0}{A \cdot \rho}}$$

Wir können ganz allgemein sagen - für alle Wellen gilt :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

für eine eindimensionale Welle in x -Richtung

dreidimensional gilt :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$$

man bezeichnet die Differentialvorschrift

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \nabla \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 = \Delta$$

∇ nennt man den Nabla - Operator und

$\nabla^2 = \Delta$ nennt man den Laplace - Operator.

Ein Operator ist eine Vorschrift, die angibt was mit dem, was hinter ihm steht, zu geschehen hat. z.B.:

$\frac{d}{dx}(f(x))$ heißt "Leite $f(x)$ nach x ab" $\left(\frac{d}{dx}\right)$ ist hierbei ein Operator!

Also - ganz allgemein kann man die Wellengleichung für jede Welle schreiben als:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

allgemeine dreidimensionale Wellengleichung

Später werden wir noch genau auf die Differentialoperatoren eingehen - es soll nur hier, an dieser Stelle einmal erwähnt werden, daß man eine Welle mit diesen Abkürzungen so beschreibt:

3. Schrödingergleichung

Fun ein kleiner - aber nicht uninteressanter - Spaziergang in die Quantenmechanik.

Wie wir später auch noch sehen werden, hat man festgestellt, daß die Energie (jegliche Energie) nicht alle Werte annehmen kann. Die Energie ist quantisiert. Nur bestimmte Werte kann die Energie annehmen. Es gilt

$$E = h \cdot \nu$$

Zweitens sagt die Quantenmechanik aus, daß sich auch Teilchen der Masse m und der Geschwindigkeit v Wellencharakter und dabei die Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$ haben (de-Broglie-Wellenlänge).

Beispielsweise beim Licht wird dies deutlich. Je nach Experiment nimmt das Licht einmal Wellen- ~~ein~~ andermal Teilchencharakter an.

Man stellt es sich so vor - Lichtteilchen bewegen sich wellenförmig. Sie haben die Energie $E = h \cdot \nu$, hier tritt also eine Teilchen und eine Wellengröße auf, und sie haben die Wellenlänge $\lambda = h/mv$ - auch hier tritt eine Wellengröße (λ) und eine Teilchengröße $mv = p$ (Impuls) auf.

Auch dafür können wir eine Wellengleichung aufstellen, die für atomare Systeme sehr aufschlußreich ist.

Noch eine Bemerkung zu diesem h . Es handelt sich hierbei um das sogenannte Plancksche Wirkungsquantum, eine Naturkonstante.

Sie hat die Größe $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J sec}$.

Stellen wir die Wellengleichung auf. Was brauchen wir dazu? Die Ausbreitungsgeschwindigkeit - also

$$c = \lambda \cdot \nu = \frac{h}{m \cdot v} \cdot \frac{E}{h} = \frac{E}{m \cdot v} = \frac{h \cdot \nu}{m \cdot v}$$

Impuls des Teilchens ist $p = m \cdot v \Rightarrow$

$$\text{kinetische Energie } E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE_{\text{kin}}}$$

potentielle Energie $E_{\text{pot}} = U$

$$\Rightarrow \text{Gesamtenergie } E = U + \frac{p^2}{2m} \quad \text{also} \quad E_{\text{kin}} = E - U$$

$$c = \frac{h \cdot \nu}{m \cdot v} = \frac{h \cdot \nu}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}} = \frac{h \cdot \nu}{\sqrt{2m(E - U)}}$$

und dies in die allgemeine Wellengleichung eingesetzt ergibt:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{2m(E - U)}{h^2 \nu^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

In der einfachen Atomphysik interessiert man sich hauptsächlich für zeitunabhängige Systeme. Also zerlegen wir die Störung in einen nur ortsabhängigen und einen nur zeitabhängigen Teil -

$$\psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t}$$

Ψ ist nur eine Funktion des Ortes. Als zeitlichen Anteil schreiben wir $e^{-i\omega t}$, da die Zeitabhängigkeit der Welle eine Schwingung mit einer Frequenz ω ist. Setzen wir ein:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Psi \cdot (-\omega^2) e^{-i\omega t} = -\omega^2 f; \text{ einsetzen:}$$

$$\nabla^2 f = -\frac{2m(E - U)}{h^2 \nu^2} \omega^2 f$$

$$\nabla^2(\psi \cdot e^{-i\omega t}) = -\frac{2m(E-U)}{\hbar^2} \omega^2 \psi e^{-i\omega t} \quad (\text{da } \omega^2 = 4\pi^2 \nu^2)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E-U) \cdot \psi = 0 \quad \text{mit } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Diese Gleichung beschreibt die Eigenschaften atomarer Systeme in stationären (zeitunabhängigen) Zuständen. Ist die potentielle Energie U eines Systems bekannt (z.B. im H-Atom), berechnet man mit dieser Gleichung die stationären Energiezustände (also die möglichen Energiewerte $\hat{=}$ Elektronenbahnen) mit deren Hilfe man die Strahlungsspektren dieser Systeme erklären kann. Genauer werden wir sehen, was darunter zu verstehen ist, wenn wir die Atomphysik durchführen und auf die Spektroskopie zu sprechen kommen.

Die Gleichung

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E-U) \psi = 0$$

nennt man die zeitunabhängige Schrödingergleichung.

III. ÜBERLAGERUNG VON WELLEN

1. Interferenz

Im Kapitel über die Schwingungen haben wir schon einmal periodische Vorgänge überlagert. Wir überlagerten Schwingungen die sich in Amplitude, Phase oder Frequenz unterschieden und je nach diesen Unterschieden kam es zu Interferenzerscheinungen. Auch die Schwebung haben wir bei dieser Untersuchung kennengelernt. Brinnern wir uns an die Schwebung - dort ergab sich als Überlagerung eine periodische Funktion, die sich zeitlich änderte.

Nun wollen wir dazu übergehen, daß wir Wellen einander überlagern. Wir gehen dazu nach dem gleichen Schema vor und schauen uns an, was als Überlagerung herauskommt.

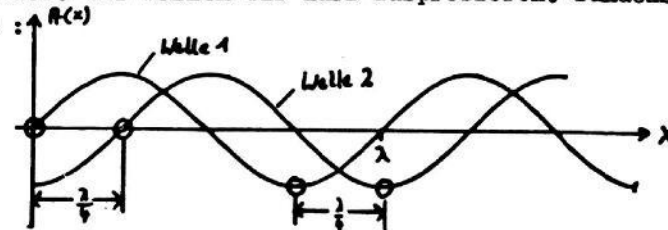
Wie wir wissen, sind die Wellen im Gegensatz zu den Schwingungen nicht nur zeit-, sondern auch ortsabhängig. Also werden auch

die überlagerten Wellen zeit- und ortsabhängig sein. Das wollen wir nun quantitativ untersuchen.

Wir werden uns die Sache allerdings etwas vereinfachen und setzen daher fest, daß bei beiden Wellen, die wir überlagern, die Amplituden jeweils gleich sein sollen. Was bei verschiedenen Amplituden geschieht, ist eigentlich ziemlich klar, und jeder kann es selbst - ganz analog wie bei den Schwingungen - ausrechnen. Im ersten Fall werden wir zwei Wellen gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Phase, im zweiten Fall, werden wir zwei Wellen verschiedener Frequenz untersuchen.

a) bei gleicher Frequenz

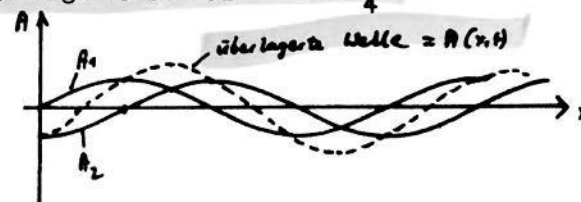
Es sollen zwei Wellen gleicher Frequenz durch ein Medium laufen. Außerdem sollen sie die gleiche Richtung haben. Sie überlagern sich, es kommt etwas neues heraus, man sagt: sie interferieren miteinander. Das wollen wir kurz ausprobieren. Zunächst nur zeichnerisch:



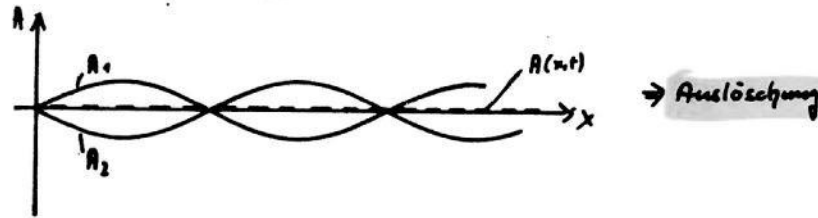
Beide Wellen haben in unserer Zeichnung eine feste Phasendifferenz. Daß die Phasendifferenz fest (d.h. konstant) ist, ist klar. Sie muß fest sein. Denn: Wir haben vorhin gleiche Frequenz vorausgesetzt. Am Anfang der Überlagerung besteht eine bestimmte Phasendifferenz. Da sich nun beide Wellen mit der gleichen Frequenz weiterbewegen, kann sich die Phasendifferenz, oder auch der Phasen- oder Gangunterschied nicht ändern, bleibt somit konstant.

Wir zeichnen einige Wellenpaare mit verschiedenen Phasendifferenzen und schauen uns die Ergebnisse an:

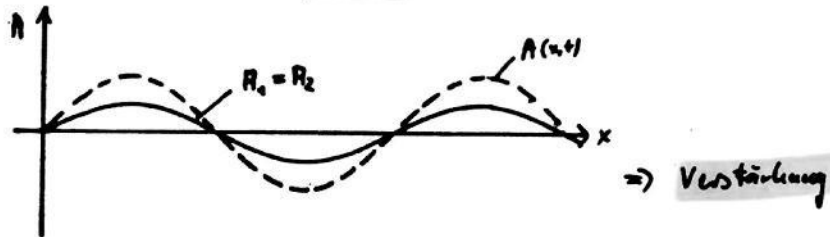
$$1. \text{ Gangunterschied} = \Delta \lambda = \frac{\lambda}{4}$$



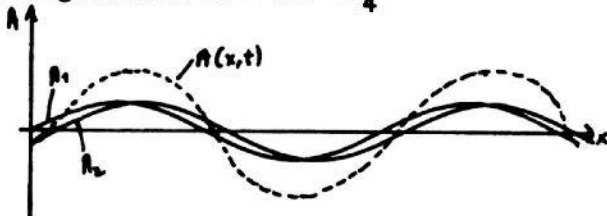
2. Gangunterschied = $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2}$



3. Gangunterschied = $\Delta\lambda = 0$



4. Gangunterschied = $\Delta\lambda < \frac{\lambda}{4}$



Ergebnis :

Ist der Gangunterschied = 0 oder = $n\lambda$, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$, so erhalten wir eine Verdopplung der Amplitude, also eine Verstärkung.

\Rightarrow Verstärkung bei $\Delta\lambda = n\lambda; n=0, 1, 2, \dots$

Ist der Gangunterschied = $\frac{\lambda}{2}$ oder $\frac{3\lambda}{2}, \dots$, so erhalten wir - falls die Amplitude beider Wellen gleich groß ist - totale Auslöschung der Wellen.

\Rightarrow Auslöschung bei $\Delta\lambda = \frac{(2n+1)\lambda}{2}$
 $n = 0, 1, 2, \dots$

Liegt der Gangunterschied dazwischen, erhalten wir eine Welle gleicher Frequenz, deren Maximalamplitude zwischen 0 und der doppelten Amplitude einer der ursprünglichen Wellen liegt.

Das jetzt noch schnell rechnerisch :

Wir haben die beiden Wellen

$$A_1(x,t) = A_0 \sin(\omega t - kx) \text{ und } A_2(x,t) = A_0 \sin(\omega t - kx - \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\lambda)$$

Diese beiden überlagern wir - aber halt! Wieso $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta\lambda$?

Wir wissen doch - in der Klammer hinter dem Sinus, d.h. im Argument der Winkelfunktion, stehen nur Bogenmaßgrößen - das ist für einen Gangunterschied von $\lambda \hat{=} 2\pi$, für $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2} \hat{=} \pi$ usw. Und das ist ausgedrückt durch

$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta\lambda$; denn setzt man hier das $\Delta\lambda$ ein, erhält man die Phasendifferenz im Bogenmaß.

Weiter -

Wir summieren - mit der im mathematischen Exkurs angegebenen Formel

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$A(x,t) = 2 A_0 \sin(\frac{2\omega t - 2kx - \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\lambda}{2}) \cos(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\lambda)$$

$$\text{oder } A(x,t) = 2 A_0 \sin(\omega t - kx - \frac{\pi}{\lambda} \Delta\lambda) \cdot \cos(\frac{\pi}{\lambda} \Delta\lambda)$$

Gut - was ist das aber ? Das ist eine Welle mit der gleichen Frequenz wie vorher (das Argument des Sinus hat sich nur durch eine Phasenkonstante verändert) und mit der Amplitude

$2 A_0 \cos(\frac{\pi}{\lambda} \Delta\lambda)$. Je nachdem, wie groß $\Delta\lambda$ ist, so ist auch die Amplitude :

1. $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow$ Amplitude = $2 A_0 \cos(\frac{\pi}{4})$

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{Amplitude} = A_0 \sqrt{2}$$

das war Fall 1.

2. $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$ Amplitude = $2 A_0 \cos(\frac{\pi}{2})$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\Rightarrow \text{Amplitude ist Null} \Rightarrow \text{Auslöschung!}$$

3. $\Delta\lambda = 0 \Rightarrow$ da $\cos 0 = 1 \Rightarrow$ Amplitude = $2 A_0$ also Verstärkung und

4. $\Delta\lambda < \frac{\lambda}{4} \Rightarrow$ Amplitude $> A_0 \sqrt{2}$

b) bei verschiedener Frequenz

Bei der Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenz werden wir wieder - ganz genau wie bei den Schwingungen - Schwebungen erhalten. Bei den Schwingungen haben wir schon gesehen, daß man bei Addition von periodischen Funktionen (deren Periodizität nicht allzu weit voneinander abweicht) eine periodische Funktion erhält, deren Amplitude auch periodisch ist. Es waren dies bei den Schwingungen die Schwebungen. Bei Wellen kommt nun noch die Ortsabhängigkeit dazu. Überlagern wir zwei Wellen miteinander, deren Wellenzahlen k sich nur wenig unterscheiden, so erhalten wir eine Schwebung (natürlich jetzt auf der x -, also der Ortsachse). Wir schauen uns das kurz an :

$$A_1(x, t) = A_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{und} \quad A_2(x, t) = A_0 \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$\text{Die Summe ist} \quad A(x, t) = 2 A_0 \sin\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2}\right)$$

Falls nun die Frequenzen ähnlich sind, d.h. $\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow$

$$\omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega_1 \quad \text{und} \quad \omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$$

Kann man nun sagen, ^{bei} $\omega_1 \approx \omega_2$ gilt $k_1 = k_2$? Natürlich nicht !

Denn beide sind ja über die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen miteinander verknüpft. Es gilt doch

$$\omega = 2\pi\nu \quad \text{also} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{und} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{also} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\text{und da} \quad c = \lambda \cdot \nu \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\omega}{k}$$

Deshalb muß - da für beide zu überlagernden Wellen c ja gleich sein muß - (Warum ?) - gelten :

$$\text{Für} \quad \omega_1 \approx \omega_2 \quad \Rightarrow \quad k_1 \approx k_2 \quad \text{denn} \quad \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

Somit gilt auch für k die gleiche Näherung:

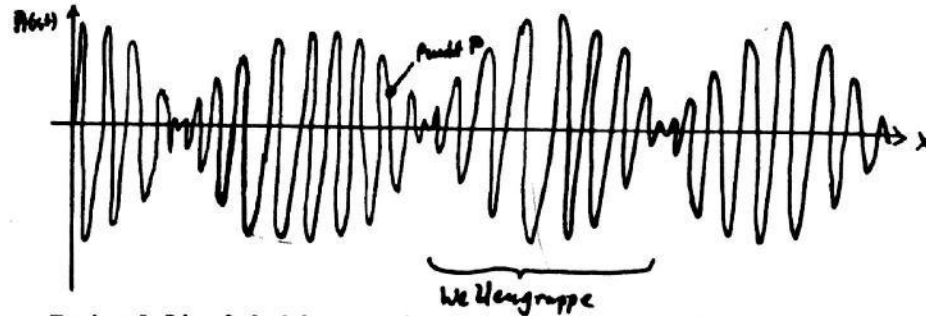
$$k_1 + k_2 \approx 2k_1 \quad \text{und} \quad k_1 - k_2 = \Delta k$$

setzen wir ein :

$$A(x, t) = 2A_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)$$

Und dies ist wiederum eine Überlagerung einer schnellen Sinus-

und einer langsamen Kosinusfunktion. Wir zeichnen diese Welle :



Es handelt sich hier - wie man unschwer sieht - um eine Schwebung genau wie bei den Schwingungen.

Nun sehen wir aber etwas neues. Diese Wellenüberlagerung bewegt sich ja nach rechts (Richtung x -Achse) fort. Es bewegt sich also der Punkt P schwingend nach rechts, aber auch die einzelnen neuentstandenen Wellengruppen bewegen sich nach rechts. Bewegen sie sich gleich schnell - mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c , oder bewegen sie sich verschieden schnell ? Das wollen wir nun im nächsten Abschnitt untersuchen.

2. Gruppen-, Phasengeschwindigkeit

Zunächst einmal sagen wir - die Wellengruppen bewegen sich mit der Geschwindigkeit v_{gr} und nennen diese Gruppengeschwindigkeit. Die Geschwindigkeit c nennen wir nun v_{ph} oder auch Phasengeschwindigkeit. Zunächst einmal wissen wir noch nicht, ob beide gleich oder verschieden sind. Also prüfen wir es.



Wir berechnen zuerst einmal die Gruppengeschwindigkeit indem wir sehen, wie sich eine Wellengruppe mit der Zeit verschiebt.



$$v_{gr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x(0)}{t - t(0)}$$

Das Gruppenmaximum ist dort, wo die Phasen beider ursprünglicher Wellen übereinstimmen (oder um ein ganzes

Vielfaches von λ unterschiedlich sind). Also gilt dort (am Gruppenmaximum)

$$\omega_1 t - k_1 x = \omega_2 t - k_2 x \quad \text{bzw.} \quad (\omega_2 - \omega_1)t = (k_2 - k_1)x$$

An dieser Stelle liegt das Gruppenmaximum vor.

Dieses benutzen wir nun um die Geschwindigkeit zu ermitteln.

Nehmen wir an, zur Zeit $t=0$ lag das Gruppenmaximum am Ort $x=0$. Dann ist klar, daß zu einer Zeit $t=t$ das Maximum am Ort x liegt

Hier sind nun x und t Variablen.

$$\begin{aligned} \text{Es ist also} \quad & \text{zur Zeit } t \quad (\omega_2 - \omega_1)t = (k_2 - k_1)x \\ & \text{zur Zeit } 0 \quad (\omega_2 - \omega_1)0 = (k_2 - k_1)0 \end{aligned}$$

⇒ In der Zeit t hat sich das Gruppenmaximum um die Strecke x weiterbewegt. Somit können wir nun die Gruppengeschwindigkeit ausrechnen:

$$v_{gr} = \frac{x}{t} = \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{(k_2 - k_1)t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

bzw. wenn man es exakt durchführt (wenn v_{gr} nicht konstant ist) gilt für die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

Was sagt uns das nun?

Es hängen doch ω und k irgendwie über die Geschwindigkeit eines Punktes P , also mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c , bzw. der Phasengeschwindigkeit v_{Ph} zusammen. Sehen wir uns diesen Zusammenhang deutlich an:

$$\omega = 2\pi\nu \quad \text{und} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(2\pi\nu)}{d(\frac{2\pi}{\lambda})} = \frac{2\pi d\nu}{2\pi d(\frac{1}{\lambda})}$$

Was ist nun $d(\frac{1}{\lambda})$?

So etwas nennt man ein totales Differential.

Wir können dieses ganz einfach errechnen. Wir machen daraus einfach eine Differentiation

$$\frac{d(\frac{1}{\lambda})}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = -\frac{1}{\lambda^2} \quad \text{also ist } d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\lambda^2} d\lambda \quad \text{Aha!}$$

Damit können wir nun die Gruppengeschwindigkeit bestimmen.

$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = -\lambda^2 \frac{d\nu}{d\lambda}$ Das bedeutet also, daß die Gruppengeschwindigkeit und damit die Ableitung $\frac{d\omega}{dk}$ von der Änderung der Frequenz mit der Wellenlänge abhängt.

Das müßte aber heißen, daß die Frequenz von der Wellenlänge irgendwie abhängt.

Wir kennen die Beziehung $c = \lambda \nu$

$$\Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{c}{\lambda} \right) = ? \quad \text{oder auch}$$

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = -\lambda^2 \frac{d(\frac{c}{\lambda})}{d\lambda} = -\lambda^2 \cdot c \frac{d(\frac{1}{\lambda})}{d\lambda} = -\lambda^2 \cdot c \cdot \frac{-\frac{1}{\lambda^2} d\lambda}{d\lambda} = c$$

⇒ $v_{gr} = v_{Ph}$ oder Gruppengeschwindigkeit = Phasengeschwindigkeit

Das heißt also $v_{gr} = v_{Ph} = c$, wenn gilt $c = \lambda \nu$

Wir haben also jetzt einmal die Beziehung

$$v_{gr} = -\lambda^2 \frac{d\nu}{d\lambda} \quad \text{und andererseits} \quad v_{gr} = v_{Ph} = c$$

Was ist nun richtig?

Einmal hing die Gruppengeschwindigkeit von $\frac{d\nu}{d\lambda}$ ab, andererseits war sie gleich der Phasengeschwindigkeit.

Im Experiment kann man sehen, daß die Gruppen- und die Phasengeschwindigkeit keineswegs immer gleich sein müssen.

Wir haben also bei unserer Berechnung ganz oben einen Fehler gemacht. Sehen wir noch einmal ganz genau nach:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = -\lambda^2 \frac{d(\frac{c}{\lambda})}{d\lambda} \quad \text{bis jetzt stimmt das noch.}$$

Dann haben wir die Konstante c vor die Differentiation gesetzt. - Halt !! Wer sagt uns denn, daß c eine Konstante ist? Wir haben stillschweigend angenommen, daß $c = \text{const.}$, d.h. daß die Phasengeschwindigkeit konstant ist. Das wissen wir aber ja noch garnicht. Wenden wir deshalb die Produktregel an:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{c}{\lambda}\right) &= \frac{1}{\lambda} dc + c d\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{also} \\ v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} &= -\lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda} \frac{dc}{d\lambda} + c d\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = -\lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda} \frac{dc}{d\lambda} - c \cdot \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{d\lambda} \right) \\ \frac{d\omega}{dk} &= -\lambda \frac{dc}{d\lambda} + c \quad \text{Oder auch} \quad v_{gr} - v_{Ph} = -\lambda \frac{dc}{d\lambda} \end{aligned}$$

Somit ist also die Gruppen- gleich der Phasengeschwindigkeit, wenn gilt $\frac{dc}{d\lambda} = 0$. D.h., wenn c unabhängig von der Wellenlänge ist. Wie wir noch sehen werden, hängt die Wellenlänge von dem Medium ab, das eine Welle durchdringt. Deshalb ist auch die Geschwindigkeit, mit der eine Welle durch ein Medium wandert, von diesem Medium abhängig.

Also noch einmal:

Hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = v_{Ph}$ von der Wellenlänge ab (d.h. existiert der Ausdruck $\frac{dc}{d\lambda}$), so unterscheiden sich Gruppen- und Phasengeschwindigkeit voneinander.

Die Abhängigkeit $\frac{dc}{d\lambda}$ nennt man Dispersion. Diese wollen wir uns kurz im nächsten Abschnitt ansehen.

durch Dispersion laufen die Wellenpakete auseinander, d.h. die werden breiter.

3. Dispersion

Wir haben gesehen, daß falls $\frac{dc}{d\lambda}$ existiert, also falls die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängt, Gruppen- und Phasengeschwindigkeit verschieden sind.

Dieses Phänomen heißt Dispersion. Dispersion liegt somit vor, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit abhängig von der Wellenlänge ist.

Wir können drei Fälle unterscheiden:

1) $\frac{dc}{d\lambda} = 0 \implies$ keine Dispersion $v_{gr} = v_{ph}$

$c = \lambda \cdot \nu$. Da nun $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ und $\nu = \frac{\omega}{2\pi} \implies c = \frac{\omega}{k}$

Es ist $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$ und $v_{ph} = c = \frac{\omega}{k}$

Die Abhängigkeit $\frac{dc}{d\lambda}$ können wir auch anders ausdrücken. Man nennt die Funktion $\omega = \omega(k)$, also die Abhängigkeit $\omega(k)$ Dispersionsrelation.

Wie sieht hier, in unserem 1. Fall die Dispersionsrelation aus? $\omega = c \cdot k$! Linearer Zusammenhang - $c = const.$

2) $\frac{dc}{d\lambda} > 0$. Diesen Fall nennt man "normale Dispersion".

Hier sieht man: Die Phasengeschwindigkeit nimmt mit steigender Wellenlänge λ zu.

3) Den Fall $\frac{dc}{d\lambda} < 0$ nennt man "anormale Dispersion".

Beispiel: (für die normale Dispersion)

Fällt weißes Licht durch ein Glasprisma, wird es in viele Farben zerlegt. Warum?

Weißes Licht ist eine Überlagerung (eine Summe) vieler verschiedener Wellen, die alle verschiedene Wellenlängen haben. (Verschiedene Farben $\hat{=}$ verschiedene Wellenlängen).

Fällt nun das weiße Licht vom Vakuum her (dort haben alle Wellen die gleiche Geschwindigkeit) in Glas, stellen sich dort verschiedene Geschwindigkeiten ein, da für Glas die Relation $\frac{dc}{d\lambda} \neq 0$ ist. Wie wir später noch sehen werden, werden verschieden schnelle Wellen im optischen Medium verschieden stark gebrochen. Also werden verschiedene Wellenlängen (mithin verschiedene Farben) verschieden stark gebrochen. So kommt die Zerlegung weißen Lichts zustande ≈ 110 .

4. Ebene Wellen

Bisher haben wir uns Wellen angesehen, ohne eigentlich uns genau vorstellen zu können, wie sie aussehen. Gut - wir wissen, wie eine Welle auf einer Saite aussieht, eine Wasserwelle oder auch eine Welle durch einen Stab.

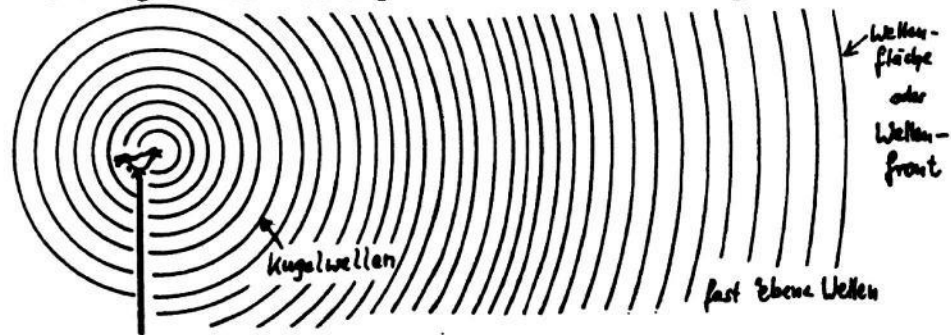
Wir gingen aus von Wasserwellen. Die breiteten sich kreisförmig um ein Erregungszentrum aus.

Nehmen wir ein anderes Medium, das dreidimensional ist. Zum Beispiel die Luft. Zwar kommen wir später noch genau auf die Schallwellen zu sprechen, aber betrachten wir schon einmal ihre Ausbreitung, da dies allgemeiner für alle Wellen gilt.

Wenn wir einen Knallfrosch explodieren lassen, so hört man das überall: auf einer Kugeloberfläche um unseren "Schallsender" hören wir das Ergebnis überall gleich gut.

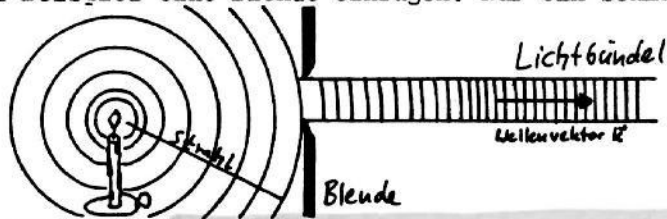
Machen wir es hübscher. Wir nehmen eine lange Stange, stellen sie senkrecht auf und setzen oben auf ihre Spitze eine Nachtigall drauf. Annahme: sie singt. Nehmen wir weiterhin an, es sei windstill, dann können wir beobachten, daß rundherum im gleichen Abstand die gleiche Schallintensität ankommt. Wir sagen: unsere Schallwelle breitet sich kugelförmig aus. Wir haben es also mit einer "Kugelwelle" zu tun.

Flächen, die in gleicher Phase schwingen, nennen wir Wellenflächen. Bei Kugelwellen sind das natürlich Kugeloberflächen. Weit weg von der Wellenquelle können wir die Kugelflächen



fast als plane Ebenen ansehen. Das nennen wir ebene Wellen.

Den Wellenausbreitungsvektor senkrecht zur Wellenfläche nennt man oft auch Strahl. Wir kennen das vom Lichtstrahl her : eine Lichtquelle strahlt rundherum (kugelförmig) Lichtenergie ab. In einiger Entfernung sind das nahezu ebene Wellen. Davon können wir nur ein kleines Stück durchlassen, indem wir zum Beispiel eine Blende einfügen. Nur ein schmaler Streifen



bleibt übrig. Natürlich ist das genaugenommen kein Strahl, da ein - mathematischer - Strahl unendlich dünn ist. Es handelt sich um ein Lichtbündel, das aber durch die Einführung des Ausbreitungsvektors (oft auch als Wellenvektor \vec{k} bezeichnet) dessen Richtung wie eben Wellenstrahl nannten, genau charakterisiert ist.

Noch ein Wort zur Interferenz. Wir sahen : zwei Wellen können miteinander interferieren. Das schauen wir uns nun bei einem räumlichen Interferenzversuch mit Schallwellen an. Zunächst erzeugen wir monochromatische Kugelwellen. Was ist das - monochromatisch ? Monochromatisch bedeutet : das, was unser Wellen"sender" verläßt, ist eine Welle einer bestimmten Wellenlänge - kein Wellenlängen"gemisch".

Wir erzeugen mit zwei Lautsprechern jeweils den gleichen Sinuston (also eine reine sinusförmige, mithin harmonische Welle). In bestimmten Raumbereichen hören wir den Ton gut, in anderen überhaupt nicht. Wo Wellenberg auf Wellenberg oder Wellental auf Wellental trifft, verstärken sich beide Signale, wo Wellental auf Wellenberg trifft, löschen sie einander aus. Dort hört man praktisch nichts mehr. Da die Schallwellenlänge mit etwa 0.3 bis 3m recht groß ist, sind die Stellen mit verstärkter oder abgeschwächter Intensität natürlich auch recht ausgedehnt. Das macht sich zum Beispiel bei einem schlechten Konzertsaal bemerkbar, wenn der Architekt von räumlicher akustischer Interferenz keine Ahnung hatte.

Ein Bild zu diesem Interferenzversuch ist (dort für den optischen Fall zweier Lichtquellen) im Kap. F. II. 1.c) ω , S. 201 zu sehen.

5. Doppler - Effekt

Jeder hat den Doppler - Effekt selbst schon beobachtet. Nehmen wir ein Beispiel :

Ein Krankenwagen fährt schnell an uns vorbei und seine Sirene ist eingeschaltet. Solange der Wagen auf uns zufährt, haben die Sirenentöne eine ganz bestimmte Höhe. In dem Moment, wo er an uns vorüberfährt, verschieben sich seine Heultöne zu niedrigeren Frequenzen hin. Fährt er von uns weg, so sind die Tonhöhen wieder konstant, aber tiefer als die, die wir hörten, als der Wagen noch auf uns zufuhr.

Ganz ähnliches kann man beobachten, wenn man auf einem Autobahnparkplatz Rast macht und andere Autos fahren dort mit hoher Geschwindigkeit vorbei. Ihr Motorengeräusch nimmt in der Tonhöhe in dem Moment ab, wo die Autos an uns vorbeifahren.

Nun wollen wir uns diesen Effekt näher ansehen und eine Erklärung versuchen.

Also - es hängt damit zusammen, was für Geschwindigkeiten ein Beobachter und eine Schallquelle gegeneinander haben. Wir sehen uns zwei Fälle an :

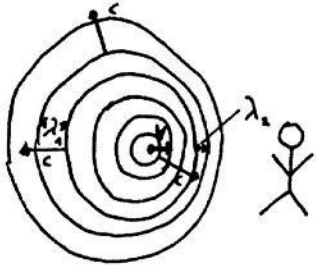
1. Schallquelle bewegt sich auf ruhenden Beobachter zu



2. Beobachter bewegt sich auf ruhende Schallquelle zu



1)



Wir können uns die Sache so klar machen :
Die bewegte Schallquelle sendet räumliche Kugelwellen (Schallwellen) aus. Auf der Seite auf die sich die Schallquelle zu bewegt, werden die Wellenberge und -täler zusammengedrückt, auf der gegenüberliegenden Seite werden sie auseinandergezogen. Ist die Quelle noch vom

Beobachter entfernt, so kommen Wellen an, deren Wellenlängen zusammengedrückt sind (ihre Frequenz ist also scheinbar größer, als bei der Aussendung) - der Ton ist höher. Bewegt sich die Quelle vom Beobachter weg, so sind die Wellenlängen größer. (d.h. die Frequenzen sind kleiner, also klingt der Ton dunkler).

Untersuchen wir dies quantitativ:

$$\lambda_2 = \frac{c - v}{\nu} \text{ zufahren (denn Wellenlänge = } \frac{\text{Ausbreitungsgeschw.}}{\text{Frequenz}})$$

$$\lambda_1 = \frac{c + v}{\nu} \text{ wegfahren}$$

Bewegt sich die Schallquelle auf den ruhenden Beobachter zu, so hört er die Frequenz $\nu_{B_1} = \frac{c}{\lambda_2}$ und die ist

$$\nu_{B_1} = \frac{c}{c - v} \nu = \frac{\nu}{1 - \frac{v}{c}}$$

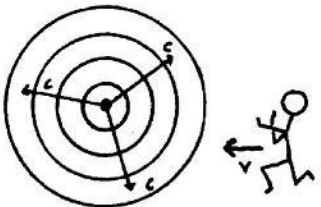
Wobei ν die Frequenz ist, die die Schallquelle ursprünglich aussendete.

Bewegt sich die Quelle vom Beobachter weg, so hört er

$$\nu_{B_2} = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{c + v} \nu = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}$$

Wir sehen nun : $\frac{v}{c} > 0 \Rightarrow \nu_{B_1} > \nu$ und $\nu_{B_2} < \nu$.

2) Hier bewegt sich der Beobachter auf die ruhende Schallquelle zu, bewegt sich an ihr vorbei und dann von ihr weg. Was geschieht nun hier mit den gehörten Frequenzen ?



$\lambda = \frac{c}{\nu}$ Den Beobachter trifft zunächst die Wellenfront mit der Geschwindigkeit $c + v$. Wenn er sich

dann von der Quelle wegbewegt, trifft ihn die Wellenfront mit der kleineren Geschwindigkeit $c - v$.

Wir sehen hier sofort, daß all dies nur dann gilt, wenn die Relativgeschwindigkeit zwischen Schallquelle und Beobachter (also v) kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist. Denn sonst ist beispielsweise $c - v$ kleiner als 0.

Den Bereich, den wir hier betrachten, nennen wir auch den Unterschallbereich. Dort sind die betrachteten Geschwindigkeiten kleiner als die Schallgeschwindigkeit. Zum Überschallbereich kommen wir im nächsten Kapitel.

Zurück zum bewegten Beobachter. Seine Relativgeschwindigkeiten gegenüber der ruhenden Schallquelle waren $c + v$ und $c - v$. Er hört also

$$\text{wenn er sich auf die Quelle zu bewegt } \nu_B = \frac{c + v}{\lambda} = \frac{c + v}{c} \nu$$

bzw. $\nu_{B_1} = (1 + \frac{v}{c}) \nu$. Bewegt er sich von der Quelle weg

$$\text{hört er } \nu_{B_2} = \frac{c - v}{\lambda} = \frac{c - v}{c} \nu = (1 - \frac{v}{c}) \nu$$

Zusammenfassend :

Beobachter bewegt sich zur Quelle hin	$\nu_b = (1 + \frac{v}{c}) \nu$
Beobachter bewegt sich von Quelle weg	$\nu_b = (1 - \frac{v}{c}) \nu$
Quelle bewegt sich zum Beobachter hin	$\nu_b = \frac{1}{(1 - \frac{v}{c})} \nu$
Quelle bewegt sich vom Beobachter weg	$\nu_b = \frac{1}{(1 + \frac{v}{c})} \nu$

ν_b sind die Frequenzen, die der Beobachter wahrnimmt, ν ist die Frequenz, die die Schallquelle aussendet, c ist die Schallgeschwindigkeit und v ist die Relativgeschwindigkeit zwischen Schallquelle und Beobachter.

Später werden wir noch sehen, daß es auch bei elektromagnetischen Wellen den Doppler - Effekt gibt. Bewegt sich beispielsweise ein Stern schnell von uns weg, so ist das Licht, das er aussendet nicht mehr gelb (wenn er z.B. gelbes Licht aussendet) sondern das Licht ist nach kleineren Frequenzen verschoben es erscheint dann rötlich. Deshalb spricht man oft von der "Rotverschiebung sich entfernender Himmelskörper".

6. Überschall

Ein Flugzeug beschleunigt seine Geschwindigkeit. Hat es die Schallgeschwindigkeit überschritten, so gibt es einen großen Knall - kennen wir alle! Woher kommt das?

Betrachten wir uns ein Flugzeug, das zunächst eine konstante Geschwindigkeit unter der Schallgeschwindigkeit c hat (Bild 1). Dann beschleunigt es und wird immer schneller:

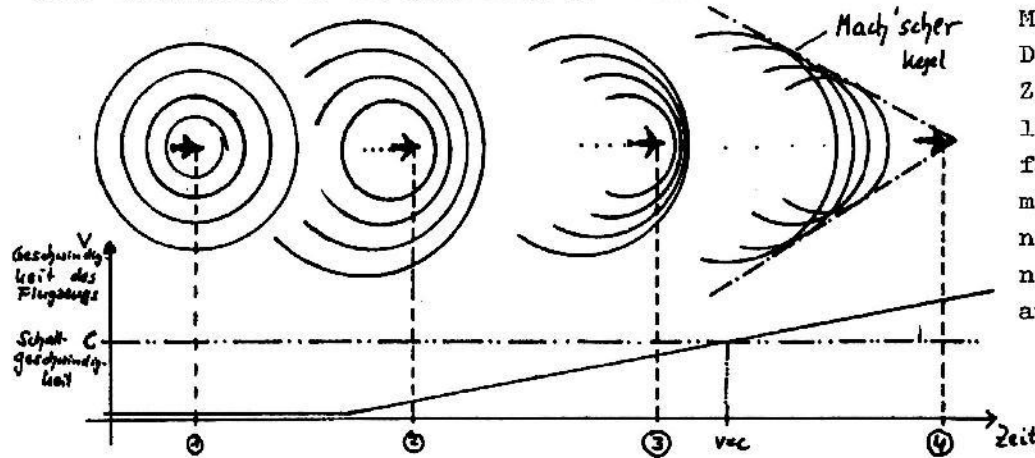


Bild 1: Die Geschwindigkeit v des Flugzeugs ist konstant, $v < c$. Die Schallwellen (des Motorengeräuschs) breiten sich gleichmäßig in alle Richtungen aus.

Bild 2: v hat sich stark vergrößert, ist aber immer noch kleiner als c . Es ergibt sich eine Verformung der Wellenausbreitung - genau wie beim Doppler-Effekt.

Bild 3: Nun ist $v = c$ - Was geschieht? Die Kreise (die bei uns Wellenberge darstellen sollen) berühren sich alle in einem Punkt. Dort addieren sich also die Wellenberge (das sind ja alles Amplituden) zu einer starken Druckzone, die man "Schallmauer" nennt.

Bild 4: Fliegt das Flugzeug noch schneller, also $v > c$, dann "überholt" es die Druckzone. Es überschneiden sich später entstandene Wellenberge mit früheren. Diese bilden den sog. Mach'schen Kegel. In diesem überkreuzen sich die Wellen und löschen sich größtenteils gegenseitig aus. Nur auf dem Kegelmantel gibt es eine

einheitliche Wellenfront sehr großer Amplitude. Dort ist die Luft sehr stark verdichtet. Es handelt sich hierbei um eine Druckzone, die irgendwann auch einmal die Erdoberfläche berührt. Steht dort ein Beobachter, so empfindet er die plötzliche Druckverdichtung als sehr lauten Knall.

Kommt ein Flugzeug mit Überschallgeschwindigkeit auf uns zu geflogen, hören wir erst gar nichts. Da das Flugzeug ja seinen eigenen Schall überholt hat. Ist es an uns vorbei, hören wir auch nicht viel, da sich die Wellen im Innern des Mach'schen Kegels fast alle gegeneinander aufgehoben haben. Die ganze Schallenergie liegt im Kegelmantel, und wenn diese Zone an unserem Ohr vorbeistreicht, dann hören wir dies als lauten Knall. Bildlich sehr hübsch, aber physikalisch sehr falsch nennt man das im Volksmund das "Durchbrechen der Schallmauer". Wie wir hier sehen, hat der Effekt des Überschallknalls nichts mit einem Mauerdurchbruch zu tun - deshalb braucht auch niemand davor Angst zu haben, daß ihm irgendwelche Mauerreste auf den Kopf fallen.

IV. SCHALLWELLEN

In den letzten zwei Kapiteln haben wir ja schon von Schallwellen gesprochen und zwei interessante Phänomene untersucht.

Jetzt wollen wir allgemein versuchen, die Schallwellen zu beschreiben.

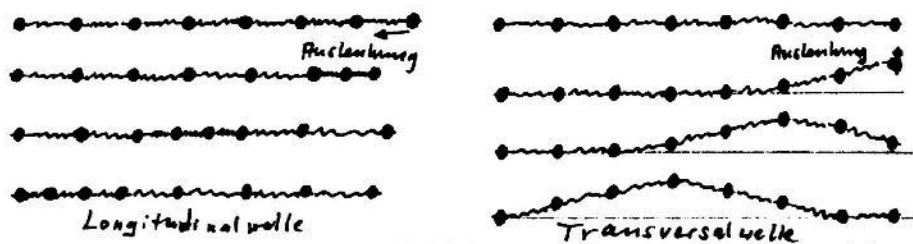
Zunächst einmal, was sind Schallwellen eigentlich?

Wir machen folgenden Versuch: Wir nehmen einen Plattenspieler, einen Verstärker (braucht keine HiFi-Anlage zu sein, nur sollte der Verstärker eine ziemlich hohe Ausgangsleistung haben) und einen Lautsprecher. Wir schließen alles an, legen eine Platte auf. Gut - was hören wir? Na ja, das was auf der Platte ist - logisch! Jetzt halten wir eine Hand vor den Lautsprecher. Was fühlen wir? Schall? Nein - unsere Hand kann nicht hören! Wir fühlen Vibrationen. Die Luft vibriert im Rhythmus der Musik. Die Membran des Lautsprechers erzeugt Druckschwankungen, die sich mit dem übertragenen Ton ändern.

Beispiel : Wir klatschen in die Hände. Physikalisch heißt das: In einem Hohlraum, den wir durch unsere Handform bilden, verdichten wir Luft. Diese entweicht sofort und gleicht sich mit dem Nachbarlufttraum aus. An Stelle der ursprünglichen Luftverdichtung ist jetzt eine Verdünnung getreten, rundherum gibt es eine Schicht verdichteter Luft, die sich nach außen weiter ausgleicht. Somit wandert die Störung kugelförmig nach außen. Trifft schließlich diese Luftverdichtung unser Trommelfell im Ohr, wird dieses etwas ausgelenkt (das Trommelfell ist eine hauchdünne, elastische Membran), diese Auslenkung überträgt sich über einige Knöchelchen auf spezielle Nervenenden, die das Signal ans Gehirn weiterleiten.

Allgemein können wir sagen :

Schallwellen sind die elastischen Wellen in deformierbaren Medien. Da alle Materie mehr oder weniger deformierbar ist, treten die Schallwellen überall auf. Schall überträgt sich als longitudinale Welle durch Gase (wie gesagt - fortschreitende Druckschwankungen) und als Transversal- und Longitudinalwelle durch Flüssigkeiten und Festkörper. Letztere kann man sich vorstellen als Menge vieler kleiner Massen, die über elastische Kräfte (Kohäsionskräfte bei Flüssigkeiten, bzw. intermolekulare Bindungskräfte bei Festkörpern) miteinander verbunden sind. Eindimensional kann man sich so etwas vorstellen wie eine Kette aus vielen Massen, die mit vielen Federn miteinander verbunden sind. Dort kann man sich die Transversal- und Longitudinalwellen schön veranschaulichen:

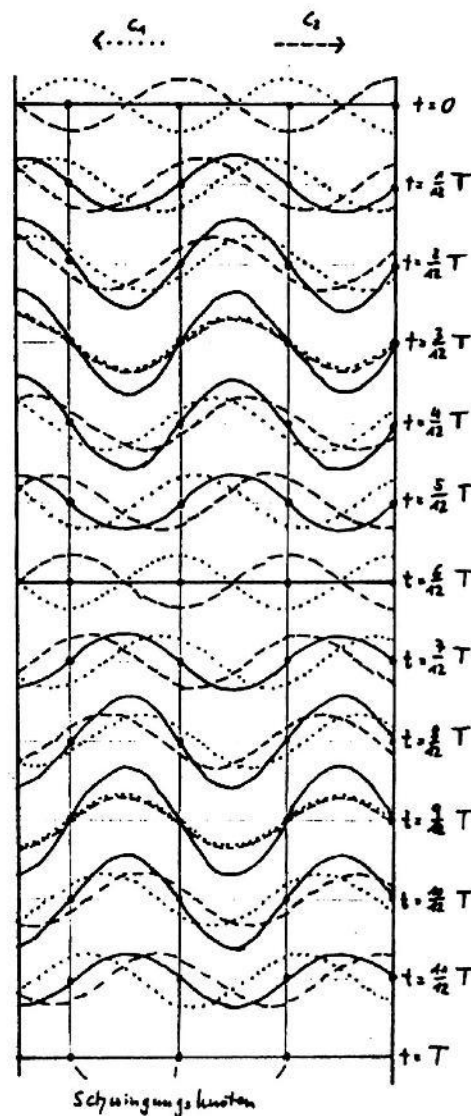


Um jetzt Schallquellen quantitativ zu erfassen, kann man stehende Schallwellen erzeugen, dazu müssen wir uns erst einmal vergegenwärtigen, was darunter zu verstehen ist. Bei den stehenden Wellen bleiben die Wellenknoten immer an der gleichen Stelle stehen. Die Bäuche verändern sich als Amplituden je nach Frequenz

1. Stehende Schallwellen

In diesem Kapitel wollen wir zunächst einmal genau sehen, was stehende Wellen sind und wie man sie erzeugt. Anschließend betrachten wir uns einige Methoden, mit denen man stehende Schallwellen nachweisen kann.

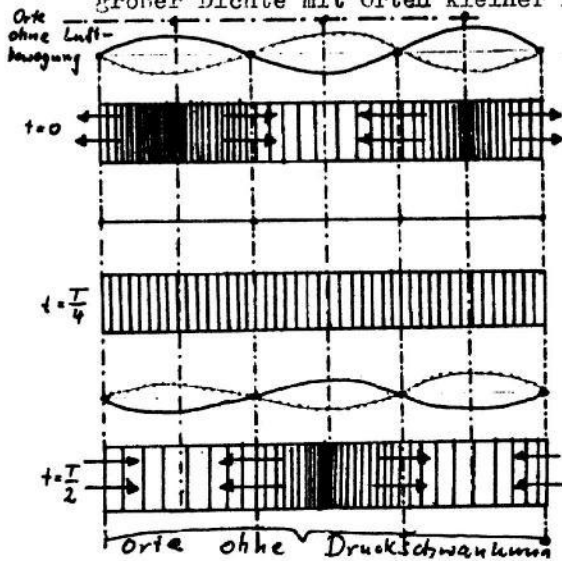
Wir lassen zwei gleiche Wellen (gleiche Frequenz, gleiche Amplitude) einander mit gleicher Geschwindigkeit entgegenlaufen, beide interferieren nun miteinander, das Ergebnis ist eine stehende Welle.



Links ist eine Serie von zwölf aufeinanderfolgenden Momentaufnahmen dargestellt. Die punktierte Welle läuft von rechts nach links, die gestrichelte von links nach rechts. Die durchgezogene Welle ist die Summe von beiden.

Manche Punkte bleiben während des ganzen Vorgangs in Ruhe. Diese Punkte nennt man Bewegungsknoten, genau dazwischen liegen die sogenannten Bewegungsbäuche. Benachbarte Bewegungsbäuche haben alle gleiche Phase. Sie erreichen gleichzeitig ihre Maxima und Minima. Auch der Ort, wo die Bäuche auftreten bleibt immer fest. Man sieht also - bei der stehenden Welle bleiben die Punkte gleicher Phase immer am gleichen Ort. Nur die Auslenkung jedes Punktes ändert sich mit der Zeit.

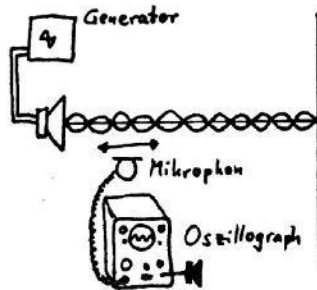
Die eben gezeigten Momentaufnahmen bezeichneten Transversalwellen. Wie sehen nun stehende Longitudinalwellen aus? Nehmen wir als Beispiel die Schallwellen. Es wechseln Orte großer Dichte mit Orten kleiner Dichte ab. Hier auch eine



Serie mit Momentaufnahmen von stehenden Longitudinalwellen. Es sind hier einfach Striche gezeichnet. Wo viele Striche zusammengedrängt sind, ist der Druck groß, dort, wo sie weit auseinanderstehen ist der Druck klein.

Nun wollen wir einige Nachweismethoden diskutieren, die uns erlauben, stehende Schallwellen zu orten und auszumessen.

1) Stehende Schallwellen vor einer reflektierenden Wand



Wir erzeugen einen sinusförmigen Ton und lassen diese Welle an einer Wand reflektieren. Er interferiert mit sich selbst, es entsteht (wenn der Abstand Lautsprecher - Wand richtig gewählt ist) eine stehende Welle. Mit einem Mikrophon und einem Verstärker können wir nun die Orte der

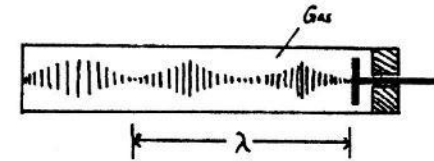
Schwingungsbäuche (Ton ist laut) und die Orte der Schwingungsknoten (Ton ist leise) finden. Damit können wir dann auch die Wellenlänge berechnen. Kennen wir nun noch die Frequenz (das wäre normal, denn wir erzeugen den Ton in einem Tongenerator auf elektrischem Wege und strahlen ihn mit einem Lautsprecher ab - d.h. auf Grund des Aufbaus unseres Generators ist und die abgestrahlte Frequenz bekannt) so können wir durch die Beziehung $c = \lambda \cdot \nu$ die Ausbreitung des Schalls in der Luft oder anderen benutzten Medien berechnen. Für die Luft ergibt

sich eine Ausbreitungsgeschwindigkeit, d.h. Schallgeschwindigkeit von

$c_{\text{Luft}} =$	331	$\frac{\text{m}}{\text{sec}}$	
$c_{\text{N}_2} =$	337	$\frac{\text{m}}{\text{sec}}$	(in Stickstoff)
$c_{\text{H}_2} =$	1280	$\frac{\text{m}}{\text{sec}}$	
$c_{\text{O}_2} =$	315	$\frac{\text{m}}{\text{sec}}$	

2) Kundt'sches Rohr

Ein in ein fest geschlossenes Glasrohr eingelassener Stab wird durch Reiben in Längsschwingungen versetzt. Von seinem Ende gehen Wellen aus, die - reflektiert - mit sich selbst interferieren und somit zu stehenden Wellen werden. Feines Korkmehl, das sich auch im Rohr befindet wird an den Orten der Schwingungsbäuche aufgewirbelt und zeigt so deren Orte an.

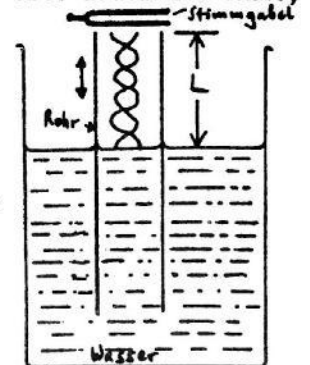


3) Quincke'sches Resonanzrohr

Betrachten wir uns noch einmal die Eigenschwingungen am festen und am losen Ende (vgl. dazu S. 99), dann können wir sehen:

am freien Ende befinden sich immer Schwingungsbäuche. Dort sind die Orte maximaler Amplitude. Hier gibt es große Druckschwankungen. Am festen Ende liegen immer Schwingungsknoten (keine Amplitude, Orte dauernder Ruhe, keine Druckschwankungen). Siehe Skizze links.

Im Quincke-Rohr erzeugt man mit einer Stimmgabel einen Ton. Dieser wird nun im Rohr in Resonanz gebracht. Das Rohr wird bewegt und bei $L = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}$ usw. ergibt sich hörbare Resonanz. Die Längenänderung zwischen zwei Resonanzmaxima ist dann $\Delta L = \frac{\lambda}{2}$.



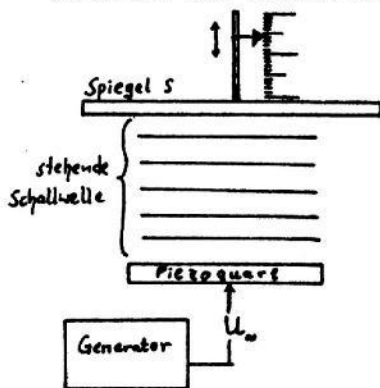
Somit kann man auch mit dem Quincke-Rohr Schallwellenlängen bestimmen.

2. Schallgeschwindigkeit

a) Messung

Im letzten Kapitel haben wir schon eine Art der Schallgeschwindigkeitsmessung kennengelernt. Diese Methode kann man nun noch verfeinern, um die Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Medien zu bestimmen.

Man erzeugt mit einem Piezoquarz Ultraschall. Ein Piezoquarz ist ein Quarz, bei dem ein angelegtes elektrisches Feld eine Verformung des Quarzes bewirkt. Gestaltet man das Feld nun so, daß sich der Quarz periodisch verformt, kann man erreichen, daß sich diese periodische Bewegung auf die umgebende Luft (oder sonstiges Medium) als Schallwelle überträgt. Solche Piezoquarze erreichen sehr hohe Frequenzen (100 kHz - 2 MHz) - Frequenzen, die wir mit unseren Ohren als Schallwellen überhaupt nicht mehr hören können. Deshalb bezeichnet man Schall mit solch hohen Frequenzen als Ultraschall.



Man erzeugt Ultraschallwellen, läßt diese am Spiegel S reflektieren und erhält immer da ein Maximum, wo $l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ (n ist ganze Zahl). Diese Stellen findet man, da dort der Piezoquarz mehr Energie verbraucht. (Resonanz). Dieser Mehrverbrauch elektrischer Energie läßt sich am Frequenzgenerator, der den Quarz versorgt, nachweisen. Daraus erhalten wir die Wellenlänge λ .

Durch die Konstruktion des Ultraschallgenerators wissen wir, wie groß die Frequenz ist. Aus diesen beiden Angaben können wir mit der Beziehung $c = \lambda \cdot \nu$ die Schallgeschwindigkeit berechnen.

b) Schallgeschwindigkeit im festen Körper

Kommen wir kurz zur Berechnung von Schallgeschwindigkeiten in verschiedenen Medien. Zunächst beim festen Körper. Wir gehen von der - bereits bestimmten - Wellengleichung aus.

Diese war ganz allgemein (vgl. dazu S. 404)

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2} \quad \text{für eine Welle, die sich eindimensional in } x \text{ - Richtung fortpflanzt.}$$

ξ war dabei die Störung. Was ist nun hier - beim Schall = Störung? Was ändert sich beim Schall in Ort und Zeit? Der Druck ändert sich, also ist der Druck p unsere Störung. Damit erhalten wir:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 p}{dx^2} \quad \text{Was suchen wir nun? Wir suchen } c.$$

Wir fanden schon einmal - für Longitudinalwellen im festen Körper gilt

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{vgl. S. 403})$$

Somit ist das Problem ja schon geklärt.

Für feste Körper also, ist die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

c) Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

Bei den Flüssigkeiten gehen wir zunächst von der gleichen Beziehung $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ aus, Wir suchen jetzt nur, wie groß dieses E für Flüssigkeiten ist. Was war E ? E war der Elastizitätsmodul. Wir gehen jetzt zurück, wie wir zum Elastizitätsmodul kamen und übertragen das dann auf Flüssigkeiten:

es galt (S. 68): Verlängern wir einen Stab der Länge l um die Strecke Δl , dann herrscht die Spannung σ .

Mit den Abkürzungen Dehnung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ergab sich

$$\epsilon \sim \sigma \quad \text{oder} \quad \epsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \sigma$$

In drei Dimensionen gilt dann $\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E} \sigma$. Genauer noch

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{E} \cdot d\sigma$$

Wie sieht nun bei einer Flüssigkeit die Volumenänderung aus? Steigern wir bei einer Flüssigkeit den Druck um $+\Delta p$, dann nimmt das Volumen um $-\Delta V$ ab. Es gilt nun $-\Delta p \sim \Delta V$. Außerdem ist die Volumenänderung abhängig vom ursprünglichen

Volumen, also $-\Delta V \sim V$.

Insgesamt: $-\Delta V \sim V \cdot \Delta p$ oder auch $-\Delta V = \frac{1}{K} \cdot \Delta p \cdot V$.

Dieses K nannten wir Kompressionsmodul - es war genau das Analoge zum Elastizitätsmodul beim Festkörper. Außerdem galt noch $K = \frac{1}{\alpha}$, wobei wir α Kompressibilität nannten.

Es ergibt sich also $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K} \cdot \Delta p$. Das ganze findet man auch auf der Seite 69.

Jetzt haben wir also für die Volumenänderung zwei Beziehungen. Die eine beschreibt die Volumenänderung am Festkörper, die zweite die Volumenänderung einer Flüssigkeit.

Da wir ja sehen wollten, was dem E des festen Körpers bei der Flüssigkeit entspricht, müssen wir einfach beide gleichsetzen:

$$\frac{\Delta V}{V} \hat{=} \frac{\Delta \sigma}{E} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K} \Delta p.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E} \Delta \sigma \hat{=} -\frac{1}{K} \Delta p.$$

Gut - erinnern wir uns. Was war σ ? Es war dies die Spannung. Genauer - bei der Herleitung der elastischen Gesetze auf den Seiten 67 ff. war das σ ein Zug, also ein umgekehrter Druck. Deshalb können wir sagen $\sigma = -p$ oder auch $\Delta \sigma = -\Delta p$.

Dies setzen wir ein:

$$-\frac{1}{E} \Delta p \hat{=} -\frac{1}{K} \Delta p \quad \Rightarrow \quad K \hat{=} E$$

Aha! Dem Elastizitätsmodul E entspricht bei der Flüssigkeit gerade der Kompressionsmodul K. Also können wir die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten direkt hinschreiben:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

In Tabellen findet man allerdings selten das Kompressionsmodul K, viel eher findet man den Kehrwert davon, wie wir wissen die Kompressibilität α . Also lautet nun unsere Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

$$c = \sqrt{\frac{1}{\alpha \cdot \rho}}$$

Dazu ein Beispiel: Aus Messungen findet man, daß die Schallgeschwindigkeit im Wasser ca. $1400 \frac{m}{sec}$ beträgt (sie ist somit etwa viermal so groß wie die der Luft). Nun können wir diese Geschwindigkeit exakt berechnen. In Tabellen finden wir die Konstanten: $\alpha = 5 \cdot 10^{-10} \frac{m^2}{N}$ und $\rho = 10^3 \frac{kg}{m^3}$.

$$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{5 \cdot 10^{-10} \cdot 10^3} \frac{N \cdot m^2}{kg} = 2 \cdot 10^6 \frac{kg \cdot m^2}{kg \cdot sec^2}.$$

also $c = 1414 \left[\frac{m}{sec} \right]$.

d) Schallgeschwindigkeit in Gasen

Wie sieht es nun beim Gas aus? Können wir die gleiche Beziehung wie bei der Schallgeschwindigkeit der Flüssigkeiten verwenden? Nein, das können wir nicht - und zwar aus folgendem Grund: Bei der Kompression eines Gases ändert sich die Temperatur.

Dadurch wird die ganze Sache etwas komplizierter. Wir müssen einige Dinge aus der Wärmelehre vorwegnehmen, die ich jetzt kurz angebe, die dann bei der Wärmelehre noch genauer behandelt werden.

Zunächst einmal brauchen wir das Boyle-Mariott'sche Gesetz. Hat man ein Gas (es soll das Volumen V einnehmen), so herrscht dort ein bestimmter Druck p. Das Produkt aus beiden ist konstant. Es gilt also $p \cdot V = const$. Dies aber nur unter einer ganz bestimmten Voraussetzung. Nur wenn die Temperatur konstant gehalten wird, ist das Produkt aus Druck und Volumen konstant. Das wäre das eine. Dann müssen wir noch etwas über die adiabatische Zustandsänderung wissen:

Wir können den Zustand eines Gases z.B. isotherm ändern - d.h. wir halten die Temperatur konstant. Dann können wir beispielsweise den Druck erhöhen. Was passiert - das Volumen verkleinert sich, exakt nach $pV = const$. Es gibt noch mehr Zustandsänderungen - z.B. die isobare. Bei der isobaren Zustandsänderung bleibt während der ganzen Änderung der Druck konstant. Dann gibt es noch - die brauchen wir jetzt - die adiabatische Zustandsänderung. Dabei bleibt die Wärmeenergie konstant. In jedem Körper steckt eine bestimmte Wärmeenergie, die sich u.a. durch die Temperatur äußert. Ändern wir einen Zustand, ohne daß an der Wärmeenergie etwas geändert wird, so handelt es sich dabei um eine adiabatische Zustandsänderung. Dabei gilt dann die sogenannte "Poisson - Beziehung"

$$p \cdot V^{\frac{c_p}{c_v}} = const. \quad c_p \text{ und } c_v \text{ sind die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck, bzw. konstantem}$$

Volumen. Was das im einzelnen ist, ist jetzt nicht unbedingt von Bedeutung. Darauf kommen wir bei der Wärmelehre noch ausführlich zu sprechen. Halten wir es hier so, daß wir sagen c_p und c_v sind irgendwelche stoffspezifischen Konstanten, die man in Tabellen für die bestimmten Stoffe (hier Gase) finden kann. Diese ganzen Größen der Wärmelehre werden später genau behandelt und beschrieben - jetzt sei nur der Vollständigkeit

halber mit diesen Größen gerechnet, damit wir die wichtige Beziehung für die Schallgeschwindigkeit in Gasen herleiten können.

Bei konstanter Temperatur ist $p \cdot V = \text{const.}$, sagen wir C .
 $p V = C$. Also $V = \frac{C}{p}$

Zunächst einmal der Berechnungsweg:

Bei den Flüssigkeiten galt $c = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}}$. Jetzt versuchen wir das κ bei den Flüssigkeiten durch etwas, was für Gase zutrifft, zu ersetzen. Dazu bedienen wir uns der Definitionsgleichung der Kompressibilität

$$\kappa = - \frac{\Delta V}{V} \cdot \frac{1}{\Delta p} \quad \text{oder} \quad \kappa = - \frac{dV}{V} \cdot \frac{1}{dp}$$

$V = \frac{C}{p}$, also ist $\frac{dV}{dp} = C \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) = C \left(-\frac{1}{p^2} \right) = -\frac{C}{p^2}$.

$$\frac{C}{p^2} = \frac{p \cdot V}{p^2} = \frac{V}{p} \quad \text{also gilt} \quad \frac{dV}{dp} = -\frac{V}{p} \quad \text{Gilt -}$$

daraus folgt dann für :

$$\kappa = - \frac{dV}{dp} \cdot \frac{1}{V} = - \left(-\frac{V}{p} \right) \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{p} \quad \text{so} \quad -\kappa = \frac{1}{p}$$

Können wir das nun in die Beziehung für die Flüssigkeiten einfach einsetzen? Nein - aber warum nicht?

Das Boyle - Mariotte'sche Gesetz gilt nur bei konstanter Temperatur - stellen wir uns ein Gas vor, indem sich eine Schallwelle fortpflanzt: Es ergeben sich dauernd Druckänderungen. Die Temperatur ändert sich an jedem Ort laufend - und das müssen wir noch in unsere Berechnung miteinbeziehen:

Betrachten wir uns eine ganz bestimmte Stelle - dort ergibt sich dauernd großer Druck - kleiner Druck oder Kompression - Expansion. Nun weiß man daß

Kompression $\hat{=}$ Erwärmung und Expansion $\hat{=}$ Abkühlung!

Allerdings liegen die Orte, wo sich das Gas gleichzeitig erwärmt und abkühlt um $\frac{\lambda}{2}$ auseinander (bei Schallwellen ist das ca. 20cm). Da die Welle relativ schnell schwingt, findet zwischen den Stellen der Erwärmung und der Abkühlung kein Austausch von Wärmeenergie statt, bzw. es ergibt sich kein Temperaturengleich. Die Zustandsänderung (hier eine Druckänderung) ist somit adiabatisch (erfolgt also bei konstant gehaltener Wärmeenergie). Dort gilt eine besondere Beziehung zwischen Druck und Volumen:

$p V^{\frac{C_p}{C_v}} = \text{const.}$, sagen wir $= A_1$. Dann gilt auch

$$\frac{C_p}{C_v} \frac{C_p C_v}{V^{\frac{C_p}{C_v}}} = \left(A_1 \right)^{\frac{C_p}{C_v}} = A_2 \quad \text{.} = p^{\frac{C_p}{C_v}} V = A_2 \quad \Rightarrow \quad p^{\frac{C_p}{C_v}} = \frac{1}{V} A_2$$

$$\text{oder auch} \quad V = A_2 \cdot p^{-\frac{C_p}{C_v}}$$

Jetzt machen wir es genau wie eben - wir leiten das Volumen nach dem Druck ab und setzen dies in die Definitionsgleichung für κ ein. Dann erhalten wir für κ eine Größe, die wir dann getrost in die Gleichung für die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten einsetzen können:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{d}{dp} \left(A_2 \cdot p^{-\frac{C_p}{C_v}} \right) = A_2 \left(-\frac{C_p}{C_v} \right) \cdot p^{-\frac{C_p}{C_v} - 1} = A_2 \cdot p^{-\frac{C_p}{C_v}} \cdot \frac{1}{p} \left(-\frac{C_p}{C_v} \right)$$

$$= -\frac{V}{p} \left(+\frac{C_p}{C_v} \right) \quad \text{also} \quad \frac{dV}{dp} = -\frac{V}{p} \left(\frac{C_p}{C_v} \right)$$

somit gilt für :

$$\kappa = - \frac{dV}{dp} \cdot \frac{1}{V} = + \frac{V}{p} \left(\frac{C_p}{C_v} \right) \cdot \frac{1}{V} = \frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{1}{p} \quad \text{und dies können wir nun}$$

in unsere alte Gleichung für die Flüssigkeiten einsetzen:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}} = \sqrt{\frac{C_p p}{C_v \rho}} \quad \text{also gilt für die Schallgeschwindigkeit in Gasen}$$

$$\boxed{c_{\text{gas}} = \sqrt{\frac{C_p p}{C_v \rho}}} \quad \text{Dazu ein Beispiel:}$$

Luft: C_p/C_v für Luft ist 1,4

ρ für Luft ist $1,2928 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Bei Normaldruck für Luft (760 Torr = 101300 Pa = $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$)

$$\Rightarrow c = \sqrt{1,4 \cdot \frac{101300}{1,2928} \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{sec}^2 \cdot \text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right)} = \sqrt{109699 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}}$$

$$\text{also} \quad c_{\text{Luft}} = 331,2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Man sieht also, daß die Schallgeschwindigkeit in Gasen von deren Druck abhängig ist.

Sind die Schallamplituden (Temperaturschwankungen) klein und ist die mittlere Temperatur konstant, so gilt

$$p \sim \rho \quad \text{oder} \quad \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \cdot \text{const.}}$$

Somit ist die Schallgeschwindigkeit bei diesen Bedingungen vom Druck unabhängig!

3. Akustische Begriffe

Jetzt noch zu einigen Begriffen, die man häufig in der Akustik gebraucht. Akustik ist die Lehre vom Schall. Von Schallwellen und deren Ausbreitung haben wir ja schon gesprochen, nicht aber davon, wie man die Schallaufnahme, also das Hören beschreibt.

Was hören wir?

Zunächst eine Unterscheidung:

Ton - Klang - Geräusch

Ein **Ton** ist eine reine Sinus - Schallwelle.

Eine solche Schwingung kann nur elektronisch erzeugt werden. Zum Beispiel in einer elektronischen Orgel, oder in einem Tonfrequenzgenerator.

Ein **Klang** ist eine Summe von Tönen.

Der Klang baut sich zunächst auf einer Grundfrequenz auf. Dies ist diejenige, die wir als Tonhöhe des Klangs bezeichnen.

Dann gibt es noch einige Oberschwingungen, deren Frequenzen mit der Grundfrequenz im Verhältnis ganzer Zahlen stehen.

Diese Oberschwingungen nimmt unser Ohr nicht mehr als eigene Schallwellen wahr, sondern als Klangfarbe.

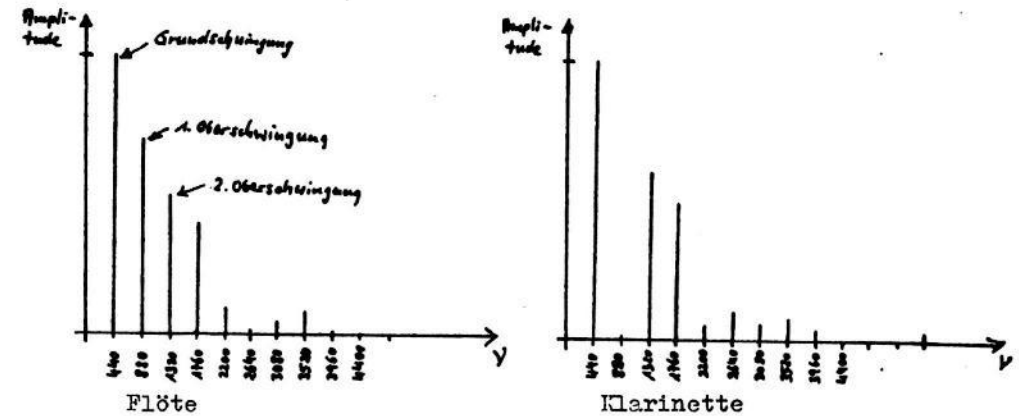
Dazu ein Beispiel:

Es spielt eine Flöte den Kammerton a. Das können wir hören. Wenn nun eine Klarinette den gleichen Ton a spielt, hören wir diesen auch, als gleicher Ton - wir erkennen aber trotzdem, ob es sich um eine Flöte oder um eine Klarinette handelt. Und das ist das Verdienst der Oberschwingungen. Je nachdem welche Oberschwingungen auftreten (was sie also für Frequenzen haben) und wie stark sie sind (was sie also für Amplituden haben) unterscheiden wir verschiedene Klangfarben. Ein Instrument kann blechern klingen, wie eine Trompete, oder es klingt sehr hell, wie eine Flöte usw.

Das Beispiel mit Flöte und Klarinette wollen wir auf der nächsten Seite einmal als sogenanntes Klangspektrum aufzeichnen. Es handelt sich dabei um ein Diagramm, wo auf einer Achse die Frequenzen, auf der anderen Achse die Amplituden der einzelnen Oberschwingungen aufgetragen sind.

In dieser Art hat jedes Musikinstrument, einschließlich der menschlichen Stimme, jedes Gerät, welches irgendwelche Klänge

erzeugen kann, ein solches Frequenzspektrum. Als Beispiele seien hier das Spektrum der Flöte und der Klarinette aufgetragen, die beide den Kammerton a (Frequenz = 440 Hz) spielen.



Also noch einmal -

unser Ohr unterscheidet an einem Klang:

- Tonhöhe ($\hat{=}$ Frequenz der Grundschwingung)
- Klangfarbe ($\hat{=}$ Summe der relativen Amplituden der Oberschwingungen)
- Lautstärke.

Die Lautstärke ist eine rein subjektive Größe. Erzählt man zum Beispiel in einer lauten Diskothek jemandem etwas, so ist das leise. Plaudert man aber mit seinem Nachbarn in einer sehr langweiligen Vorlesung, kann das unter Umständen sehr laut sein und auch den Professor aus seiner Ruhe bringen - und das obwohl der Sprechende in beiden Fällen die gleiche "Sprechenergie" aufwendet.

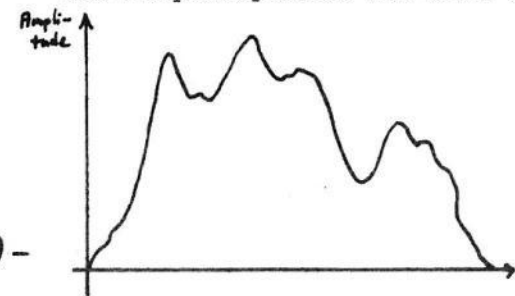
Bevor wir uns aber fragen, wie man die Lautstärke sinnvoll physikalisch auffasst, noch ganz kurz zur Erklärung des Geräuschs.

Ein **Geräusch** ist ein Sammelsurium unperiodischer Schwingungen.

Das Frequenzspektrum ist nicht in diskrete Schwingungen auf-

geteilt, sondern es verläuft kontinuierlich.

Die Teilschwingungen also, sind kontinuierlich über die ganze Frequenzskala verteilt.



Zurück zur physikalischen Interpretation des Begriffs "Lautstärke".

Um 1 kHz herum ist unser Ohr am empfindlichsten. Ein Ton, den unser Ohr gerade noch hört (seine Frequenz soll 1 kHz haben) verhält sich zu einem, der das Ohr schmerzt, wie
 $1 : 10^{13} = \text{Hörschwelle} : \text{Schmerzschwelle}$

Das allerdings sind beides Größen, die nicht so genau definiert sind. Was kann man nun messen?

Man kann zum Beispiel die Schallintensität messen.

Schallintensität = Schallenergie, die pro Sekunde durch eine Fläche von 1 cm² senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung hindurchtritt.

$$I = \frac{1}{2\sqrt{E \cdot s}} \cdot p_0^2$$

wobei p_0 = Druckamplitude des Schalls
 E = Elastizitätsmodul des Mediums
 s = Dichte

Die Einheit der Intensität ist $I = \left[\frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2} \right]$

Den Ausdruck $\sqrt{E \cdot s}$ nennt man "Schallhärte".

I_0 = Intensität, die man gerade noch hören kann (Hörschwelle)
 $I_0 \approx 10^{-16} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$ bei einer Tonfrequenz von 1 kHz.

Eine grobe Approximation zwischen Lautstärke und Intensität gibt die Weber - Fechner'sche Beziehung wieder:

$$L^* = \text{const.} \cdot \log I$$

L^* = subjektive Lautstärke
 I = Intensität

Man hat definiert:

$$L^* = 10 \cdot \log \frac{I_\nu}{I_0}$$

I_ν = Intensität einer Frequenz ν
 I_0 = Schwellenwert
 L^* = Lautstärke in Phon

z. B. ein Klang hat $L^* = 20$ Phon

$$\Rightarrow 20 = 10 \cdot \log \frac{I_\nu}{I_0} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \log \frac{I_\nu}{I_0} = 1$$

$$\Rightarrow I_\nu = 100 I_0 !$$

Also: bei 20 Phon ist I_ν 100 mal so groß wie die Hörschwelle.

Oft vergleicht man auch 2 Schalleistungen I_1 und I_2 miteinander (d.h. zwei Intensitäten I_1 und I_2).

$$\text{Dann gilt für dieses Verhältnis} \quad x = 10 \log \frac{I_1}{I_2}$$

Dieses Verhältnis x wird in Dezibel (dB) abgegeben.

Was ist nun genau genommen der Unterschied zwischen einer Angabe in Phon oder in Dezibel?

Die Umrechnung erhält man einfach, indem man in der Beziehung für x für das zweite Schallereignis I_2 gerade gleich die Hörschwelle einsetzt:

$$I_2 = I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Noch einmal zum Phon - hier eine Skala über verschiedene Schallereignisse und ihre Lautstärke in Phon:

		(I_ν/I_0)
Hörschwelle	0 Phon	1
Flüstern	10	10^1
Umgangssprache	50	10^5
Motorrad	90	10^9
gr. Orchester (5m vom Dirigenten)	100	10^{10}
Kesselschmiede	130	10^{13}
Luftschuttsirene	135	$10^{13,5}$

Diese Phonskala ist eine rein subjektive Empfindung. Deshalb kann man die Zahlen nicht genau angeben, bzw. messen, da das I_0 (die Hörschwelle) für verschiedene Menschen nicht immer die gleiche ist.

Deshalb verwendet man für Lärmmessungen eine Dezibel - Skala, die auf einen bestimmten Bezugswert geeicht ist - wie schon oben bemerkt $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

$$\Rightarrow x = 10 \lg \frac{I}{10^{-12}} \text{ (dB)} \quad I \text{ wird in } \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \text{ angegeben.}$$

Beispiele

Ereignis	in Watt/m ²	Dezibel (dB)
Unterhaltungssprache	$7 \cdot 10^{-6}$	68
menschliche Stimme	bis $2 \cdot 10^{-3}$	93
Geige (ff)	$1 \cdot 10^{-3}$	90
Flügel (ff)	$2 \cdot 10^{-1}$	113
Trompete (ff)	$3 \cdot 10^{-1}$	115
Orgel (ff)	bis 10	130
Orchester (18 Instr.)	2,5	124
Autohupe	5	127
Großlautsprecher	bis 100	140
Alarmsirene	bis 3000	155

D. ELEKTRIZITÄT

I. ELEKTRISCHES FELD

1. Ladungen

Lange Zeit konnte man nur die Wirkungen von geriebenen Materialien als elektrische Erscheinungen. Man erkannte, daß sich ein geriebener Glas- und ein geriebener Siegellackstab gegenseitig anzogen, zwei geriebene Glasstäbe sich hingegen abstießen. Was waren das nun für Kräfte, die auftraten, wenn man Stäbe bestimmten Materials rieb ?

Was geschieht dort in den Stäben, wenn sie gerieben werden ?

Heute wissen wir, daß es zwei verschiedene Arten von Ladungen gibt. Man kann einer kleinen Kugel eine bestimmte Ladung geben, einer anderen Kugel eine andere Ladung und man stellt fest, daß sich beide Kugeln anziehen, daß es also eine Kraftwirkung gibt. Zunächst zur Beschreibung. Wir unterscheiden zwischen positiver und negativer Ladung. Diese Ladungen können verschieden groß, d.h. verschieden stark sein. Man gibt ihre Stärke in der Ladungseinheit Coulomb an (C). Was ist nun ein Coulomb ?

2. Kräfte zwischen Ladungen

Um genau die Einheit der Ladung zu definieren, müssen wir uns zunächst einmal die Kraftwirkung ansehen, die zwischen Ladungen herrscht.

Wir laden zwei Kugeln elektrisch auf. Sagen wir, die eine mit der Ladung Q_1 , die andere mit der Ladung Q_2 . Ob es sich nun um positive, negative oder verschieden geartete Ladungen handelt, ist egal. Wir bringen nun beide Kugeln in eine gewisse Entfernung voneinander, sagen wir r . Jetzt messen wir die Kraft zwischen beiden. Wir sehen - wenn Q_1 und Q_2 gleiches Vorzeichen, dann ist die Kraft eine abstoßende, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben, handelt es sich um eine anziehende Kraft.

Wovon hängt nun diese Kraft ab ? Im Experiment erkennt man, daß die Kraft einmal abhängt von den beiden Ladungen. Es ergibt

sich, daß die Kraft linear von den Ladungen abhängt, besser : Behält man Q_1 bei und verdoppelt die Ladung Q_2 , so verdoppelt sich auch die Kraft F . Das gleiche gilt natürlich auch für Q_1 . Das bedeutet aber -

$$F \sim Q_1 \quad \text{und} \quad F \sim Q_2$$

Die Kraft F hängt also direkt von den Ladungen ab. Wir sehen - haben beide Ladungen gleiches Vorzeichen, so ist das Vorzeichen der Kraft F positiv. Eine solche positive Kraft sehen wir als eine abstoßende Kraft an. Ist F negativ, wissen wir, es handelt sich um eine anziehende Kraft (die Ladungen haben verschiedene Vorzeichen). Merken wir uns deshalb :

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab,
ungleichnamige ziehen sich an.

Weiter - wovon hängt die Kraft noch ab ?

Sie hängt noch vom Abstände ab. Bisher hielten wir diesen Abstand r fest. Wir veränderten nur die Ladungen - jetzt behalten wir die Ladungen fest und verändern den Abstand. Was stellen wir fest ?

Wir entfernen die beiden Ladungen voneinander und messen jeweils Kraft F und Abstand r : Immer, wenn wir den Abstand r verdoppeln, haben wir nur noch ein Viertel der ursprünglichen Kraft F vorliegen. Was heißt das ? Das heißt einfach, daß F proportional zu $1/r^2$ ist ! Also

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

Nun können wir noch weiter suchen - wir finden keine weiteren Abhängigkeiten. Wir können also sagen,

$$F \sim Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r^2} \quad . \text{ Führen wir noch einen Proportionalitätsfaktor ein :}$$

$$F = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad . \text{ Oha !}$$

So etwas kennen wir doch ! - Sieht das nicht genau aus, wie das Gravitationsgesetz ?

Schauen wir einmal nach - für das Gravitationsgesetz fanden wir :

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \quad \text{Beide Gesetze sind analog.}$$

Es handelt sich einmal um die Kraft, die zwischen zwei Massen herrscht - und zum andern handelt es sich um die Kraft, die zwei Ladungen aufeinander ausüben. Beide Kraftgesetze hängen

vom Abstand zwischen beiden Massen, bzw. beiden Ladungen umgekehrt quadratisch ab.

Auf der Seite 33 haben wir schon einmal beide Kraftgesetze einander gegenübergestellt.

Dort hatten wir das Coulomb'sche Gesetz (so nennt man das Gesetz, das die Kraftwirkung zwischen zwei Ladungen beschreibt), folgendermaßen geschrieben:

$$\vec{F} = f^* \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}^0$$

Denn, ob man große oder kleine Q's verwendet, soll und egal sein und vektoriell muß das Gesetz so aussehen, da die Kraft auf der Verbindungslinie zwischen beiden Ladungen wirkt, und die Richtung dieser Verbindungslinie ist gerade der Einheitsvektor \vec{r}_{12}^0 .

Weiterhin sagten wir, daß eine Ladung q um sich das Feld \vec{E} aufbaut (analog dazu baut eine Masse m um sich das Feld \vec{g} auf). Der Zusammenhang hatten wir damals als $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ (analog $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$) angegeben. Dann sprachen wir noch über die Reichweiten, und wir sagten: beide Felder Gravitations- und elektrisches Feld haben eine unendlich große Reichweite. Allerdings sind die Kräfte in weiten Abständen schon so klein, daß sie kaum noch ins Gewicht fallen. Das waren die Analogien zwischen beiden Kraftgesetzen. Wie es sich nun mit einem elektrischen Feld verhält, werden wir bald noch sehen.

Allerdings hatten wir auch zur Vorsicht gemahnt!

Die Analogie ist nämlich nur eine äußere! Die Kräfte (Gravitationskraft und elektrische Kraft) sind sehr unterschiedlich. Im Gegensatz zur elektrischen Kraft, kann man die Gravitation nicht abschirmen und gibt es bei der Gravitation nur anziehende Kräfte!

Zurück zum Coulomb'schen Gesetz

$$\vec{F} = f^* \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}^0$$

Kommen wir jetzt zu unserem ursprünglichen Problem zurück:

Welche Einheit geben wir der Ladung?

Und außerdem kennen wir die Größe von f^* noch nicht - was tun?

Wir haben zwei Möglichkeiten:

Wir setzen f^* gleich 1 und erhalten dann als Dimension der Ladung - [Kraft · Länge]. Früher hatte man das so gemacht und die Einheit der Ladung wie folgt eingeführt:

1 elektrostatische cgs-Ladungseinheit = 1 ESL = 1 $\sqrt{\text{dyn} \cdot \text{cm}}$

Eine Ladung 1 ESL übt auf eine gleiche Ladung im Abstand von 1 cm die Kraft 1 dyn aus. (1 dyn = 10^{-5} N).

Diese Ladungseinheit wollen wir aber nicht verwenden. Wir verwenden die im SI gebräuchliche Ladungseinheit.

1 Coulomb = 1 C = $3 \cdot 10^9$ ESL. Woher kommt der Faktor $3 \cdot 10^9$?

Dieser Faktor hat etwas mit der Lichtgeschwindigkeit zu tun - warum das - darauf kommen wir bei der Besprechung des Magnetismus noch genauer zurück. Wir verwenden - wie gesagt - das SI System und danach hat auch f^* eine von 1 verschiedene Größe. Probieren wir es:

Vorhin hatten wir

$$\text{dyn} = 1 \frac{\text{ESL} \cdot \text{ESL}}{\text{cm}^2} \quad \text{jetzt} \quad \text{N} = ? \frac{\text{C} \cdot \text{C}}{\text{m}^2}$$

Wie groß und welche Einheit hat nun f^* ?

$$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}; \quad 1 \text{ C} = 3 \cdot 10^9 \text{ ESL}; \quad 1 \text{ m}^2 = 1 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ ESL} = 3,33 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

$$10^{-5} \text{ N} = f^* \frac{3,33 \cdot 3,33 \cdot 10^{-20} \cdot \text{C} \cdot \text{C}}{10^{-4} \text{ m}^2} \implies f^* = \frac{10^{-5} \cdot 10^{-4} \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2}{1,111 \cdot 10^{-19} \text{ C}^2}$$

$$\text{also} \quad f^* = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

Aus Gründen, die wir später erläutern, schreibt man statt

$$f^* = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{vgl. dazu Kapazität des Kugelkondensators, I.6.})$$

ϵ_0 nennt man die Influenzkonstante. Sie hat den Wert

$\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$. Dann sieht das Coulomb'sche Gesetz folgendermaßen aus:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{12}^0$$

Wir werden später sehen, daß alle Ladung, die irgendwo auftritt ein ganzzahliges Vielfaches einer bestimmten Grundladungseinheit ist. Das heißt, daß Ladung nur in ganz bestimmten Proportionen vorkommen kann. Die Elementarladung beträgt

$$e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Es ist dies gerade die Ladung, die ein Elektron und die ein Proton hat. Ein Elektron hat die Ladung $-e_0$, ein Proton die Ladung $+e_0$.

Im Normalfall kommen im Atom Elektronen und Protonen in gleicher Anzahl vor. Das heißt, ihre Ladungen heben sich nach außen auf, sie erscheinen nach außen hin elektrisch neutral.

Nach dem Coulomb'schen Gesetz müßten sich nun Elektronen und Protonen im Atom gegenseitig anziehen und aufeinanderprallen. Das erste gilt zwar, sie ziehen sich an, aber im Atom wirken noch andere Kräfte - wie wir später sehen werden - und aufgrunddessen fallen beide nicht aufeinander.

Im Kapitel I. 8.d) werden wir den Millikan - Versuch besprechen, der es erstmals gestattete, die Elementarladung nachzuweisen.

Noch etwas zur Aufladung - vorher sprachen wir davon, eine Kugel positiv, eine andere meinetwegen negativ aufzuladen. Was ist jetzt damit gemeint - jetzt können wir uns das vorstellen. Gerade in Metallen ist es so, daß viele Metallatome untereinander so gebunden sind, daß jedem eine bestimmte Anzahl Elektronen fehlt, während diese Elektronen ^{sich} zwischen den Atomrümpfen bewegen. Alle Elektronen gehören zu allen Atomrümpfen, aber man weiß nicht mehr, welches Elektron ursprünglich zu welchem Atom gehörte. Durch diesen Elektronenaustausch sind die Metallatome untereinander gebunden. Nimmt man jetzt ein Stück Metall zur Hand, welches elektrisch neutral ist (nach außen hin) und stiehlt ihm durch einen Trick Elektronen, dann fehlen ihm negative Ladungen, d.h. das Metallstück hat einen positiven Ladungsüberschuß. Wir sagen - es ist positiv geladen. Geben wir ihm aber noch einige Elektronen dazu, dann hat das Metallstück einen negativen Ladungsüberschuß - es ist negativ geladen. Und je nachdem wieviele Elektronen wir dazugegeben, bzw. weggenommen haben - dies bestimmt uns den Betrag der Ladung.

Wir sehen - laden wir eine Metallkugel mit der Ladung 1 C auf, so nehmen wir ihm so viele Elektronen weg, daß diese zusammen 1 C ausmachen, also : 1 Elektron hat die Ladung von $1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$. Wir müssen also, um das Metall auf + 1 C aufzuladen $6,24 \cdot 10^{18}$ Elektronen aus dem Metallverband herauslösen. Eine unvorstellbar große Zahl ! Wenn man aber bedenkt, daß in einer massiven Kupferkugel von 5 cm Radius ca. $4,4 \cdot 10^{25}$ freie Elektronen vorhanden sind - sieht man, daß man nur jedem 7 Millionensten Atom ein Elektron entwinden muß !

3. Elektrisches Feld

Vorhin haben wir bei der Besprechung des Coulomb'schen Gesetzes schon einmal davon gesprochen, welche Wirkung eine Ladung Q hat. Wir stellen es uns so vor - durch das Vorhandensein einer Ladung Q wird der umgebende Raum in einen Spannungszustand versetzt. Bringen wir eine andere Ladung, sagen wir q in diesen Raumbereich, erkennen wir die Wirkung der Ladung Q an der Kraft, die von dieser auf die Ladung q ausgeübt wird. Wir ordnen der Ladung Q ein Feld zu und nennen es elektrisches Feld.

Wie machten wir es bei der Gravitation ?

$$\text{Es galt } \vec{F} = \vec{G} = \uparrow \frac{m \cdot m_E}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}^0$$

Sagen wir, m_E sei die Masse der Erde und m sei die Masse eines beliebigen Körpers.

Es gilt aber außerdem das Newton'sche Gesetz $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$.

$$\Rightarrow \uparrow \frac{m_E}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}^0 = \vec{g} \quad \text{Dieses nannten wir das Gravitationsfeld der Erde -}$$

Jede Masse baut um sich herum ein Gravitationsfeld. ^g Bringt man eine zweite Masse in dieses Feld hinein, so wirkt durch dieses Feld auf diese zweite Masse eine Kraft, die gleich $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$ ist.

Im elektrischen Fall machen wir es genauso -

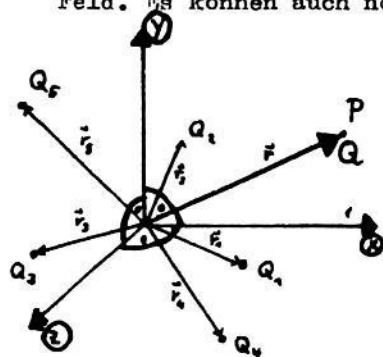
Jede Ladung Q baut um sich herum ein Feld auf. Wir nennen es \vec{E} . Bringt man eine zweite Ladung q dazu (die zu Q den Abstand \vec{r} haben soll), dann spürt man zwischen beiden eine Kraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Wie groß ist also \vec{E} ?

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{r}^0$$

Die elektrische Feldstärke (so nennen wir das) hängt also vom Abstand \vec{r} , in dem man sie betrachtet oder mit einer Probeladung q mißt, ab. $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$.

Man hat die Vorstellung, daß das elektrische Feld auch dann existiert, wenn keine Probeladung vorhanden ist. Zwar wirkt dann keine Kraft (es ist ja nur eine Ladung vorhanden), aber diese Ladung baut um sich herum ein Feld auf, dessen Stärke von dieser Ladung abhängt und von dem Punkt, in dem man das elektrische Feld mißt.

Abgesehen davon, daß zwei Ladungen aufeinander Kräfte ausüben, so bilden auch sie zusammen wiederum ein elektrisches Feld. Es können auch noch viel mehr Ladungen sein.



Wir betrachten uns ein Feld, welches aus n punktförmigen Ladungen q_1, q_2, \dots, q_n gebildet wird. Dieses betrachten wir im Punkt P . Dazu konstruieren wir ein Koordinatensystem. P sei dann die Spitze des Vektors \vec{r} , und jede Ladung q_i habe ihren Ortsvektor \vec{r}_i . Wie sieht dann das elektrische Feld aus? Nehmen wir eine Probeladung Q und halten sie in den Punkt P , wie groß ist dann

die Kraft auf diese Probeladung? Wir wissen doch, daß sich Kräfte einfach summieren. Die Kraft auf die Probeladung ist einfach die Summe der Einzelkräfte, die von jeder einzelnen Ladung q_i auf die Probeladung wirkt. Aus dieser zusammengesetzten Kraft können wir am Ende die Probeladung wieder herausziehen (sie kommt in jedem Summanden vor) - dann können wir einfach wieder durch Q dividieren und haben das elektrische Feld dieser Ladungsverteilung. Das heißt also, daß sich Felder mehrerer Ladungen addieren zur Gesamtfeldstärke:

Die Feldstärke einer Ladung q_i im Punkt P ist

$$\vec{E}(P)_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \vec{r}_{pi}^0 \quad \vec{r}_{pi} = \text{Vektor von Punkt } P \text{ zur Ladung } q_i.$$

Haben wir nun viele Ladungen (also $i = 1, 2, 3, \dots, n$), dann summieren wir über i :

$$\begin{aligned} \vec{E}(P)_{\text{ges}} &= \vec{E}(P)_1 + \vec{E}(P)_2 + \dots + \vec{E}(P)_n \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \cdot \vec{r}_{p1}^0 + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \cdot \vec{r}_{p2}^0 + \dots + \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^2} \cdot \vec{r}_{pn}^0 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \vec{r}_{pi}^0 \end{aligned}$$

Hat man sehr viele Punktladungen vorliegen, so kann man auch zu einem kontinuierlich geladenen Raum übergehen, d.h. in einem

kleinen Raumteil dV existiert die Ladung dq . Man nennt dann

die Größe $\sigma = \frac{dq}{dV}$ die Ladungsdichte an diesem Ort.

Wenn wir jetzt viele Ladungselemente dq aufsummieren und ihre Orte berücksichtigen, erhalten wir auch das Gesamtfeld:

$$\text{es ist } dq = \sigma dV \Rightarrow$$

ein Ladungselement dq entspricht dem Feldanteil von

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dV}{r^2} \vec{r}^0 \quad (\text{wobei } \vec{r} \text{ der Abstand zwischen betrachtetem Punkt und dem Volumenelement } dV \text{ ist}).$$

Daraus erhalten wir das Gesamtfeld, indem wir über alle dE 's integrieren:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dV}{r^2} \vec{r}^0 \quad \text{oder}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r^2} \vec{r}^0 \cdot dV$$

Nun noch zur Einheit der Feldstärke:

$$\text{Wir sehen, da } \vec{E} = \frac{F}{q} \Rightarrow \boxed{[E] = \frac{N}{C}}$$

Wie wir später noch sehen werden, nennen wir die Einheit

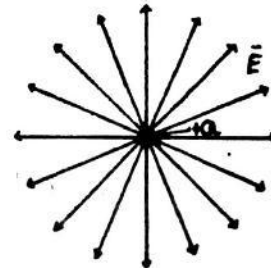
$$1 \cdot \frac{Nm}{C} = 1 \text{ Volt (V)} \Rightarrow 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{V}{m}$$

Man kann elektrische Felder sehr gut durch Feldlinien darstellen. An jedem Punkt folgt die Feldlinie der Richtung des elektrischen Feldes, also der Richtung des Vektors \vec{E} .

Im elektrostatischen Feld verbinden die Feldlinien immer positive und negative Ladungen. Es gibt keine Feldlinien, die irgendwo frei im Raum enden. Ebensovienig gibt es in der Elektrostatik geschlossenen Feldlinien (diese werden wir erst in der Elektrodynamik kennenlernen - dort hängt der Vektor \vec{E} nicht nur vom Ort, sondern auch von der Zeit t ab.).

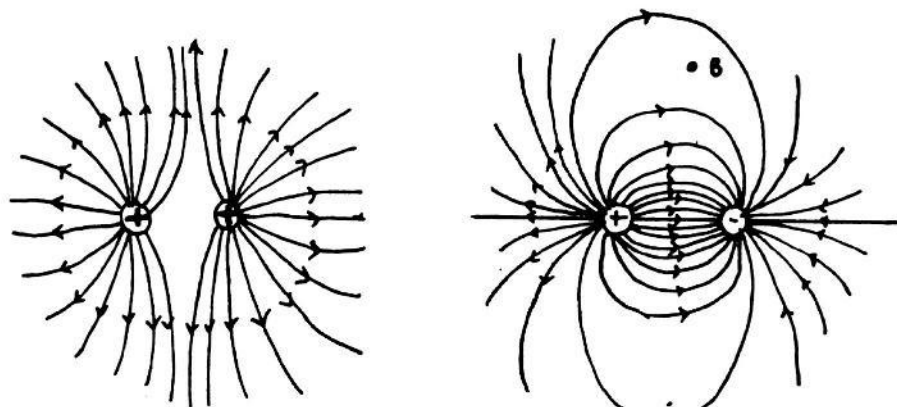
Feldlinien scheinen sich in ihrer Länge verkürzen zu wollen, und sie scheinen sich in ihrer Querrichtung gegenseitig abzustößen. Feldlinien können sich nicht kreuzen. Warum? In dem Kreuzungspunkt gäbe es für das elektrische Feld gleichzeitig zwei Richtungen. Hier einige Beispiele für Feldlinien:

Im ersten Bild sehen wir Feldlinien, die radial von einer Punktladung nach außen gehen. Die entgegengesetzte Ladung stellt man sich im Unendlichen vor - deshalb diese radiale Lage der Feldlinien.



Man sieht hier sofort, daß die Feldliniendichte nach außen hin abnimmt, daß also die Feldliniendichte ein Maß für die Feldstärke

ist. In den beiden nächsten Bildern sind Feldlinien dargestellt, die zwischen gleichnamigen und zwischen ungleichnamigen Ladungen vorhanden sind.

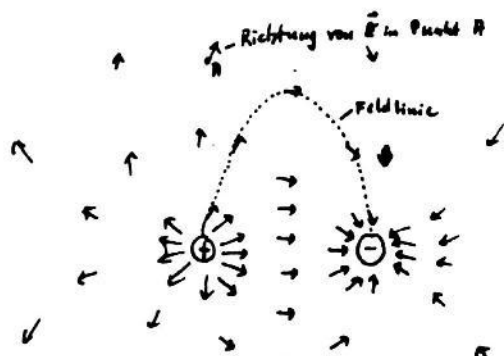


Feldlinien von \oplus nach \ominus !

Noch etwas grundsätzliches : Feldlinien gibt es nicht. Sie sind lediglich eine Modellvorstellung - auch in Punkten, die zwischen zwei Feldlinien liegen (oben rechtes Bild, Punkt B) gibt es ein elektrisches Feld. Die Feldlinien sollen nur dokumentieren, wo und wie das elektrische Feld verläuft. Dazu wählt man in der Nähe von Ladungen Punkte aus, sieht sich an, wie dort das elektrische Feld verläuft, zeichnet

die Vektoren des elektrischen Feldes, und legt daran tangential Linien an, die die Richtung des \vec{E} -Feldes auch zwischen den Punkten darstellen. Zwischen zwei nebeneinander herlaufenden Feldlinien liegen noch unendlich viele weitere Feldlinien, die man aber nicht alle zeichnen kann, die man sich aber durch die vorhandenen Feldlinien gut vorstellen kann.

Noch etwas - man definiert für die Feldlinien eine Richtung. Man sagt, die Feldlinien verlaufen von der positiven zur negativen Ladung. Dieses besagt, daß die Richtung des elektrischen Feldes genauso verläuft, von der positiven zur negativen Ladung.



4. Elektrostatistisches Potential

Als wir damals die Gravitation beschrieben, haben wir uns auch Gedanken gemacht, wie groß die Arbeit ist, irgendwelche Massen im Gravitationsfeld zu bewegen. Daraus folgte für uns die potentielle Energie (zum Heben einer Masse im Gravitationsfeld), Wir haben ja gesehen, daß es Analogien gibt zwischen diesen beiden Feldern - es ist also anzunehmen, daß es auch im elektrischen Feld eine potentielle Energie gibt, die vom Abstand zweier Ladungen abhängt : Hat man zwei Ladungen vorliegen, die sich anziehen, dann muß man Arbeit aufwenden (Energie hineinstecken), um die beiden Ladungen voneinander zu trennen. Diese Arbeit (bzw. potentielle Energie) hängt eng mit der Feldstärke zusammen - insgesamt ergibt sich sogar, daß diese Energie das Feld sehr gut beschreibt.

Wir wollen versuchen, die Arbeit zu berechnen, die notwendig ist, eine Ladung q um eine bestimmte Strecke zu verschieben.

Angenommen wir haben ein elektrisches Feld mit der Feldstärke \vec{E} . Dort wollen wir eine Ladung q bewegen. Da wir Arbeit suchen, wählen wir einmal in unserem Gedächtnis, was Arbeit eigentlich noch war - nach langem Suchen finden wir

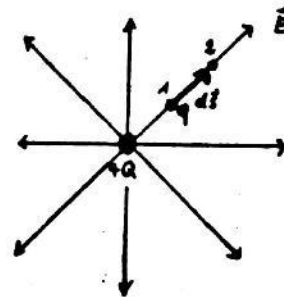
$$\text{Arbeit} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Wir müssen also zunächst herausfinden, gegen welche Kraft wir die Arbeit leisten - das ist selbstverständlich die elektrostatische Kraft : $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Aha !

Dann ist also die Arbeit, eine Ladung q vom Punkt 1 zum Punkt 2 zu verschieben gerade gleich :

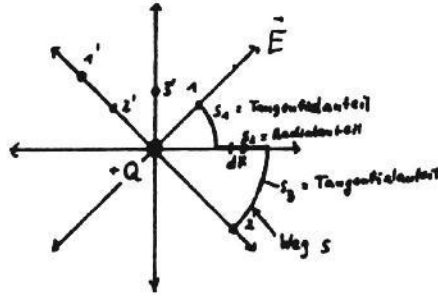
$$W_{12} = \int_1^2 q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} .$$

Wir gehen davon aus, daß die Ladung Q das Feld erzeugte. Nun sollen die Punkte 1 und 2 so liegen, wie in der nebenstehenden Skizze. Dann haben \vec{E} und $d\vec{s}$ gleiche Richtung, d.h. das Skalarprodukt $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds$.



$$\Rightarrow W_{12} = \int_1^2 q \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{1}{r^2} dr = -\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Liegen die Punkte 1 und 2 nicht auf einem Radius, so kann man aber die Strecke in Tangential- und Radialkomponenten aufteilen. Für die Radialanteile gilt das oben schon gesagte: $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot dr$ (Richtungen sind gleich, Skalarprodukt ergibt $E \cdot dr$), bei den Tangentialanteilen ist es sogar so, daß $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, da \vec{E} und $d\vec{s}$ senkrecht aufeinander stehen. Das bedeutet aber, daß es egal ist, ob man die Arbeit ausrechnet, eine Ladung von Punkt 1' nach Punkt 2' oder nach Punkt 3' zu verschieben. Es kommt das gleiche dabei heraus.



Die Arbeit, eine Ladung im elektrischen Feld zu verschieben, hängt somit nicht vom Weg, sondern nur von Anfangs- und Endpunkt ab. Es ist dies genau, wie bei der Arbeit im Gravitationsfeld. Auch dort hing diese Arbeit nur von Anfangs- und Endpunkt ab.

Der Probeladung kann man nun in jedem Punkt eine potentielle Energie zuordnen. Die Arbeit, die Ladung von einem zu einem anderen Punkt zu verschieben ist dann gerade die Differenz aus beiden potentiellen Energien.

$$W_{12} = E_{\text{pot},1} - E_{\text{pot},2} = + \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

Im Punkt 1 z.B. haben wir eine potentielle Energie von

$E_{\text{pot},1} = q \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}$. Dies kann man zerlegen in eine Eigenschaft der Probeladung q und eine Eigenschaft des Feldes um Q . Das ist dann $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Diese heißt Potential. Es gilt also:

Ein Feld $\vec{E}(\vec{r})$ hat das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Dieses Potential ist nur bis auf eine additive Konstante

bestimmt. Man definiert das Potential so, daß es im Unendlichen null ergibt; denn dort spürt man vom Feld \vec{E} keine Wirkung mehr.

Für das Potential $\varphi(\vec{r})$ gilt:

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

da $\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right)$

Betrachten wir nun zwei Punkte unterschiedlichen Potentials (dem entspricht im Gravitationsfeld 2 Punkte unterschiedlicher Höhe), so muß man Arbeit aufwenden, um eine Ladung von einem zum anderen Punkt zu verschieben. Zwischen beiden Punkten gibt es eine Potentialdifferenz. Wir nennen diese $\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} =$ elektrische Spannung zwischen den Punkten 1 und 2.

Nun noch zur Einheit der Spannung und des Potentials φ (beide müssen ja die gleiche Einheit haben, da das eine die Differenz aus dem anderen ist).

Potential: $\varphi(\vec{r}) = \frac{C \cdot Nm^2}{C^2 \cdot m} = \frac{Nm}{C}$. Wie schon gesagt nennen

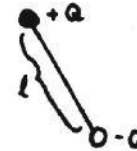
wir die Einheit $\frac{Nm}{C} = \text{Volt (V)}$.

Potentiale, bzw. Potentialdifferenzen, also Spannungen werden in Volt gemessen.

5. Elektrische Dipole

Als Dipol bezeichnet man eine Ladungskonfiguration, bei der sich zwei ungleichnamige, aber betragsmäßig gleiche Ladungen gegenüberstehen. Der Abstand zwischen beiden Ladungen bleibt gleich.

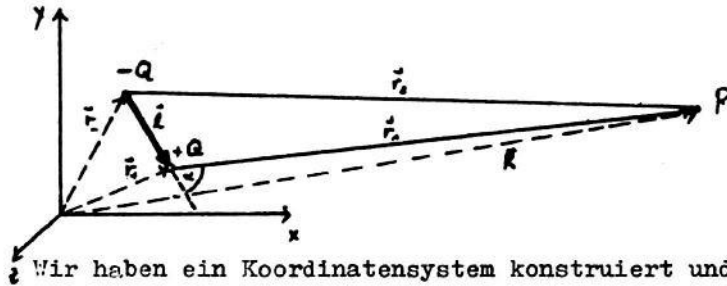
Wir haben also zwei Ladungen $+Q$ und $-Q$, die Länge zwischen beiden sei l und sie sei fest. Normalerweise müßten sich beide



Ladungen anziehen und aufeinander zu bewegen. Wir stellen es uns deshalb so vor, als seien die beiden Ladungen so befestigt, daß sie sich nicht gegeneinander bewegen können.

a) Dipolmoment

Das Vorhandensein eines Dipols kann man auch in weiterer Entfernung spüren. Um diese Wirkung festzustellen, berechnen wir zunächst einmal das Potential eines Dipols in irgend einem Punkt P.



Wir haben ein Koordinatensystem konstruiert und setzen nun folgendes :

\vec{R} sei der Ortsvektor für unseren Punkt P. \vec{r}_+ und \vec{r}_- seien die Ortsvektoren für unsere beiden Ladungen +Q und -Q. Daraus ergeben sich die folgenden Längen :

$$\vec{l} = \vec{r}_+ - \vec{r}_- ; \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_- - \vec{R} ; \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_+ - \vec{R} .$$

Wir brauchen nun zur Berechnung nur die Größen \vec{r}_1 , \vec{r}_2 und \vec{l} .

Unser Dipol soll nun so liegen, daß seine Achse mit der Länge \vec{r}_1 den Winkel α bildet.

Wir machen nun einmal wieder eine Näherung : Wir sagen, daß der Punkt P viel weiter weg liegt, als die Strecke l lang ist. Also $r_1 \gg l$ und $r_2 \gg l$. Was bringt uns das ?

Wenn dies gilt, dann sind die beiden Strecken r_1 und r_2 ungefähr gleich lang. Wir machen keinen Fehler, wenn wir setzen $|\vec{r}_1| \approx |\vec{r}_2| = |\vec{r}|$.

Außerdem können wir sagen

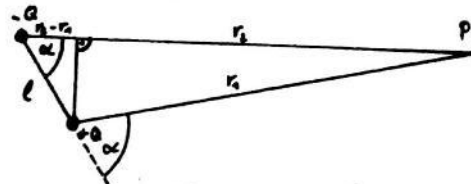
Der Winkel α tritt noch einmal auf (allerdings ist er eine Spur kleiner), aber

wenn wir sagen, P sei sehr weit weg, dann liegen r_1 und r_2 fast parallel und unsere Näherung ist berechtigt. Dann können wir sagen : $\cos \alpha = \frac{r_2 - r_1}{l}$ oder $r_2 - r_1 = l \cdot \cos \alpha$.

Wir haben jetzt die Näherungen gemacht

$$1) \quad r_1 = r_2 = r \quad \text{und} \quad 2) \quad r_2 - r_1 = l \cos \alpha .$$

Da es immer noch Leute gibt, die glauben, beides widerspricht einander - hier ein Zahlenbeispiel.



Aus 1) folgt auch $r_1 + r_2 = 2r = 2r_1$.

Das Argument der Ungläubigen : Wenn $r_1 = r_2$, dann ist $r_2 - r_1 = 0$. Wäre die 1. Näherung keine Näherung, sondern wäre die Aussage $r_1 = r_2$ exakt, dann wäre natürlich die Differenz gleich Null - klar ! Aber es handelt sich hier nur um eine Näherung : z.B. $r_1 = 1471$ cm und $r_2 = 1469$ nm.

Setzen wir beide gleich, machen wir einen Fehler von 0,136 %
Setzen wir aber $1469 - 1471 = 0$, d.h. $2 = 0$, dann ist das Unsinn. Es leuchtet doch jedem ein, daß

$$2 = 0 \quad \text{viel falscher ist als}$$

$$1469 = 1471 \quad \text{oder ?}$$

In der Hoffnung, daß nun jeder diese Näherung akzeptiert, schreibe ich sie noch einmal hin :

$$1) \quad r_1 = r_2 = r \quad \text{und} \quad 2) \quad r_2 - r_1 = l \cos \alpha .$$

Gut -

Jetzt zur Berechnung unseres Potentials :

Wie war das elektrische Potential noch definiert ?

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

wobei r hier der Abstand zwischen Ladung und Beobachtungspunkt ist. Bei uns handelt

es sich um zwei Ladungen. Also müssen wir die Potentiale addieren :

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+Q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1} \right) \quad \text{und nun setzen wir unsere} \\ & \quad \text{Näherungen ein :} \end{aligned}$$

in den Zähler kommt nun $r_2 - r_1 = l \cos \alpha$, in den Nenner $r_2 \cdot r_1 = r \cdot r = r^2 \Rightarrow$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot l \cdot \cos \alpha}{r^2}$$

Was war nun α noch ? Es war dies der Winkel zwischen der Lage des Dipols und der Richtung zum Beobachtungspunkt hin.

Man kann nun die Dipoleigenschaft in einer Größe festhalten, die Dipolmoment genannt wird, Wir sagen

$$\vec{m} = Q \cdot \vec{l}$$

\vec{m} ist ein Vektor und er hat die gleiche Richtung wie die Strecke \vec{l} .

Wir erhalten dann für das Potential eines Dipols, betrachtet in einer Entfernung \vec{r} , mit Winkel α zwischen Richtung von der Dipolachse und Richtung zum Beobachtungspunkt hin :

$$\psi(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{m}|}{r^2} \cdot \cos \alpha$$

Dies können wir noch etwas vereinfachen. Der Winkel α ist der Winkel zwischen den Richtungen von \vec{l} und von \vec{r} . Also können wir schreiben statt $|\vec{m}| \cdot \cos(\vec{m}; \vec{r}) = \vec{m} \cdot \vec{r}^0$ $\leftarrow \vec{m} \cdot \vec{r}^0 = |\vec{m}| \cdot |\vec{r}^0| \cdot \cos(\alpha; \vec{r})$

Also als Skalarprodukt zwischen dem Dipolmoment \vec{m} und dem Einheitsvektor in r -Richtung.

$$\psi(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}^0}{r^2}$$

b) Dipol im elektrischen Feld

Wenn wir nun einen Dipol in ein elektrisches Feld bringen, dann wechselwirken die Felder (das eine vom Dipol selbst) miteinander. Der Dipol erfährt elektrische Kräfte. Wir wollen dies untersuchen:

Unser Dipol soll in einem homogenen elektrischen Feld liegen. Was ist nun das? Ein homogenes elektrisches Feld?

In einem homogenen elektrischen Feld ist an jedem Punkt die gleiche elektrische Feldstärke vorhanden; gleich in Betrag und Richtung. Das bedeutet also, daß die Feldlinien parallel stehen.

Wir haben nun unseren Dipol in einem solchen Feld. Er soll mit den Feldlinien den Winkel α bilden.

Wie groß ist nun die Kraft, die auf den Dipol wirkt?

Oder besser - wir sehen, daß zwei Kräfte angreifen, diese sind gleich stark aber entgegengesetzt. Es handelt sich somit um ein Kräftepaar. Und was bewirkt dies? Es bewirkt am Dipol ein Drehmoment. Dieses wollen wir nun ausrechnen.

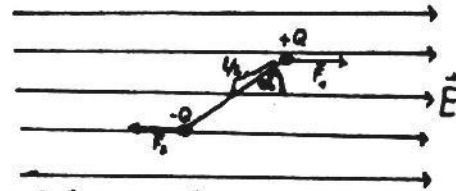
Die Kraft auf eine Ladung in einem elektrischen Feld kennen wir - diese war $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$.

Hier greifen also zwei Kräfte an und zwar $\vec{F}_1 = Q \cdot \vec{E}$ und $\vec{F}_2 = -Q \cdot \vec{E}$.

Erinnern wir uns an die Definition des Drehmomentes. Dieses war $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (\vec{r} war der Hebelarm, hier $\frac{1}{2}$).

Hier ergibt sich somit

$$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) \quad \text{das Minus hier, da die beiden Kräfte verschiedene Richtungen (entgegengesetzt) haben.}$$



$$\vec{F}_1 = +Q\vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{F}_2 = -Q\vec{E}$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \vec{l}$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \vec{l} \times 2 \cdot Q \cdot \vec{E} \quad \text{. Ziehen wir alle Skalare vor das Kreuzprodukt}$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot Q \cdot (\vec{l} \times \vec{E})$$

$$\text{Oder auch} \quad \vec{M} = Q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{m} \times \vec{E} = |\vec{m}| \cdot |\vec{E}| \cdot \sin \alpha$$

Also nochmal: das Drehmoment, das auf einen Dipol im homogenen elektrischen Feld wirkt ist

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{E} = |\vec{m}| \cdot |\vec{E}| \cdot \sin \alpha$$

Wenn ein Drehmoment wirkt, beginnt sich der Dipol zu drehen. Wenn er sich dreht, dann ändert sich der Winkel α .

Wie lange dreht sich nun der Dipol? So lange, bis kein Drehmoment mehr wirkt. Und wann wirkt keines mehr? Wenn $\vec{M} = 0$

Und wann ist das der Fall? Nun - dann wenn der Sinus von $\alpha = 0$ ist. Oder auch, genau dann, wenn der Winkel $\alpha = 0$.

Liegt also der Dipol parallel zum elektrischen Feld, dann wirkt kein Drehmoment auf ihn.

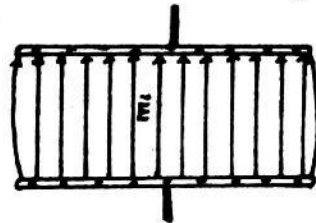
Ein Dipol wird im elektrischen Feld so lange gedreht, bis er sich parallel zu den elektrischen Feldlinien (also parallel zum elektrischen Feld) ausgerichtet hat.

6. Influenz

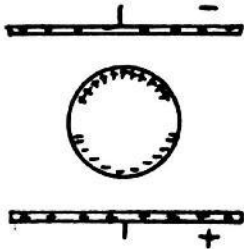
Stellen wir uns vor, wir bringen eine Metallkugel in ein elektrisches Feld. Was wird passieren? Wir wissen doch, daß die negativen Ladungsträger (d.h. die Elektronen) im Metall frei beweglich sind. Betrachten wir uns das genauer. Zuerst erzeugen

wir uns ein elektrisches Feld. Am besten ein homogenes. Wie machen wir das? Mit punktförmigen Ladungen ist das kaum zu schaffen. Wir nehmen zwei gleichgroße Metallplatten. Diese stellen wir gegeneinander parallel auf. Die eine laden wir positiv, die andere negativ auf. Nun geht prinzipiell von jeder Einzelladung auf der Platte Feldlinien zur entsprechenden Ladung auf der anderen Platte :

Hier herrscht also dann ein homogenes elektrisches Feld. Eine solche Anordnung nennt man Plattenkondensator. Mehr darüber im nächsten Kapitel.



In ein solches Feld wollen wir jetzt unsere Metallkugel bringen. Was geschieht? Die beweglichen Elektronen der Kugel sammeln sich auf einer Kugelhälfte. Warum? : Nun - von den positiven Ladungen der positiv geladenen Platte greifen an den Elektronen der Kugel Kräfte an, die diese soweit zur Platte hin ziehen; wie dies möglich ist. Also sammeln sich auf der der positiven Platte zugewandten Kugelseite Elektronen an, d.h. dort liegt eine negative Ladung vor. Diese Elektronen fehlen natürlich auf der anderen Kugelseite, sodaß dort positive Ladung vorherrscht.



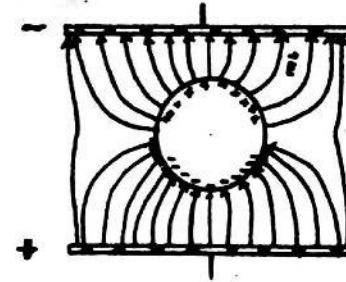
Diese Ladungstrennung in einem elektrischen Leiter nennen wir Influenz, d.h. es tritt bei elektrischen Leitern, die in den Einfluß eines elektrischen Feldes kommen, Ladungstrennung auf.

Diese Influenz können wir dauernd beobachten.

Bei der Kugel haben wir gesehen, daß sich die Elektronen hauptsächlich in einer Kugelhälfte aufhalten. Wo halten sie sich nun genau auf? Es ist so : da sich alle Elektronen gegenseitig abstoßen, versuchen sie Plätze einzunehmen, die möglichst weit voneinander entfernt sind. Daraus folgt, daß sich die Ladungen (die verschiebbar sind) bevorzugt auf den Oberflächen von metallischen Körpern aufhalten. Bei unserer Kugel also ist es so, daß die Elektronen ^{sich} auf der der positiven Platte zugewandten Kugeloberfläche sammeln, und die postulierten positiven Ladungsträger (das sind dann so etwas wie Elektronen-

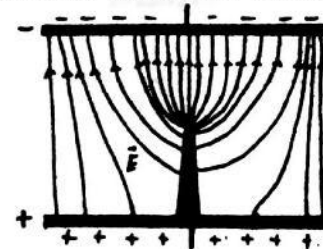
fehlstellen) sammeln sich auf der entgegenliegenden Kugeloberfläche. Sehen wir uns nun das entstandene elektrische Feld an - durch das Einbringen der Kugel in das homogene elektrische Feld haben wir dieses verändert.

Wir haben gesagt, die Feldlinien verbinden positive und negative Ladungen miteinander. Es ist nun so, daß die Feldlinien auf irgendwelchen Oberflächen stets senkrecht auf der Oberfläche stehen. Wir zeichnen dies für unser System Kondensator - Kugel.



Wir haben auch gesagt, daß überall dort, wo die Dichte der Feldlinien groß ist, die Feldstärke groß ist. Wir sehen hier : in der Nähe der Kugel ist die Feldstärke größer als an den Platten. Das ist auch ganz

klar : Wenn die Zahl der Ladungen auf beiden Platten gleich der Zahl der Ladungen in der Kugel sind (und das ist der Fall, denn in der Kugel werden gerade so viele Ladungen getrennt und auf die beiden Kugelhälften verteilt, wie auf den beiden Platten sitzen), dann ist es doch einsichtig, daß die Flächenladungsdichte der Kugel größer ist, als die der Platten. Was ist denn das nun schon wieder: Flächenladungsdichte? Auf der Oberfläche sammeln sich Ladungen. Die Zahl der Ladungen pro Fläche nennt man die Flächenladungsdichte. Hier ist es so : die Kondensatorplatten haben eine größere Oberfläche als die Kugel. Aber auf beiden Körpern sind gleich viele Ladungen. Also sind pro Fläche auf der Kugel mehr Ladungen. Die Ladungen sitzen dort dichter. Das bedeutet aber, daß das daraus entstandene elektrische Feld stärker ist, als das des Kondensators. Die Feldstärke ist somit dort stärker. Wir sehen - die Feldstärke von Oberflächenladungen hängt direkt mit der Oberflächenkrümmung zusammen. Laden wir einen Körper auf, der eine Spitze trägt, dann



ist die Feldstärke in der Nähe der Spitze sehr hoch.

Wenn man eine solche geladene Spitze in die Nähe eines anders geladenen Körpers bringt, ~~konnte~~ sich beide Ladungen durch einen Entladungsblitz gegeneinander

ausgleichen. Und das umso eher, je spitzer diese Spitze ist.

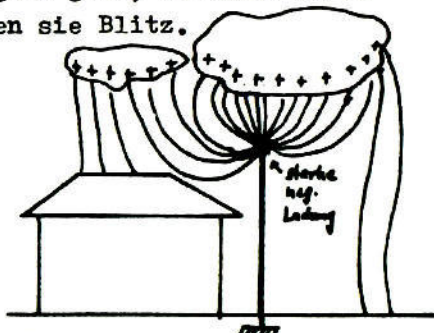
Normalerweise ist die Luft ja ein Isolator -d.h. dort können keine Elektronen fließen, es sind keine freien Elektronen vorhanden. Mit einer aufgeladenen Spitze kann man aber so hohe Feldstärken erzeugen, daß sie imstande sind, die Luftmoleküle zu ionisieren, d.h. die Elektronen, die an ihre Atome gebunden sind, diesen zu entreißen, daß die Luft in diesem Raumbereich leitend wird. Dieser Ionisierungsvorgang macht sich durch einen hellen Lichtblitz bemerkbar.

Beispiel: Blitz und Blitzableiter :

Die Erde ist negativ geladen. Sie hat eine Ladung von ca. $6 \cdot 10^5$ C. Durch Aufwinde, fallende Regentropfen und Schneeflocken werden in Wolken Ladungen getrennt. Es kann passieren, daß sich Wolken verschiedener Ladung nahekomen, oder daß eine positiv geladene Wolke in die Nähe der negativen Erdoberfläche kommt. Sind die Feldstärken genügend groß, so kommt es zu gewaltigen Entladungen. Wir nennen sie Blitz.

Um nun die elektrische Entladung des Blitzes zu entschärfen (es treten zwischen den Wolken, bzw. Wolke und Erde Spannungen bis zu 10^9 V auf, die Stromstärke eines Blitzes beträgt ca. $2 \cdot 10^4$ A), benutzt man sogenannte Blitzableiter.

Durch die Spitzenwirkung am oberen Ende des Blitzableiters wird in dieser Spitze durch die Gewitterwolke eine umgekehrte Ladung induziert. Diese ist sehr hoch - Ladungsträger treten aus und machen die umgebende Luft leitend - es ist eine Verbindung zwischen Wolke und Blitzableiter geschaffen. Die gewaltige Ladung kann ungehindert in die Erde abfließen. Noch ein Wort zum Gewitter : Ein Blitz wird immer von einem Donner begleitet. Durch die schlagartige Erwärmung der Luft im Bereich des Blitzes wird eine starke Druckwelle erzeugt, die wir im Ohr als Donner wahrnehmen.



7. Der Kondensator

a) Kapazität

Vom Kondensator haben wir schon kurz gesprochen. Es handelt sich dabei um den Plattenkondensator, bei dem sich zwei verschieden geladene Platten gegenüberstehen.

Allgemein sagen wir : zwei voneinander isolierte Leiter (im Normalfall Metallkörper) bilden einen Kondensator. Diese Anordnung kann eine Ladung aufnehmen, wenn eine Spannungsquelle angeschlossen wird (eine Spannungsquelle ist hier nichts anderes als ein Bauteil, welches zwischen seinen Polen eine konstante Spannungsdifferenz hat). Trennen wir anschließend die Quelle von unserem Kondensator ab, so bleibt die Ladung darauf zurück. Ein Kondensator ist somit ein "Ladungsspeicher". Wir können ihn aufladen, können die Ladung darauf belassen und können ihn auch wieder entladen.

Nun ist nicht jeder Kondensator gleich gut geeignet, Ladung zu speichern. Legen wir eine bestimmte Spannung U an einen Kondensator an, so trennen wir dort die Ladungen so, daß der eine Kondensatorteil mehr positive, der andere mehr negative Ladung trägt. Nun ist es so, daß die Ladung die der Kondensator nach Anlegen der Ladespannung trägt, proportional zu dieser Spannung ist. Legt man eine hohe Spannung an, so ergibt sich eine stärkere Aufladung als bei einer kleineren Spannung. Es gilt :

$$Q \sim U$$

Nun hängt die Ladung noch von etwas anderem ab, nämlich von der Konstruktion des Kondensators, von seiner Form. Nehmen wir als Beispiel den Plattenkondensator. Auf größere Platten paßt mehr Ladung, als auf kleinere.

Wir haben eben von der Proportionalität zwischen Q und U gesprochen. Wir machen daraus eine Gleichung :

$$Q = C U$$

$C = \text{const.}$ In diesem C steckt jetzt die Kondensatorform mit drin !

Wir sehen - je größer C , desto mehr Ladung ist der Kondensator fähig, aufzunehmen. Deshalb nennt man dieses C Kapazität. Diese hängt nun von der Form und der Größe des Kondensators ab.

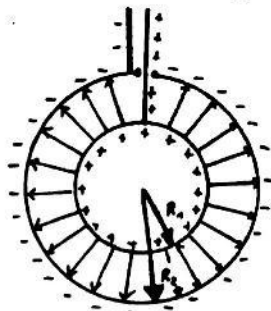
Somit hat jeder Kondensator seine typische Kapazität C .
Die Einheit dieser Kapazität ist

$$[C] = \frac{C}{V} = \text{Farad (F)}$$

Im folgenden werden wir versuchen, für zwei einfache Kondensatortypen die Kapazität zu errechnen.

b) Kugelkondensator

Ein Kugelkondensator besteht aus zwei Metallkugeln, eine in der anderen. Die innere Kugel wird aufgeladen. Durch Influenz entstehen auf der äußeren Hohlkugel entgegengesetzte Ladungen. Zwischen beiden Kugeln entsteht ein elektrisches Feld.



Dieses Feld kommt nur durch die Ladung Q der inneren Kugel.

Dieses Feld hat die Größe

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Wir wissen noch

$$\varphi(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{hier } -\int E \cdot dr = \frac{+1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

Anders gesagt gilt auch

$$|\vec{E}| = -\frac{d\varphi}{dr} \implies d\varphi = -E \cdot dr$$

Also: Spannung zwischen den Kugeln ist $U = \varphi_1 - \varphi_2$ (Potentialdifferenz)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} \right]_{R_2}^{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{R_2 - R_1}{R_2 \cdot R_1}$$

somit können wir nun die Kapazität dieses Kondensators ausrechnen:

Legen wir eine Spannung an einen Kondensator an, so trennen wir dort die Ladungen - er ist aufgeladen; Entfernen wir die Spannungsquelle, so bleibt die Ladung, also auch die Spannung zwischen beiden Ladungen erhalten. Nach $Q = C \cdot U$ gilt dann:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{R_2 - R_1}{R_2 \cdot R_1}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 - R_1}$$

Dies können wir noch etwas umschreiben:

Den Abstand zwischen beiden Kugeln (also $R_2 - R_1$) nennen wir d , dann sagen wir (dies ist in der Praxis fast immer gerechtfertigt, da nur solche Kondensatoren verwendet werden können, bei denen das gilt) es sei $R_1 \gg d$, d.h. die Radien der beiden Kugeln sollen sich nur geringfügig voneinander unterscheiden. dann gilt: $R_1 \approx R_2 = R$

Dann ergibt sich für die Kapazität unseres Kugelkondensators

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{d}$$

mit dem Radius R . Nennen wir diese = A , dann ergibt sich

$$\text{für die Kapazität: } C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Die Kapazität ist also proportional zur Kondensatorfläche und umgekehrt proportional zum Abstand beider Flächen.

Sehen wir nach, ob dies auch beim Plattenkondensator so ist:

c) Plattenkondensator

Wir nehmen jetzt einfach die Kapazität des Kugelkondensators und nähern diesem einen Plattenkondensator an:

Wir erhalten genau das gleiche, da hier beim Plattenkondensator die vorhin gemachte Näherung erst recht erfüllt ist. Hier sind beide Radien R_1 und R_2 gleich, denn sie sind beide unendlich groß, da die Platten ja eben sind.

Wir haben nun die Kapazitäten von Kondensatoren berechnet. Wir haben gesehen, es ergibt sich ein elektrisches Feld zwischen den beiden Ladungsträgern eines Kondensators. Wie groß ist nun dieses Feld?

Wir bestreiten denselben Weg:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi R^2} = \frac{Q}{2\epsilon_0 A}$$

Für die Spannung U gilt

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{d}{R^2} = \frac{Q \cdot d}{2\epsilon_0 A} \quad (\text{nach } Q = C U)$$

also folgt \implies (Wenn man beide Ausdrücke miteinander vergleicht)

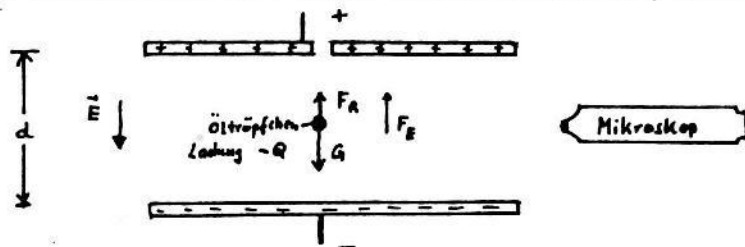
$$E = \frac{U}{d}$$

Also gilt für das elektrische Feld in einem Kondensator, dessen Platten den Abstand d haben und zwischen dessen Platten die Spannung U liegt

$$E = \frac{U}{d}$$

d) Millikan - Versuch

Mit diesem grundlegenden Versuch ermittelte Robert Andrews Millikan im Jahre 1910 erstmals die Größe der Elementarladung. Er konstruierte dazu einen Plattenkondensator, in den von oben



her aufgeladene kleine Öltröpfchen eingelassen werden konnten. Diese wurden vorher durch Ultraviolettbestrahlung, bzw. radioaktive Bestrahlung aufgeladen. Ein bestimmtes Tröpfchen wird nun mit dem Mikroskop beobachtet. Da es der Luftreibung ausgesetzt ist, nimmt es (wie der Fallschirmspringer) eine konstante Geschwindigkeit an. Der Plattenkondensator wird nun aufgeladen, d.h. ein elektrisches Feld \vec{E} wird eingeschaltet.

Was geschieht?

Auf das Tröpfchen wirken mehrere Kräfte.

Zunächst einmal die Gewichtskraft $G = m \cdot g$. Wir wissen, $m = V \cdot \rho$.

$$\Rightarrow G = \rho_{\text{Öl}} \cdot V \cdot g = \rho_{\text{Öl}} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g \quad (r \text{ ist der Radius des Öltröpfchens})$$

Außerdem wirkt eine bremsende Reibungskraft nach Stokes

$$F_R = 6 \pi \eta_{\text{Luft}} r v \quad (v \text{ die Geschwindigkeit, die sich im Fall einstellt}).$$

Die Kraft, die nun das elektrische Feld auf das Tröpfchen ausübt ist

$$F_E = Q \cdot E = Q \cdot \frac{U}{d} \quad (Q \text{ die Ladung des Tröpfchens, } U \text{ die am Kondensator anliegende Spannung, } d \text{ der Abstand der Platten})$$

Von allen diesen Größen sind der Radius des Tröpfchens r und die Ladung Q unbekannt. Wir müssen also hier zwei Gleichungen aufstellen:

Zwei Kräftebilanzen brauchen wir, damit wir durch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten Q ermitteln können.

Zwei Kräftebilanzen erhalten wir aber nur, wenn wir zwei Versuche machen: Wir suchen uns ein Öltröpfchen aus. Nun schalten wir das Feld ein (das so geschaltet ist, daß die Kraft

die gleiche Richtung wie die Gewichtskraft hat). Das Tröpfchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_1 nach unten. Diese Geschwindigkeit messen wir mittels eines Meßokulars im Mikroskop. Dann schalten wir das Feld um - es hat nun den gleichen Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung. Es erhält eine andere Geschwindigkeit v_2 . Außerdem bestimmen wir noch die Spannung U , die am Kondensator anliegt. Die festen Größen d , $\rho_{\text{Öl}}$, η_{Luft} kennen wir.

Stellen wir beide Kräftebilanzen auf:

$$1) F_R = G + F_E \downarrow \quad \text{und} \quad 2) -F_R = G - F_E \uparrow \quad \text{oder}$$

$$1) \downarrow \quad 6 \pi \eta_{\text{Luft}} r v_1 = \rho_{\text{Öl}} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g + Q \frac{U}{d} \quad \text{und}$$

$$2) \uparrow \quad -6 \pi \eta_{\text{Luft}} r v_2 = \rho_{\text{Öl}} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g - Q \frac{U}{d}$$

es gilt nun

$$1) + 2) : 6 \pi \eta_{\text{Luft}} r (v_1 - v_2) = 2 \rho_{\text{Öl}} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{6 \pi \eta (v_1 - v_2)}{2 \rho_{\text{Öl}} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot g}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{\eta}{\rho_{\text{Öl}} \cdot g} (v_1 - v_2)}$$

$$1) - 2) : +6 \pi \eta_{\text{Luft}} r (v_1 + v_2) = 2 \cdot Q \cdot \frac{U}{d}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{6 \pi \eta \cdot r}{2 \cdot \frac{U}{d}} (v_1 + v_2)$$

also insgesamt, wenn wir r einsetzen:

$$Q = \frac{3 \pi \eta}{U} (v_1 + v_2) \cdot \sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{\eta}{\rho_{\text{Öl}} \cdot g} (v_1 - v_2)} \quad \text{oder auch}$$

$$Q = \sqrt{\frac{81}{4} \cdot \frac{\pi^2 \eta^2 \cdot d^2}{\rho_{\text{Öl}} \cdot g}} \cdot \frac{1}{U} (v_1 + v_2) \cdot \sqrt{v_1 - v_2}$$

In α stecken alle festen Größen drin, gemessen werden v_1 , v_2 und U . Dann erhalten wir die Ladung eines einzelnen Öltröpfchens. Da man Öl sehr fein zerstäuben kann, ergeben sich sehr kleine Tröpfchen. Diese enthalten daher auch sehr kleine Ladungen (oftmals Ladungen von nur wenigen Elementarladungen). Millikan entdeckte nun - nachdem er diesen Versuch an sehr vielen Öltröpfchen durchgeführt hatte, daß sich für Q immer ein ganzes Vielfaches einer bestimmten Ladung ergab. Diese sogenannte Elementarladung bestimmte er zu

$$\| e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \|$$

8. Energie des elektrischen Feldes

a) Energie auf einem geladenen Leiter

Wir laden nun einen geraden Draht auf. Dies - um zu ergründen, welche potentielle Energie ein geladener Leiter trägt. Wieso trägt ein geladener Leiter potentielle Energie ?

Nun - er kann Kräfte auf andere geladenen Leiter ausüben. So muß er auch eine potentielle Energie tragen. Und diese wollen wir nun berechnen.

Wir laden einen Leiter mit der Ladung Q auf - in kleinen Schritten dq .

Irgendwann hat der Leiter die Ladung q erreicht. Somit hat er ein Potential von $U = \frac{q}{C}$ (da $Q \approx C U$). Um gegen dieses Potential (gegen diese Spannung) eine weitere Teilladung dq auf den Leiter zu bringen, müssen wir eine Arbeit aufwenden:

$$dW = U \cdot dq = \frac{q}{C} \cdot dq \quad . \implies \quad \text{Die Gesamtarbeit, um die Ladung}$$

Q auf den Leiter zu bringen ist dann :

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

Und genau das ist auch die potentielle Energie, denn die Arbeit, die wir aufwendeten, um die Ladung Q auf den Leiter zu bringen ist nun auf diesem Leiter gespeichert.

Mit der Spannung (Potential) $U = \frac{Q}{C}$ ergibt sich also für E_{pot}

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} C U^2$$

b) Energie im elektrischen Feld

Unser Leiter hatte die Kapazität C . Diese kennen wir nicht explizit. Wir wollen aber etwas anderes ermitteln, was für uns eine viel größere Bedeutung hat : wie groß ist nun die Energie, die in einem elektrischen Feld drinsteckt ?

Wo erhalten wir ein elektrisches Feld ? Im Plattenkondensator beispielsweise. Wir ermittelten für die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} C U^2. \quad \text{Die Kapazität } C \text{ eines Plattenkondensators}$$

kennen wir allerdings. Sie hing nur von der Geometrie des Kondensators ab. Es gilt

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Und das setzen wir einfach ein :

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} U^2 \quad \text{potentielle Energie, die in einem geladenen Plattenkondensator}$$

steckt. Wo steckt diese Energie aber nun genau ?

Sie steckt im elektrischen Feld. Also gilt für die Potentielle Energie in diesem Feld

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} U^2$$

Wir müssen aber noch die Feldstärke E hier hineinbringen - aber diese hängt ja direkt über $E = \frac{U}{d}$ mit der Spannung zusammen :

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} E^2 \cdot d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A d = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V$$

Also : Ein elektrisches Feld des Volumens V hat die potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V \quad \text{gespeichert.}$$

Oftmals benutzt man aber auch die Energiedichte. Dafür ergibt sich dann :

$$\frac{E_{\text{pot}}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

c) Kirchhoffsche Spannungswaage

Nun noch kurz zur Kraftwirkung im elektrischen Feld. Ändert man bei einem aufgeladenen Kondensator den Plattenabstand, muß man gegen das elektrische Feld eine Kraft aufwenden. Diese wollen wir berechnen und zeigen, wie man somit die Spannung des geladenen Kondensators messen kann :

Der Kondensator hat die Energie (l ist der Plattenabstand)

$$E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{l} U^2 \quad \text{gespeichert. Ändern wir den Plattenabstand}$$

um dl , dann ändert sich seine Energie um dE . Diese Änderung beträgt somit

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dl} &= \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{l} U^2 \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{l^2} U^2 \frac{d}{dl} (l) \\ &= - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{l^2} U^2 \end{aligned}$$

Was ist das aber - wenn man eine Energie nach der Koordinate ableitet : dies ergibt eine Kraft K .

Dies wollen wir kurz anhand der Mechanik überprüfen. Wir zeichnen die x-Achse von unten nach oben. Dann gilt für die potentielle Energie $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot x$. Dies nach x abgeleitet ergibt $= m \cdot g$ - und das ist genau die Kraft, die aus dieser potentiellen Energie erwächst.

Versuchen wir es mit der kinetischen Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dx} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \right)$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2} m \left\{ \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right) \right\} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \left\{ \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right) \right\}$$

$$= m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dx dt} = m \frac{dx}{dx} \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot \ddot{x} = m \cdot a \quad \text{und das ist}$$

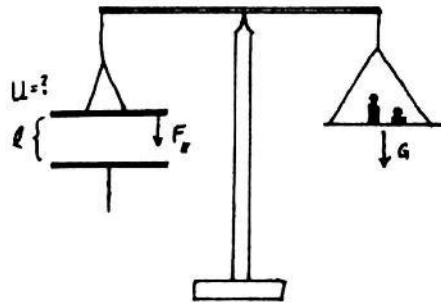
ja nichts anderes als das Newton'sche Gesetz, also ergibt sich

$$\left(\frac{dE}{dx} = m \cdot a = F \right)$$

Und hier beim Kondensator ist es das gleiche. Hier erhalten wir für die Kraft, die zwischen den Kondensatorplatten wirkt

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{l} U^2$$

Konstruieren wir nun eine Waage, wie in der Skizze gezeigt - man nennt so etwas eine **Spannungswaage** - so kann man damit Spannungen messen.



Wir belasten die rechte Waagschale mit Gewichten so lange, bis die Kraft zwischen den linken Kondensatorplatten nicht mehr ausreicht, den Kondensator in Ruhe zu halten. In dem Moment, in dem sich die Kondensatorplatten trennen, sind beide Gewichte, bzw. beide Kräfte gleich:

$$m \cdot g = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{l} U^2 \quad \Rightarrow$$

$U^2 = \frac{2 m g l}{\epsilon_0 A}$. Man kann also die Spannung U, die am Kondensator anliegt durch Messung der mechanischen Größen m, g, l und A bestimmen. So kann man absolut Spannungen messen.

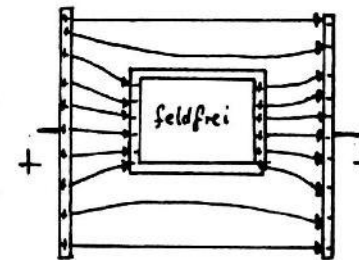
II. DIELEKTRIKA

1. Polarisation

Wir nehmen uns einen Plattenkondensator vor. Bisher haben wir immer vorausgesetzt, daß sich keine Materie, oder höchstens Luft zwischen den Kondensatorplatten befindet. Wie sieht das aber nun aus, wenn wir irgendwelche Materie zwischen die Platten schieben? Ändert sich da was - und wenn ja - warum?

Zuerst einmal bringen wir einen metallischen Hohlkörper (z. B. einen Quader) in den Kondensator - also in ein elektrisches Feld. Was geschieht?

Durch Influenz verschieben sich die frei verschiebbaren Elektronen zur positiven Platte hin. Das heißt, die negativen Ladungen des Hohlkörpers sind der positiven Kondensatorplatte zugewandt, und die positiven Ladungen sind der negativen Platte zugewandt. Wie sieht es dann im Innern des Hohlkörpers aus? Wie wir wissen, streben die Ladungsträger im Hohlkörper dazu, die Ladungen der Platten zu kompensieren. Das heißt, daß nach Möglichkeit auf der einen Seite des Körpers betragsmäßig die gleiche Ladung sitzt, wie auf der zugewandten Kondensatorplatte. Daraus folgt, daß die Feldlinien auf der positiven Platte beginnend bei den negativen Ladungen des Hohlkörpers enden, von den positiven weiter zur negativen Platte verlaufen. Im Innern des Körpers verlaufen somit keine Feldlinien. Er ist **feldfrei**.



Das ist auch unser Glück. Denn auch in unserem Alltag gibt es elektrische Felder, die zum Teil enorme Feldstärken erreichen. Beispielsweise beim Gewitter ergeben sich Felder, die sich schließlich durch starke Entladungen ausgleichen. Fahren wir nun mit einem Auto (metallischer Hohlkörper!) in ein solches Feld hinein (Feld zum Beispiel zwischen einer tiefliegenden Wolke und der Erdoberfläche), so ist das Innere des Wagens **feldfrei**. Das bedeutet aber, daß ein Blitz nicht durch das Innere des Wagens gehen kann. Dort gibt es nichts zum Ausgleichen. Das gleiche gilt natürlich auch für ein Flugzeug.

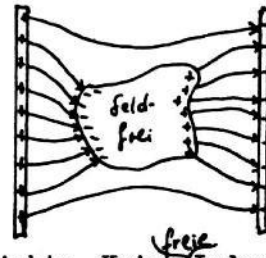
Einen solchen metallischen Hohlkörper, der geeignet ist, elektrische Felder abzuschirmen, nennt man daher auch "Faraday'scher Käfig".

Treiben wir das Spiel weiter. Wir schieben nun einen metallischen Körper in unseren Plattenkondensator, der massiv ist. Was passiert da ?

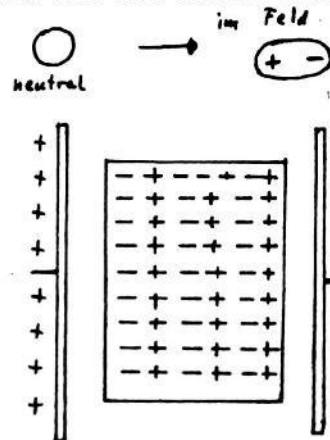
Es passiert genau dasselbe.

Die Ladungen trennen sich - die Elektronen wandern Richtung positive Platte, auf der anderen Seite ergibt sich ein positiver Ladungsüberschuß.

Und in der Mitte ? Dort ist wieder nichts. Keine Ladung - also auch kein Feld. Auch hier ist das Innere feldfrei. Also das gleiche wie vorhin.



Nun aber etwas neues. Wir bringen jetzt einen Isolator in den Kondensator - ein Körper also, der elektrisch nichtleitend ist, der keine frei verschiebbaren Elektronen enthält. Bei einem solchen Stoff (Luft, Glas, Gummi, Wasser etc.) gibt es schon Elektronen. Diese aber sind nicht frei beweglich. Es bestehen zwar alle Moleküle aus positiven und negativen Ladungsträgern. Diese lassen sich aber nicht so einfach trennen wie das bei den Metallen der Fall ist. Im Kondensator nun,



orientieren sich die Moleküle so, daß ihr positiver Teil zur negativen Platte zeigt und umgekehrt.

Insgesamt ergibt sich folgendes Bild : Überall in unserem Nichtleiter bilden sich Dipole.

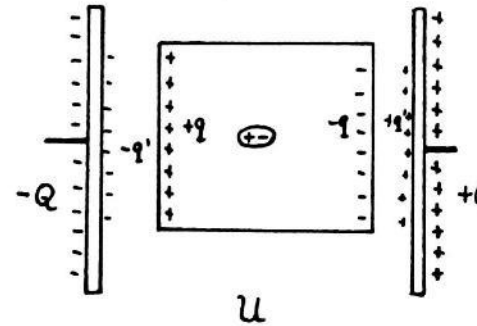
Makroskopisch sieht das so aus : Auf der der positiven Platte zugewandten Seite sitzen mehr negative Ladungen (sie wurden von ihrem Molekül etwas dorthin geschoben) und auf der der negativen Platte zugewand-

ten Seite sitzen mehr positive Ladungen.

Man sagt nun : durch die Verschiebungen wird der Körper polarisiert. Den Körper übrigens (Materie, die in ein elektrisches Feld gebracht wurde) nennt man ein Dielektrikum.

Die Polarisation des Dielektrikums hat aber nun spürbare Auswirkungen auf den Kondensator.

Wir legen an einen Plattenkondensator eine konstante Spannung U an. Es ergeben sich auf den Kondensatorplatten die Ladungen



+ Q und - Q. Auf den beiden Stirnflächen des Dielektrikums bilden sich durch die Polarisierung die Ladungen + q und - q. Und diese beiden zusätzlichen Ladungen beeinflussen in den Platten gleich große aber entgegengesetzte Ladungen -q' und +q'. So kommt also an der positiven Platte zu der Ladung +Q noch die Ladung +q' dazu

Was ändert das ?

Wie wir wissen, bildet sich durch die Ladung Q im leeren Kondensator das elektrische Feld E. Dieses hängt von U, der anliegenden Spannung ab. Diese soll aber konstant gehalten werden. Es ändert sich die Ladung auf den Platten. Diese hängt aber über die Kapazität mit der Spannung zusammen :

$$Q = C \cdot U.$$

Wenn wir nun Q vergrößern und U konstant halten - vergrößert sich auch die Kapazität C.

$$Q + q' = C' \cdot U \quad \text{wobei jetzt } C' > C.$$

Durch das Einbringen eines Dielektrikums in einen Plattenkondensator vergrößert sich die Kapazität.

Wir wissen - ohne Dielektrikum hat ein Plattenkondensator die Kapazität

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad \begin{array}{l} A = \text{Plattenfläche} \\ d = \text{Plattenabstand} \end{array}$$

Mit einem Dielektrikum vergrößert sich C auf C'

$$\text{Wir sagen } C' = \epsilon_r \cdot C ! \quad \epsilon_r \text{ nennt man die relative Dielektrizitätskonstante, die}$$

angibt um welchen Faktor sich die Kapazität erhöht.

Daher gilt jetzt für jeden Plattenkondensator :

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

(für Vakuum, also kein Dielektrikum ist $\epsilon_r = 1$.)

Hier einige ϵ_r : Wasser $\epsilon_r = 81$, Glas $\epsilon_r \approx 5$, Luft $\epsilon_r = 1,00059$.

Man definiert am Plattenkondensator nun eine Flächenladungsdichte

$$D := \frac{Q}{A} \quad \text{d.h. die Ladung pro Plattenfläche.}$$

Genaugenommen handelt es sich aber bei D um einen Vektor, der senkrecht auf den Platten steht. Das bedeutet, daß man schreiben muß

$$\vec{D} = \frac{Q}{A} \cdot \vec{n}_A, \quad \text{wobei } \vec{n}_A \text{ der Normalenvektor auf der Fläche } A \text{ ist.}$$

Durch einfaches Umrechnen sehen wir :

(das einfache Umrechnen erfolgt anschließend in Klammern)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}, \quad \text{und dies gilt auch vektoriell :}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

$$\left(|D| = \frac{Q}{A} = \frac{C \cdot U}{A} = \frac{1}{A} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} U = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{U}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot E \right)$$

Man führt die Größe \vec{D} ein, die erstens parallel zu \vec{E} verläuft und die zweitens so gewählt wurde, daß das ϵ_0 herausfällt.

Wie wir sehen, besteht der Unterschied zwischen \vec{D} und \vec{E} nur in einer Konstanten ϵ_r .

Es hat sich gezeigt, daß es sehr praktisch ist, diese Größe D für elektrische Felder in Materie zu gebrauchen.

Man sieht sofort :

$$D = \frac{Q}{A} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E \implies \text{Die Feldstärke } E \text{ ist der felderzeugenden Ladung } Q \text{ proportional.}$$

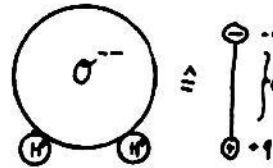
Man nennt die Größe \vec{D} meist Verschiebungsdichte.

Wichtig zu merken ist folgendes :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E} ; \quad |D| = \frac{Q}{A} ; \quad \text{Feldstärke } E \propto \frac{\text{felderzeugende Ladung } Q}{\text{Fläche } A}$$

Nun noch etwas anderes : Wir haben gesehen, daß sich Dielektrika im elektrischen Feld polarisieren, Die positive Ladung wird gegenüber der negativen etwas verschoben. Es bilden sich Dipole aus. Wir betrachten das am Beispiel des Wassers. Wie wir schon gesehen haben hat Wasser eine sehr große relative Dielektrizitätskonstante, nämlich 81. Warum ist das ϵ_r bei Wasser so groß ?

Nun Wasser besteht aus Dipolen. Ein Wassermolekül besteht aus einem Sauerstoff- und zwei Wasserstoffatomen, die in einem



Winkel zueinander angeordnet sind. Man sieht hier an der Zeichnung genau, daß unten mehr positive und oben mehr negative Ladung vorhanden ist. Deshalb kann man auch sagen : beim Wassermolekül haben wir zwei gleich große entgegengesetzte Ladungen, die sich in einem festen Abstand voneinander befinden. Und so etwas ist gerade ein elektrischer Dipol.

Sind jetzt Wassermoleküle als Dielektrikum in einen Kondensator gebracht, so verschieben sich die Ladungen nicht gegeneinander, sondern - viel einfacher - die Dipole richten sich im Feld einfach aus. Es handelt sich hierbei um eine sogenannte Orientierungspolarisation (schon vorhandene Dipole orientieren sich im Feld je nach Feldrichtung) und nicht um die sogenannte Verschiebungspolarisation (das elektrische Feld trennt zwei zusammengehörige ungleichnamige Ladungen etwas und bildet dadurch Dipole). Nun ist es ja klar, daß das ϵ_r etwas mit den Dipolmomenten im Dielektrikum zu tun haben muß : je größer die Dipolmomente, desto "stärker" die Polarisation, desto größer ϵ_r .

Man definiert daher die Polarisation \vec{P} :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

als Dipolmoment auf die Volumeneinheit bezogen !

Außerdem gilt, daß die Polarisation gerade der Unterschied zwischen der Verschiebungsdichte in Materie und der Verschiebungsdichte im Vakuum ist. Das bedeutet aber, daß die Polarisation gerade die von der Materie herrührende Verschiebungsdichte ist. Es gilt :

$$\vec{P} = \vec{D} - \vec{D}_0 = \epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}$$

χ hat den gleichen Sinn wie die relative Dielektrizitätskonstante. Man nennt χ Suszeptibilität und es gilt

$$\chi = \epsilon_r - 1$$

Man kann es einfach so sehen :

$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \cdot \vec{E} \implies$ Die Suszeptibilität gibt den Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und dadurch erzeugter Polarisation an. χ ist also ein Maß für die Polarisierungsfähigkeit eines Stoffes.

Man kann die Zusammenhänge noch etwas deutlicher sehen :

Wir betrachten uns ganz allgemein die Verschiebungsdichte. Es war $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$. Haben wir nun ein Feld in der Materie und Vakuum vorkommen, dann müßte sich die Verschiebungsdichte aufspalten in einen Term für das Vakuum, also $\epsilon_0 \cdot \vec{E}$ und in einen Term, indem die Polarisation \vec{P} vorkommt (dadurch, daß ja $\vec{P} = \vec{D} - \vec{D}_0$ ist, kommt direkt die Polarisation als dieser Term heraus) :

$$D = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E = \epsilon_0 \cdot E(\chi + 1) = \epsilon_0 \cdot E \left(\frac{P}{\epsilon_0 E} + 1 \right) = \frac{\epsilon_0 E P}{\epsilon_0 E} + \epsilon_0 E \quad \text{also}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

Die Verschiebungsdichte teilt sich auf in die elektrische Feldstärke die ohne Materie (ohne Dielektrikum) vorhanden wäre und in die Polarisation, die in der Materie verursacht wird. Wir sehen also, daß die Verschiebungsdichte etwas allgemeiner beschreiben kann als nur die elektrische Feldstärke im Vakuum. Somit fassen wir auch die Energie im elektrischen Feld neu - hier soll nun auch Materie im Feld zugelassen sein.

Wir hatten als Energie in einem Plattenkondensator gehabt :

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \cdot E^2 \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot V$$

also allgemein - elektrische Energie in einem Feld des Volumens V war $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot V$. Wir hatten auch die Energiedichte des Feldes bestimmt (das war einfach die Energie pro Volumen - (daher "Dichte" !!))

$$\frac{E_{\text{pot}}}{V} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2$$

Nun folgendes : Haben wir ein Dielektrikum vorliegen, so ändert sich die Energiedichte. Sie setzt sich dann zusammen aus der üblichen Vakuumenergiedichte

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2$$

und der Gesamtenergie aller Dipole (denn ein Teil der Energie wurde ja für die Polarisation aufgebracht und steckt dort).

Wie groß ist diese Größe ?

Wir nehmen an, wir haben in unserem Dielektrikum n Dipole mit einem Dipolmoment von jeweils m . Jeder Dipol hat die Energie $\frac{1}{2} m \cdot E$, also zusammen $E_{\text{Dipole}} = \frac{1}{2} n m \cdot E = \frac{1}{2} P \cdot E$

Energiedichte im Materieerfüllten Feld =

Energiedichte im Vakuum + Energie aller Dipole

$$\text{also } \frac{E_{\text{pot}}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} P E$$

$$= \frac{1}{2} E (\epsilon_0 E + P) = \frac{1}{2} E \cdot D$$

Aha ! Ganz allgemein gilt also für die Energiedichte in irgendeinem elektrischen Feld

$$\frac{E_{\text{pot}}}{V} = \frac{1}{2} E \cdot D$$

und in D steckt eben der Term drin, der für die Energie durch die Existenz von Materie steht.

2. Piezoelektrizität

Es gibt einige Kristalle (z.B. Turmalin, Quarz), die man durch äußeren mechanischen Druck elektrisch polarisieren kann. Das kommt daher, daß man durch den Druck den Kristall etwas deformiert - die Abstände zwischen Ladungen ändern sich, also ändern sich auch vorhandene Dipolmomente und daraus ergibt sich eine Polarisationsänderung. Dies kann man nun vielfach ausnutzen.

Z.B. kennt jeder die Feuerzeuge, die keinen Feuerstein mehr enthalten. Sie enthalten dafür einen kleinen Piezoquarz, der durch Druck auf den Knopf verformt und polarisiert wird. Die entstandene Spannung wird zur Entladung gebracht. Der Funke schließlich zündet das Gas-Luft-Gemisch.

Ein anderes Beispiel sind die Schwingquarze. Man kann elektrische Schwingungen erzeugen (dazu kommen wir noch genau). Mit diesen Schwingungen regt man den Quarz auch zum elektrischen Schwingen an. Dazu sucht man seine Resonanzfrequenz, in der der Quarz genau antwortet. Der Quarz kann aber immer nur in seiner Resonanzfrequenz schwingen - auch wenn die Anregungsfrequenz mal nicht so genau stimmt. Solche Quarze werden daher in der Hochfrequenztechnik als Stabilisatoren verwendet.

III. GLEICHSTROM

1. Stromstärke

Zunächst einmal zu der fast klassischen Frage :

Was ist Strom ?

Erstens handelt es sich hier um den elektrischen Strom, von dem wir hier reden wollen. Also präzisieren wir unsere Frage Was ist elektrischer Strom ? Das Wort Strom sagt uns, daß hier irgend etwas strömt. Gut - aber was ?

Wir haben ja schon davon gesprochen, was man unter elektrischen Leitern versteht. Zum Beispiel sind Metalle sehr gute Leiter. Dort gibt es frei bewegliche Elektronen, die strömen können. Nehmen wir folgendes Beispiel :

Wir legen an ein Stück Metall ein elektrisches Feld so an, daß die Elektronen gezwungen sind, sich entlang der elektrischen Feldlinien zum positiven Pol des Feldes hin zu bewegen.

Sie fließen also - sie strömen. Man sagt dann : durch den Leiter (das Stück Metall) fließt ein Strom. Können nur Elektronen zur Stromleitung beitragen ? Nein - auch positive Ladungsträger können einen Stromfluß bilden, oder auch Ionen - wichtig ist vor allem, daß Ladungen, die sich bewegen, einen elektrischen Stromfluß oder einfach einen Strom darstellen.

Wir können somit auch eine Stromstärke definieren. Was könnte das sein ? Wahrscheinlich steckt dort die Zahl der Ladungsträger, die fließen, oder auch die Ladungsmenge drin. Außerdem muß die Zeit auftauchen. Eine Stromstärke ist also dann wohl die Ladungsmenge Q pro Zeit t - stimmt.

Definition :

Die Stromstärke I ist die Ladungsmenge Q , die pro Zeit t durch einen Leiterquerschnitt hindurchtritt.

also $I = \frac{Q}{t}$
 $I = \frac{dQ}{dt}$

falls nun aber der Strom zeitlich veränderlich sein kann, dann gilt exakt

mit der Einheit $[I] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Sekunde}} = \text{Ampère (A)}$

Die Einheit Ampère gehört neben dem Meter, dem Kilogramm und der Sekunde zu den sogenannten Basiseinheiten, aus denen alle

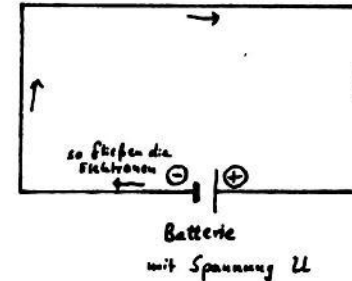
anderen Einheiten abgeleitet werden können.

Nun bauen wir uns einmal einen Stromkreis auf.

Wann fließt denn Strom ?

Nur dann, wenn zwischen Anfang und Ende des Leiters eine Potentialdifferenz, also eine Spannung besteht. Wir wählen uns nun als Leiter einen Draht mit konstantem Querschnitt.

Nun brauchen wir noch etwas, was uns die Spannung erzeugt. So etwas nennt man Batterie - was das ist und wie das funktioniert kommt etwas später - wir nehmen jetzt nur an, zwischen den Polen unserer Batterie



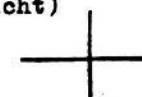
liege eine konstant bleibende Potentialdifferenz, also Spannung an. Diese Differenz bleibt konstant. In Betrag und Richtung. Bei uns hier fließen die Elektronen nur vom negativen zum positiven Pol. Die Stromrichtung bleibt unverändert. Wir nennen das Gleichstrom. Um den geht es jetzt hier in diesem Kapitel. Später werden wir noch vom Wechselstrom sprechen, bei dem die Stromrichtung mit einer ganz bestimmten Frequenz wechselt. Die Zeichnung oben nennen wir einen Gleichstromkreis. Nur wenn der Kreis geschlossen ist kann Strom fließen. Die Elektronen fließen vom \ominus zum \oplus -Pol. Allerdings ist die technische Stromrichtung gerade andersherum definiert; nämlich von Plus nach Minus. Das hat historische Gründe (früher, so vor 200 Jahren wußte man es halt noch nicht besser).

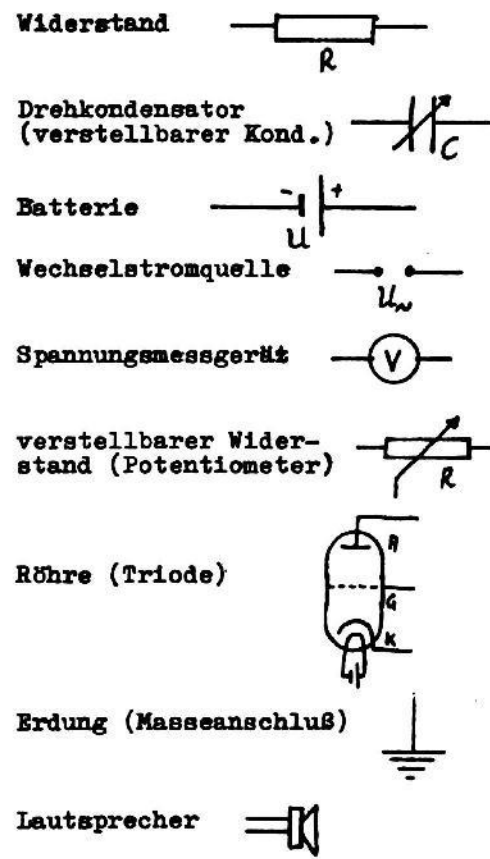
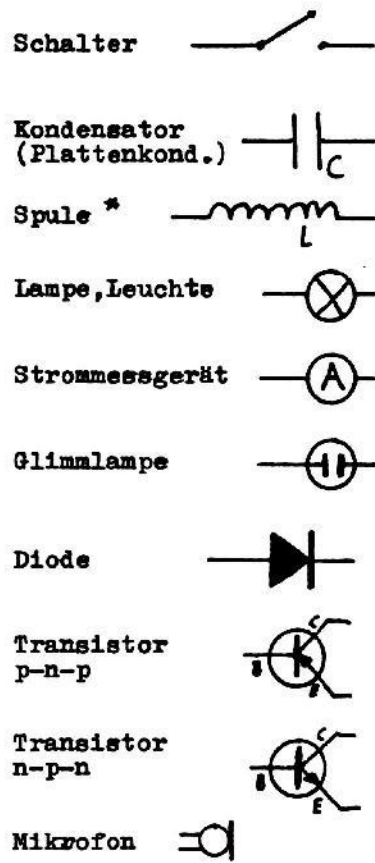
Zeichnet man solche Stromkreise, so bedient man sich in der Technik sogenannter Schaltssymbole. Ich will hier ganz kurz einige davon hinzeichnen. Wir brauchen sie später alle - und damit dann keiner sich über unverständliche Hieroglyphen wundert seien sie hier schon einmal aufgelistet. Was manche Bauteile im Einzelnen sind, wird dann später erklärt.

einfacher Leiter :

sich kreuzende Leiter (sie beführen sich nicht)

sich kreuzende Leiter mit elektr. Verbindung



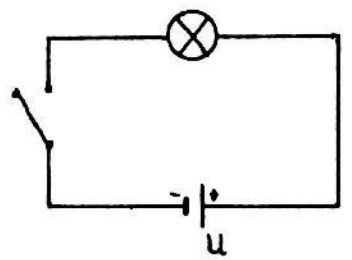


2. Elektrischer Widerstand

Bisher sprachen wir von Metallen als von Leitern. Dort befinden sich Elektronen, die sich im Metallgefüge ziemlich frei bewegen können. Sie dienen somit der Stromleitung. Es gibt aber auch Stoffe, bei denen die Ionen so fest an das Material gebunden sind, daß nur sehr hohe Spannungen, also nur sehr starke Felder ausreichen, um Elektronen dort abzulösen und zu bewegen. Solche Stoffe, die also praktisch keinen Strom leiten, nennt man Nichtleiter oder Isolatoren.

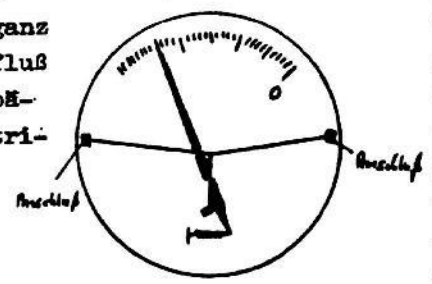
Es gibt Meßgeräte, mit denen man bei einem Stromkreis Stromstärke und Spannung messen kann. Wie funktionieren solche Geräte? Zunächst einmal sind für deren Funktion die Wirkungen des elektrischen Stromes maßgebend. Wenn Strom durch einen Leiter fließt, dann wird dieser Leiter warm. Dies ist die Wärmewirkung des elektrischen Stromes. Es gibt noch eine chemische und eine magnetische Wirkung des Stromes, aber dazu später. Kennen wir alle die Auswirkungen, die ein Stromfluß hat, können wir eine Vielzahl von Meßinstrumenten bauen. Dazu kommen wir aber erst später - wenn wir den Magnetismus allgemein besprechen, werden wir dann genau auf die Meßgeräte eingehen. Jetzt aber brauchen wir - um einige Gesetzmäßigkeiten im Stromkreis zu erforschen - ein Meßgerät. Es gibt deren in jedem Elektrogeschäft viele; wir kaufen uns eines und kümmern uns zunächst noch nicht darum, wie es funktioniert.

Hier ein kleines Beispiel für einen Stromkreis



Die Elektronen fließen von der Batterie über einen Schalter zur Lampe. Eine solche besteht aus einem Glas Kolben, der mit Edelgasen gefüllt ist. Im Kolben befindet sich ein ganz dünner Draht, der bei Stromdurchfluß glüht (warum - sehen wir etwas später bei der Besprechung des elektrischen Widerstandes).

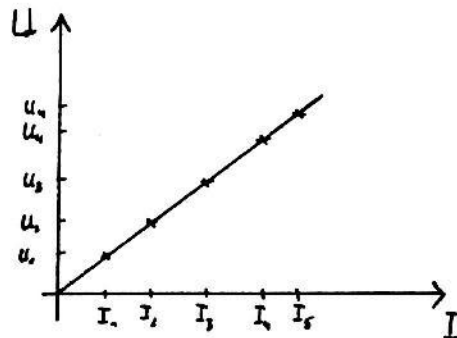
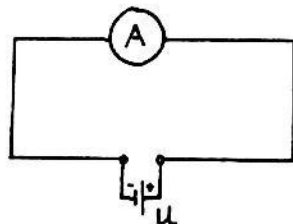
Damit wir aber nicht so ganz in der Luft hängen, sehen wir uns ein Meßinstrument an, das jetzt schon einfach zu verstehen ist. Es handelt sich dabei um das sogenannte Hitzdrahtinstrument.



Der zu messende Strom geht durch einen dünnen Draht. Dieser erwärmt sich - und zwar: je größer die Stromstärke, desto stärker erwärmt er sich. Durch die Erwärmung dehnt sich der Draht aus (diese Eigenschaften zeigen alle Stoffe, wie wir in der Wärmelehre noch erfahren werden) und diese Ausdehnung kann man auf einen Zeiger übertragen, an dessen geeichter Skala man dann die Stromstärke ablesen kann.

* neuerdings:

Jetzt machen wir einen Versuch. Wir bauen uns einen Stromkreis auf. Durch Anbringen verschiedener Stromquellen (also verschiedener Spannungen) verändern wir die Spannung in unserem Stromkreis. Zu jeder Spannung messen wir mit einem Meßgerät die fließende Stromstärke. Beides tragen wir in ein Diagramm ein :



Was erkennen wir ?

Der Anstieg ist linear. Das heißt, Spannung und Stromstärke sind einander proportional.

$U \sim I$ oder auch

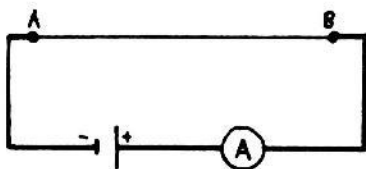
$$U = R I$$

Was ist nun dieses R ? Je größer dieses R ist, desto mehr Widerstand setzt das Material dem Strom entgegen. Deshalb bezeichnet man das R auch als elektrischen Widerstand.

Die Beziehung $U = R I$ nennt man Ohmsches Gesetz.

Wie hängt nun der Widerstand eines Stoffes von seinen Materialeigenschaften und seinen Abmessungen ab ?

Wir schalten uns wieder einen Stromkreis. Zwischen den Punkten



A und B bringen wir nun ganz verschiedene Leiterstücke an. Sie sollen sich in Länge, Querschnitt und Material unterscheiden. U lassen wir nun konstant und I messen wir. Daraus ergibt

sich $R = \frac{U}{I}$. Wir messen also den Widerstand. Wenn wir die anderen Leiter (zwischen + - Pol der Batterie und A und zwischen - Pol und B) genügend dick und kurz wählen, messen wir praktisch nur den Widerstand des Probeleiters.

Was stellen wir dabei fest ?

Wir werden sehen: Je größer der Leiterquerschnitt, desto kleiner der Widerstand. Je länger der Draht, desto größer der Widerstand - und verschiedene Materialien ergeben verschiedene Wider-

stände. Also : Länge $l \sim R$, $R \sim \frac{1}{A}$ (A = Leiterquerschnitt)

Insgesamt : $R \sim \frac{l}{A}$ oder $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ ρ = spez. Widerstand

ρ ist dann abhängig vom benutzten Material. Es ist eine stoffspezifische Konstante. Wir nennen sie daher spezifischer Widerstand.

Kurz zu den Einheiten :

$$\text{Einheit des Widerstandes ist } [R = \frac{U}{I}] = \frac{V}{A} = \Omega = \text{Ohm}$$

Den Kehrwert des elektrischen Widerstandes bezeichnet man als Leitwert mit der Einheit $\frac{A}{V} = \frac{1}{\Omega} = \text{Siemens (S)}$

Wie sieht dann die Einheit des spezifischen Widerstandes aus?

$$[\rho = \frac{A \cdot R}{l}] = \frac{m^2 \cdot \Omega}{m} = \Omega m$$

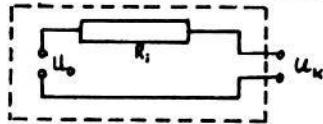
Es zeigt sich nun, daß der spezifische Widerstand auch temperaturabhängig ist. Hier einige ρ -Werte bei 20°C :

Material	ρ (Ωm)
Silber	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Kupfer	$1,7 \cdot 10^{-8}$
Gold	$2,3 \cdot 10^{-8}$
Aluminium	$2,7 \cdot 10^{-8}$
Eisen	$9 - 15 \cdot 10^{-8}$
Kohle	$50 - 100 \cdot 10^{-8}$
Konstantan	$50 \cdot 10^{-8}$
H ₂ O (dest.)	$2 \cdot 10^5$
Glas, Porzellan	10^{12}
Kunststoffe	10^{13}

Wir sehen hier, daß destilliertes Wasser einen sehr großen spezifischen Widerstand hat, also kaum noch Strom leitet. Und die Isolatoren haben spezifische Widerstände in der Größenordnung $10^{12} \Omega m$. Ein Stoff leitet also umso besser, je kleiner sein ρ ist. Aus diesem Grunde hat man auch die Größe

$\sigma = \frac{1}{\rho}$ (spezifische elektrische Leitfähigkeit) eingeführt, die die Einheit $\frac{1}{\Omega m}$ oder $\frac{S}{m}$ hat.

Wollen wir kurz noch bei der Spannungsquelle bleiben. Fließt in einem Stromkreis kein Strom, so liegt an der Spannungsquelle (Batterie) eine ganz bestimmte Spannung an. Es ist dies die sogenannte Ursprungsspannung U_0 . Wenn man nun einen Verbraucher (Lampe, Widerstand etc.) anschließt, kann es passieren, daß dieser schneller Ladungen durchläßt, als die Spannungsquelle an die Pole zu bringen vermag. Daraufhin sinkt die Spannung an den Polen. Diese bezeichnet man dann als die Klemmenspannung U_k . Man kann das einfach so plausibel machen, als hätte die Spannungsquelle einen Innenwiderstand R_i . Hier das Ersatzschaltbild:



3. Kirchhoff'sche Gesetze

Es gibt einige Regeln, mit deren Hilfe man Spannungen und Ströme in verzweigten Stromkreisen berechnen kann. Es sind dies die Kirchhoffschen Gesetze:

1. Knotenregel: An jedem Verzweigungspunkt (Knoten) mehrerer Leiter ist die Summe der auf ihn zufließenden Ströme gleich der Summe der von ihm abfließenden.
2. Maschenregel: In jedem Stromkreis (Masche) ist die Summe aller Spannungen der enthaltenen Spannungsquellen gleich der Summe aller Spannungsabfälle an den Bauteilen (Vorzeichen beachten).

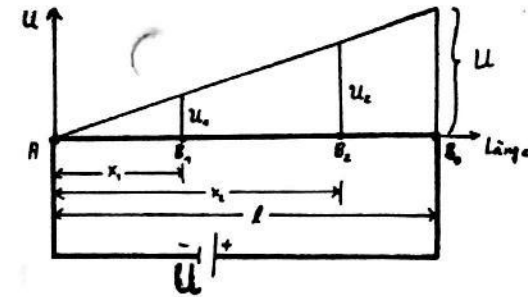
Zunächst: Was ist ein Spannungsabfall?

Es ist dies kein Elektromüll, sondern folgendes:

Fließt durch ein Leiter mit dem Widerstand R der Strom I , so fällt an diesem Leiterstück die Spannung U ab. Genauer:

Der Widerstand R eines Drahtstückes der Länge x verhält sich zum Widerstand R_0 des gesamten Drahtes (Länge l) wie

$$\frac{R}{R_0} = \frac{x}{l}$$



Mißt man nun die Spannung zwischen den Punkten A und B_0 , dann erhält man die ursprüngliche Spannung U .

Mißt man aber zwischen A und B_1 , erhält man als Spannung

$$U_1 = U \cdot \frac{x_1}{l}, \text{ zwischen A und } B_2 : U_2 = U \cdot \frac{x_2}{l}$$

Zwischen A und B_0 fällt die Spannung U ab,

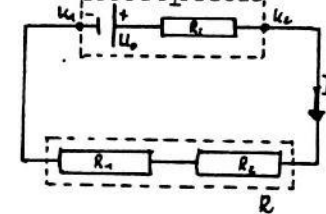
zwischen A und B_1 fällt U_1 und zwischen A und B_2 fällt U_2 ab.

Und so fort.

Hier wollen wir nun diese beiden Regeln einmal auf mehrere Kreise anwenden:

1. Zwei hintereinandergeschaltete Widerstände:

Die Spannungsquelle habe die Ursprungsspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i :



Nach dem 2. Kirchhoff'schen Gesetz gilt: Summe aller Spannungen (dies ist hier gerade U_0) ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle. Wo fallen hier Spannungen ab? Über R_1 , R_1 und R_2 .

Also gilt:

$$U_0 = I_0 R_i + I_0 R_1 + I_0 R_2$$

Wählen wir statt der beiden Widerstände R_1 und R_2 nur einen Widerstand R , so erhalten wir stattdessen:

$$U_0 = I_0 R_i + I_0 R$$

Links steht in beiden Gleichungen U_0 , also muß die rechte Seite auch bei beiden gleich sein. Daraus folgt:

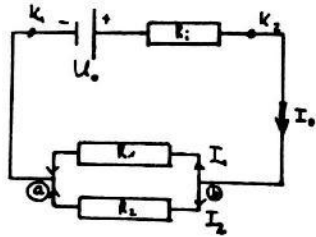
$$R = R_1 + R_2 \text{ oder}$$

Bei hintereinandergeschalteten Widerständen ist der Gesamtwiderstand gleich der Summe der Einzelwiderstände.

2. Zwei parallelgeschaltete Widerstände:

Wir wollen nun sehen, wie groß der Gesamtwiderstand zweier

parallel geschalteter Widerstände ist, und wir bedienen uns dazu auch der Kirchhoff'schen Regeln. Zunächst zum Stromkreis :



Nach dem ersten Kirchhoff'schen Gesetz gilt für die beiden Knoten \textcircled{a} und \textcircled{b} $I_0 = I_1 + I_2$

Wir haben hier zwei Teilstromkreise, die beide geschlossen sind :

$$K_1 - a - R_1 - b - K_2 \quad \text{und}$$

$$K_1 - a - R_2 - b - K_2 . \text{ Wenden wir}$$

auf beide das 2. Kirchhoff'sche Gesetz an, erhalten wir

$U_0 = I_0 R_1 + I_1 R_1$ und $U_0 = I_0 R_1 + I_2 R_2$. Wenn wir nun den Gesamtstrom zwischen den Punkten \textcircled{a} und \textcircled{b} mit R bezeichnen, gilt $U_0 = I_0 R_1 + I_0 R$. Durch Vergleich der drei Beziehungen ergibt sich :

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_0 R$$

also folgt $I_1 = I_0 \cdot \frac{R}{R_1}$ und $I_2 = I_0 \cdot \frac{R}{R_2}$ und mit $I_0 = I_1 + I_2$

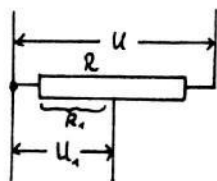
erhalten wir $I_0 = I_0 \cdot \frac{R}{R_1} + I_0 \cdot \frac{R}{R_2}$ bzw. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Es gilt also für den Gesamtstrom R aus zwei parallel geschalteten Einzelwiderständen R_1 und R_2 :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

3. Spannungsteiler

Man kann Widerstände konstruieren, die man regeln kann. z.B. Man nimmt eine Spule mit feinem Draht. Dann kann man am Ende der Spule und irgendwo zwischendrin mit einem Schieber einen ganz bestimmten Widerstand abgreifen :



Man schaltet so etwas oft als Spannungsteiler. Nehmen wir an, wir hätten eine Gleichspannungsquelle, deren Spannung U uns zu groß ist. Was tun ?

Wir legen ihr parallel solch ein Schiebewiderstand (die gesamte Spule habe den Widerstand R , das Spulenstück auf der linken Seite habe den Widerstand R_1 . Dann gilt :

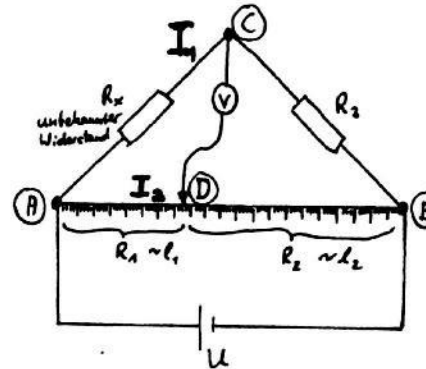
es verhält sich U_1 zu U wie R_1 zu R oder

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R} \implies U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R}$$

Wir können also hier durch die Wahl von R_1 eine ganz bestimmte Spannung U_1 erhalten.

4. Wheatstonesche Brücke :

Das Problem : wir wollen einen unbekanntem Widerstand bestimmen. Dies können wir tun, indem wir ihn mit einem bekannten Widerstand vergleichen :



Wir benutzen dazu die sogenannte Wheatstone'sche Brückenschaltung

Sie besteht aus zwei Stromkreisen A-C-D und D-B-C. Zwischen Punkt C und Punkt D liegt ein Meßgerät. An dem Schieberegler D wird nun so lange geschoben, bis das Meßgerät Null anzeigt. Nun liegt also zwischen C und D keine Spannung mehr. Die Spannung U_0 wurde jetzt aufgeteilt in U_{AD} und in U_{BD} . Dann

ist $U_{AC} = U_{AD}$ und $U_{BC} = U_{BD}$. Wie groß sind nun diese vier

Spannungen ? $U_{AC} = I_1 R_x$ und $U_{BC} = I_1 R_3$; weiterhin

$U_{AD} = I_2 R_1$ und $U_{BD} = I_2 R_2$. Also folgt

$$I_1 R_x = I_2 R_1 \quad \text{und} \quad I_1 R_3 = I_2 R_2$$

Dividieren wir beide Gleichungen :

$$\implies \frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2} \implies R_x = R_3 \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

Nun kennen wir aber R_1 und R_2 nicht explizit. Was also tun ? Wir verwenden einfach zwischen den Punkten A und B einen Widerstandsdraht, der überall gleichen Querschnitt hat. Dann gilt ja : $R \sim l$, also der Widerstand des Drahtes ist proportional zu seiner Länge. Somit gilt für das Verhältnis

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{und das können wir einfach messen. Unser un-}$$

bekannter Widerstand hat also dann die Größe

$$R_x = \frac{l_1}{l_2} R_3 \cdot l_2 \quad \text{und } l_2 \text{ messen wir ab und } R_3 \text{ ist bekannt.}$$

4. Energie und Leistung des Stromes

Wenn wir zu Hause eine Lampe einschalten, so brennt ihre Glühbirne - wenn sie in Ordnung ist und wenn wir nicht vom Elektrizitätswerk den Strom gesperrt bekommen.

Wenn sie brennt - das gilt natürlich für alle eingeschalteten Stromverbraucher - verbrauchen wir Strom und dafür müssen wir bezahlen. Das ist ganz klar. Nun hängt aber der Preis dafür davon ab, wieviel Strom wir in einem bestimmten Zeitraum verbraucht haben. Wir müssen also irgendwie die Menge des Stromes messen können.

Wie viele vielleicht wissen, bezahlt man die verbrauchten Kilowattstunden. Was ist das ?

Eine Stromstärke I fließt durch einen Verbraucher. Das kann eine Glühbirne sein, eine Heizung oder sonst etwas. Auf jeden Fall wird, wenn I durch den Verbraucher fließt, elektrischer Strom in eine andere Energie umgewandelt (Wärme, Licht, mechanische Energie beim Elektromotor usw.). Es fragt sich hier also, um was für eine Energie es sich beim elektrischen Strom handelt. Wir müssen nun hier eine Energie für den Strom definieren.

Wir sagen :

Wenn durch einen Widerstand von $R = 1 \Omega$ ein Strom von $I = 1 \text{ A}$ genau für $t = 1 \text{ sec}$ fließt, an dem die Spannung $U = 1 \text{ V}$ anliegt, wird die Arbeit von 1 Joule umgesetzt. Wieso ?

Wir gehen davon aus, was wir kennen, von Ladungen :

Wird eine Ladung Q zwischen zwei Punkten a und b (zwischen denen die Potentialdifferenz U liegt) verschoben, so wird die Arbeit $W_{ab} = Q U$ verrichtet. Da

$$W_{ab} = \int_a^b Q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \cdot U$$

Verbindet man a und b durch einen

Leiter, so fließt darin der Strom I und in der Zeit t strömt die Ladungsmenge $Q = I \cdot t$ durch den Leiter.

Wenn man von a nach b die Ladung Q verschiebt, so steckt man die potentielle Energie $W = Q \cdot U$ hinein. Fließt nun die Ladung als Strom wieder von b nach a zurück, wird diese Arbeit QU wieder freigesetzt und kann in andere Energieformen verwandelt werden. Also ist die Energie des elektrischen Stromes :

$$W = U \cdot I \cdot t = \frac{U^2 \cdot t}{R}, \text{ die Einheit } [W] = V \cdot A \cdot \text{sec} = \text{Wattsekunde} = \text{Joule}$$

also gilt auch : 1 Kilowattstunde = $3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$

Noch kurz ein Wort zur Leistung des elektrischen Stromes.

Wir wissen ja, daß die Leistung Arbeit pro geleisteter Zeit ist.

Also hier bei uns gilt

$$\text{Leistung} = N = U \cdot I = \frac{U^2}{R}$$

Die Einheit :

$$[N] = V \cdot A = W$$

Eine Umrechnung dazu : 1 PS = 0,736 kW

IV. STROMLEITUNG

Nicht nur in Metallen kann eine Stromleitung erfolgen. Auch in Flüssigkeiten, sogar in Gasen gibt es Stromleitung. Außerdem gibt es unter den Festkörpern nicht nur Leiter (Metalle) und Nichtleiter (Isolatoren) sondern auch sogenannte Halbleiter, die in der Technik eine Revolution auslösten. Alle diese Stromleitungsmechanismen wollen wir hier in diesem Kapitel kennenlernen.

1. Stromleitung in Metallen

Wir wollen uns noch einmal vergegenwärtigen, was unter metallischen Leitern zu verstehen ist. Betrachten wir beispielsweise ein Stück Kupfer. Ein einzelnes Kupferatom besteht aus einem Atomkern mit 29 Protonen, 34 bzw. 36 Neutronen (es gibt mehrere sogenannte Isotope, die sich lediglich in der Neutronenzahl unterscheiden; das Cu-Atom mit 34 oder 36 Neutronen ist stabil) und mit 29 Elektronen. Verbinden sich nun mehrere Kupferatome miteinander zu einem festen Kristallverband (Metallgefüge), so gibt jedes Cu-Atom sein äußerstes Elektron her. Haben wir schließlich ein großes Stück Kupfer vorliegen, so befinden sich darin so viele Elektronen in relativ freiem

Zustand, wie Cu-Atome vorhanden sind. In diesem Metall können sich die Elektronen, die alle zusammen zu allen Atomen gehören (von denen man aber nicht mehr im Einzelnen weiß, welches Elektron ursprünglich von welchem Atom kam) ziemlich frei bewegen. Das erklärt die gute elektrische Leitfähigkeit (ebenso auch die gute Wärmeleitfähigkeit, zu der wir aber noch kommen) - denn dies hängt mit der guten Beweglichkeit der Elektronen zusammen. Nun aber - woher weiß man das ?

Es gibt dazu einen Versuch : Läßt man einen langen Metallstab (der vertikal gehalten wird) los und läßt ihn nach unten fallen, so kann man feststellen, daß der Stab (obwohl vorher elektrisch neutral) plötzlich oben negativ und unten positiv geladen ist. Dies kommt daher, daß die Elektronen gut gegenüber dem Metallgitter beweglich sind und daß sie infolge der Trägheit ihrer Masse bei einer Bewegung des Stabes nach unten, dieser Bewegung nach oben ausweichen. Der Erfolg ist der, daß oben vielmehr Elektronen sind als unten. Also ist der Stab oben negativ, unten positiv aufgeladen. Kommt der Stab wieder zur Ruhe, gleichen sich die unterschiedlichen Ladungsüberschüsse wieder aus - die Elektronen verteilen sich (bedingt durch ihre Wärmebewegung) wieder gleichmäßig im Metall - es ist wieder elektrisch neutral.

Der Versuch kann wesentlich wirkungsvoller mit Hilfe der Zentrifugalkraft gemacht werden. Dort kann man auch die verschiedenen Ladungen messen und gelangt dabei zu dem Ergebnis, daß die Metallelektronen im Metallverband sich annähernd so verhalten, wie Gasatome in einem fest umschlossenen Gefäß.

2. Stromleitung in Halbleitern

Erst einmal - was sind Halbleiter ? Es sind dies Stoffe, bei denen einzelne Elektronen zur Stromleitung zur Verfügung stehen. Dies wollen wir uns im einzelnen betrachten. Ich verzichte hier auf eine exakte Darstellung des sogenannten Bändermodells, sondern beschränke mich nur darauf, rein qualitativ das Wesen der Eigen- und der Fremdleitung darzulegen. So, daß anschließend die Funktionsweisen von Dioden, Transistoren und integrierten Schaltkreisen (IC's) verstanden werden können.

a) Eigenleitung

Bei bestimmten Stoffen (z.B. Germanium (Ge) und Silizium (Si)), die als Kristallgefüge auftreten, sind die Valenzelektronen (das sind die Elektronen, die zur Bindung mit anderen Atomen beitragen) relativ locker gebunden - aber bei weitem nicht so frei, wie bei den Metallen. Bei den Halbleitern muß man schon einige Energie zuführen, um die locker gebundenen Elektronen ihren Atomen zu entreißen, und sie somit zur Stromleitung beitragen zu lassen. Haben wir einen vollkommen reinen Kristall vorliegen (Ge oder Si), so gibt es dort keine freien Elektronen, also auch keine Stromleitung. Wir haben einen Isolator. Wenn wir diesen Kristall nun erwärmen, so verstärken wir die Molekularbewegung; durch die Wärmeenergie werden manche Valenzelektronen befreit, und der Stoff wird (zwar wenig) leitend. Erwärmen wir weiter, nimmt die Leitfähigkeit zu. Dies ganz im Gegensatz zu den Metallen, bei denen eine Erwärmung zu größerem elektrischen Widerstand, mithin zu verkleinerter Leitfähigkeit führt. Die Stromleitung im Halbleiter (im reinen Kristall), die überhaupt erst bei hohen Temperaturen spürbar wird, nennt man Eigenleitung.

b) Fremdleitung

Im allgemeinen gibt es keine reinen Kristalle. Sie sind immer durch Störstellen verunreinigt. Das können Fehlstellen sein (einige Atomplätze bleiben frei), es können ^{sich} aber auch sogenannte Zwischengitteratome eingeschlichen haben. Außerdem ist es so, daß ein Kristall immer durch irgendetwas Fremdatome verschmutzt ist. Nehmen wir nun einmal an, wir hätten als Halbleiter einen Ge-Kristall (Ge ist vierwertig, enthält also pro Atom vier Valenzelektronen). In diesen ist nun bei seiner Entstehung ein Arsenatom hineingeraten. Es wurde in den Kristall so eingebaut, als sei es ein Ge-Atom. Nun ist aber As fünfwertig - es hat also fünf Valenzelektronen. Das heißt, da es zur Bindung nur vier benötigt - ein Elektron ist frei. Was passiert damit ? Durch seine Bewegung und seine kinetische Energie (die jedes Teilchen auf Grund seiner Wärmebewegung hat) bewegt sich das freie Elektron weiter und ersetzt ein gebun-

denes Elektron seines Nachbaratoms. Dieses wird frei und tauscht nun wieder mit einem Nachbarlektron. So wandert also Ladung von einem Atom zum anderen (ohne daß Materie transportiert wird) - es liegt also eine Stromleitung vor.

Auch bei der Eigenleitung geht der Mechanismus so, daß ein Elektron immer nur bis zum nächsten Atom wandert und dort mit einem festen Elektron die Rolle tauscht.

Egal, ob ein Germanium-Kristall durch Zufall Arsen-Atome enthält, oder ob er sie durch einen Trick eingepflegt bekam, sprechen wir davon, daß der Germanium-Kristall mit Arsen-Atomen dotiert ist. Haben wir einen Kristall, der nur mit solchen Atomen dotiert ist, bei denen die Valenzelektronenzahl größer als die des Kristalls ist, so nennen wir die eingeschlossenen Fremdatome Donatoren (Elektronenspender, da sie Elektronen zu viel haben und sie zur Leitung zur Verfügung stellen). Ein Kristall, daß nur mit Donatoren dotiert ist (z.B. As in Ge oder P in Si) nennt man (da hier negative Ladungen zum Leitungstransport beitragen) n-Leiter.

Es gibt allerdings auch Fälle, bei denen die eingeschlossenen Fremdatome weniger Valenzelektronen haben als die Kristallatome. Was passiert dann? Ein Elektron eines Nachbaratoms springt in die Lücke (die sich durch das fehlende Valenzelektron gebildet hat) und bildet somit ebenfalls eine Lücke. Dorthin springt nun ein wieder anderes Elektron usw. Die Lücke oder das Loch "bewegt" sich durch den Kristall. Was aber ist eine Elektronenfehlstelle? - ein positiver Ladungsträger! Insgesamt sieht es also so aus, als ob sich positive Ladungsträger durch das Kristall bewegen, wir haben also eine positive Stromleitung vorliegen. Die Fremdatome (denen ein Elektron fehlt) nennt man Akzeptoren (= Elektronenfänger, sie nehmen aus der Umgebung Elektronen auf). Das Kristall, das nur mit Akzeptoren dotiert ist heißt (z.B. B in Si oder Ga in Ge) aufgrund der Leitung durch positive Ladungsträger (Löcherleitung) p-Leiter.

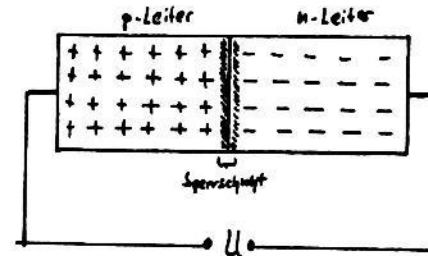
Industriell kann man p-Leiter und n-Leiter ganz nach Wunsch fast beliebig klein herstellen. Durch bestimmte Anordnungen von p- und n-Leitern kann man Bauelemente schaffen, die heute in der modernen Elektronik lebensnotwendig sind.

Die ganze Computertechnologie ist ohne Halbleiter nicht denkbar. Ebenso ist es der Herstellungsweise von Halbleitern zu verdanken, daß die Bauelemente immer kleiner werden.

c) Diode

Noch einmal kurz zur Leitung im Halbleiter: wenn wir einen Halbleiter einem elektrischen Feld aussetzen, beginnt die Eigen- oder Fremdleitung (meist beides).

Wir wollen nun einmal mehrere Halbleiter verschiedener Art miteinander kombinieren. Wir nehmen einen n-Leiter und einen

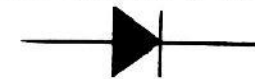


p-Leiter. Diese lassen wir auf einer Seite einander berühren. Auf der anderen Seite befestigen wir jeweils einen metallischen Leiter. Die Schicht zwischen beiden nennt man Grenzschicht. Dort kommt es zum Ladungsausgleich

(einige Elektronen des n-Leiters springen in einige Löcher des p-Leiters hinein).

Diese Sperrschicht ist ohne äußere Spannung etwa 10^{-5} cm breit. Legt man nun an den p-Leiter eine positive und an den n-Leiter eine negative Spannung an, so wird diese Sperrschicht größer. Dies deshalb, weil dem p-Leiter noch weitere positive Ladungsträger und dem n-Leiter noch weitere negative Ladungsträger zugeführt werden. Beide Arten wandern durch ihren Leiter und treffen sich teilweise unter Neutralisation an der Sperrschicht. Legt man allerdings die positive Spannung an den n-Leiter und umgekehrt, so kehrt man den Effekt um und die Sperrschicht wird dünner. Ist die Spannung genügend groß, so fällt die Sperrschicht ganz weg und Strom fließt durch beide Halbleiter. Eine solche Anordnung, die man Diode, genauer Kristalldiode nennt, läßt also nur Strom in einer ganz bestimmten Richtung durch. Es handelt sich also um so etwas, wie eine "Strom-einbahnstraße". Man verwendet die Diode hauptsächlich um Ströme (vornehmlich Wechselströme) gleichzurichten.

Nun versteh n wir auch das technische Zeichen der Diode:

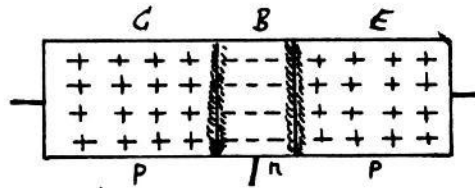


Nur in Richtung des breiten Pfeiles kann der Strom fließen. Für die entgegengesetzte

Richtung ist die Stromleitung gesperrt.

d) Transistor

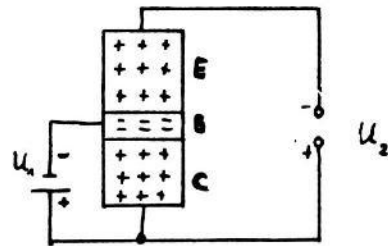
Wir bauen eine etwas kompliziertere Anordnung auf. Wir bringen nebeneinander einen p-, einen n- und wieder einen p-Leiter in Kontakt. Diese drei Teile nennt man auch Kollektor (C), Basis (B) und Emitter (E). Die Basis, hier also der n-Leiter sei gegenüber den beiden anderen sehr schmal.



Wie bereits bei der Diode bilden sich hier an beiden Grenzschichten Sperrschichten aus. Für den von C nach E durchfließenden Strom bilden diese beiden Sperrschichten einen hohen Widerstand. Bringt man aber nun auf die Basis positive Ladungsträger, so werden die Sperrschichten kleiner. Es ist sogar so, daß durch ganz wenige Ladungsträger auf der Basis ein sehr großer Einfluß auf den Widerstand zwischen Emitter und Kollektor genommen werden kann.

Dies ist vor allem für Verstärker und für Regelschaltungen wichtig. Wie wir später noch sehen werden, erfüllt die Elektronenröhre den gleichen Dienst - allerdings verbraucht sie viel mehr Energie (sie wird sehr heiß) und sie ist gegenüber einem Transistor (so nennt man obige Halbleiteranordnung) sehr viel größer. Auch wenn wir den Wechselstrom behandelt haben, werden wir sehen, wie man Röhre oder Transistor schalten muß, damit man eine Niederfrequenz (z.B. aus einem Mikrophon kommend) um ein Vielfaches verstärken kann.

Wir besprachen oben den sogenannten p-n-p-Transistor. Hier eine einfache Verstärkerschaltung. Eine Eingangsspannung U_1 wird zu einer Ausgangsspannung U_2 (die viel höher als U_1 ist) verstärkt. Unten sehen wir noch das Schaltzeichen des p-n-p-Transistors. Der Pfeil stellt die Richtung des Stromes zwischen Kollektor und Emitter dar.

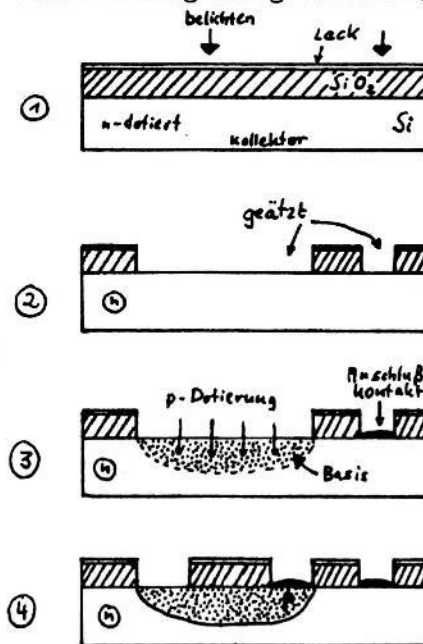


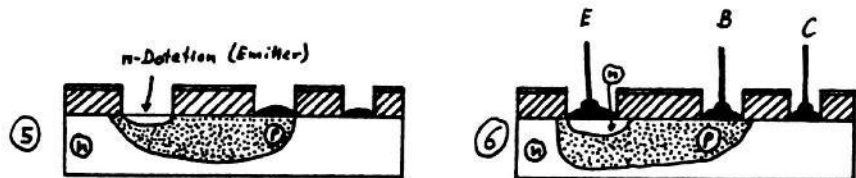
Außer dem p-n-p-Transistor gibt es noch den n-p-n-Transistor, der genauso funktioniert, und bei dem einfach alle Vorzeichen umgedreht sind.

e) Halbleiter - Technologie

Um Verstärker zu bauen, oder auch andere elektronische Geräte, reicht es nicht allein, Transistoren richtig zu schalten. Mit Widerständen muß man Eingangsspannungen regulieren, man braucht auch Kondensatoren, Spulen, Drosseln, Trimmer und anderes. Wir haben schon gesagt, daß man Transistoren und Halbleiterdioden in sehr kleiner Bauweise herstellen kann. Wollen wir uns zunächst einmal ansehen, wie man solche Bauelemente in großer Stückzahl billig herstellt.

Als Beispiel wählen wir einen n-p-n-Transistor auf Silizium-Basis. Man nimmt eine Platte aus möglichst reinem Silizium. Diese wird zunächst n-dotiert und zwar mit Arsen. Dazu setzt man die Platte Arsen-Dampf aus. Dies geschieht etwa bei 800°C . Es diffundieren nun Arsen-Atome in die Platte ein (aufgrund ihrer Beweglichkeit als Gas und ihrer Wärmebewegung). Nach diesem Vorgang ist unsere Si-Platte n-dotiert. Jetzt wird sie mit Sauerstoff oxidiert und mit einem fotoempfindlichen Lack versehen. Nun wird dieser an bestimmten Stellen belichtet (siehe Pfeil in Zeichnung 1) und dort geätzt. Diese Stellen liegen dann frei. Nun wird die rechte freie Stelle (dieses gibt ein Anschluß) mit einer Kontaktstelle aus einer Gold- oder Aluminiumlegierung versehen. Die andere freie Stelle wird mit Aluminium bedampft (Al ist bei 2450°C gasförmig). Das Aluminium diffundiert in das Si und macht daraus einen p-Leiter (3). Jetzt wird wieder oxidiert, lackiert, belichtet und geätzt und der Anschluß für den p-Leiter angebracht. Danach wird durch das verbleibende Fenster hindurch bei ca. 300°C gasförmiger Phosphor eingeleitet, der diese Stelle schließlich wieder n-dotiert. Auch hier wird der Anschluß angebracht. Nun wird noch an die drei Anschlüsse die Anschlußleitungen angelötet, die weit feiner als ein Frauenhaar sind.



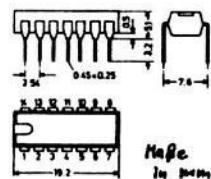


Der Transistor ist schließlich fertig. Ein Wort noch zu den Maßen : die Basis hat eine Dicke von ca. $1 \mu\text{m}$; der Emitter ist noch dünner. Die Ausdehnung der Basis beläuft sich auf etwa $0,4 \text{ mm}$. Da es natürlich nicht einfach ist, mit solch kleinen Dingen zu arbeiten, macht man es so, daß man eine große Platte nimmt, und schließlich durch die Fototechnik und die einzelnen Diffusionsschritte sehr viele Transistoren auf die Platte aufdampft. Diese werden am Schluß mit Hilfe einer Diamantsäge auseinandergetrennt.

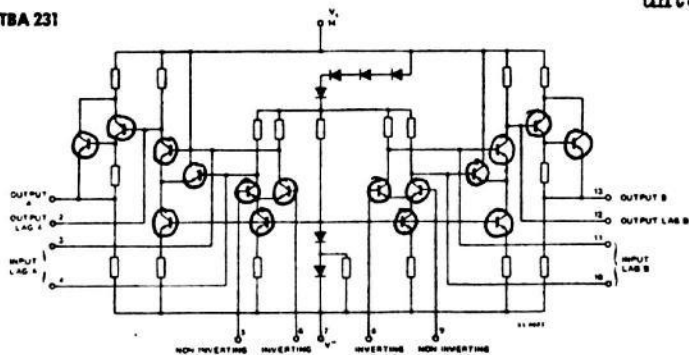
Da man mit Hilfe dieser Technologie verschiedene Arten von Transistoren und Dioden herstellen kann, und durch verschiedene Dotationen auch Widerstände und Leiterbahnen in diesen Größenordnungen auf Si-Platten aufbringen kann, lag es nahe, ganze Schaltungen auf diese Weise in einem Arbeitsgang herzustellen. So werden Verstärkerschaltungen, Frequenzgeneratoren, Meß- und Regelkreise und unzählige logische Schaltungen für den Computerbau in kleinster Bauweise hergestellt. Solche Schaltungen nennt man integrierte Schaltkreise (IC).

Unten ist ein Schaltbild einer Stereo-Verstärker-Schaltung für Kleinsignalanwendungen zu sehen.

Eine Schaltung mit 16 Transistoren, 18 Widerständen und 6 Dioden ist in nebenstehendem IC (TBA 231), in einem Gehäuse von $2 \times 0,8 \text{ cm}$ untergebracht.



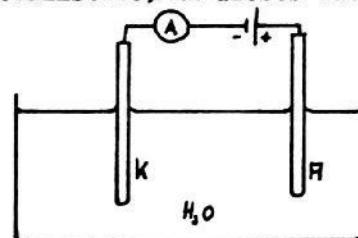
TBA 231



3. Stromleitung in Flüssigkeiten

a) Elektrolyse

Füllen wir eine Wanne mit sehr reinem Wasser (mehrfach destilliert) und bringen zwei Elektroden (= ins Wasser ragende Metallstäbe) in dieses Wasser, dann können wir sehen, daß



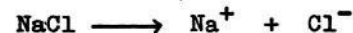
so gut wie kein Strom fließt. Warum - es sind keine freien Ladungsträger im Wasser vorhanden.

Man nennt nun die negative Elektrode Kathode und die positive Elektrode Anode.

Geben wir nun ein Salz, eine Säure oder Base zu diesem

Wasser, so stellen wir eine viel stärkere Leitfähigkeit fest. Woher kommt das ?

Geben wir beispielsweise Kochsalz dem Wasser zu, dann spaltet sich das Kochsalzmolekül (das aus einem Natrium-Atom und einem Chlor-Atom besteht) in seine Ionen auf :



Diese Ionen sind ja elektrisch geladen, also stehen auch jetzt Ladungsträger zur Verfügung, die die Leitfähigkeit ermöglichen. Die Beweglichkeit der Ionen wird stark dadurch reduziert, daß sich um jedes Ion aufgrund der elektrostatischen Anziehung eine Wolke entgegengesetzt geladener Ionen ausbildet.

Die Flüssigkeiten in denen solche Ionen vorhanden sind, nennt man Elektrolyte. Man definiert dafür einen Dissoziationsgrad (Dissoziation = Aufspaltung von Molekülen in Ionen)

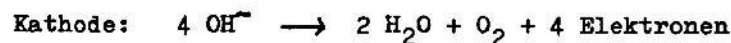
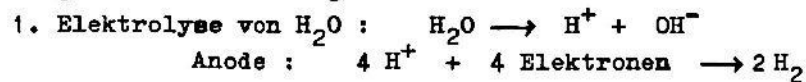
$$\text{Dissoziationsgrad} = \frac{\text{Zahl der in Ionen gespaltenen Moleküle}}{\text{Zahl der gelösten Moleküle}}$$

Hat der Elektrolyt ein Dissoziationsgrad von 1, sind alle Moleküle dissoziiert. Man nennt solch einen Elektrolyten einen starken Elektrolyten. Ist die Dissoziation unvollständig, so ist der Dissoziationsgrad wesentlich kleiner als 1 (schwacher Elektrolyt).

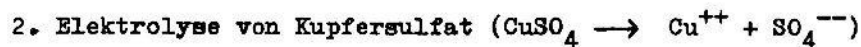
Die Stromleitung an sich setzt sich jeweils aus zwei Teilströmungen zusammen. Um beim Beispiel des NaCl's zu bleiben : es findet eine Wanderung der Na^+ -Ionen von der Anode zur Kathode und zusätzlich eine Wanderung der Cl^- -Ionen in umgekehrter Richtung statt.

Man nennt die positiven Ionen (z.B. Na^+) Kationen und die negativen Ionen (z.B. Cl^-) nennt man Anionen.
 Kationen sind die Metallionen (Na^+ , Cu^{++} , K^+ , Mg^{++}), außerdem NH_4^+ , H^+ und H_3O^+ . Anionen sind die Säurerest-Ionen und die OH^- -Ionen. Es wandern Anionen zur Anode und Kationen zur Kathode. An den Elektroden schließlich werden die Ionen neutralisiert: Kationen nehmen an der Kathode Elektronen auf, Anionen geben an der Anode Elektronen ab.

Es geschieht also folgendes:



es scheiden sich also an der Kathode Wasser und gasförmiger Sauerstoff, an der Anode gasförmiger Wasserstoff ab.



an der Anode scheidet sich metallisches Kupfer ab.

Auch das Material, aus dem die Elektroden besteht hat einen Einfluß auf die chemischen Reaktionen.

Benutzen wir zum Beispiel für die 2. Reaktion (CuSO_4) Kupferelektroden, so geschieht das folgende:

- an der Anode scheidet sich nach wie vor Kupfer ab unter Verbrauch von 2 Elektronen. An der Anode verbinden sich SO_4^{--} mit einem Kupferatom und zwei Elektronen zu einem CuSO_4 -Molekül, das aber sofort wieder dissoziiert. Insgesamt ist eine solche CuSO_4 -Elektrolyse mit Cu-Elektroden nichts anderes, als eine Wanderung von Kupfer von der Anode zur Kathode.

Es ändert sich die CuSO_4 -Konzentration im Elektrolyt nicht.

Faraday stellte den Zusammenhang zwischen Stoffmassen, die abgeschieden wurden und transportierter Ladung in den beiden Faraday'schen Gesetzen dar:

1. Die abgeschiedene Masse m ist der transportierten Ladung $Q = I \cdot t$ proportional
 $m = A \cdot I \cdot t$ ($A =$ elektrochemisches Äquivalent)

Das elektrochemische Äquivalent gibt an wieviel Gramm Ionen durch die Ladung von 1 C abgeschieden werden.

2. Die elektrochemischen Äquivalente verhalten sich wie die Äquivalentgewichte der Stoffe.

wobei $\text{Äquivalentgewicht} = \frac{\text{Atomgewicht}}{\text{Wertigkeit}}$

Gramm-Äquivalent = so viel Gramm, wie das Äquivalentgewicht angibt: z.B. Kupfer: Atomgewicht = 63,6 g

Wertigkeit = 2

\Rightarrow Gramm-Äquivalent: 31,8 g

es gilt:

Um ein Gramm-Äquivalent eines Stoffes abzuscheiden, braucht man unabhängig vom benutzten Stoff die Ladung $F = 96486,7 \text{ C}$

F nennt man die Faraday-Konstante.

(\Rightarrow Absolutmessung von Ladungen: früher war die Definition:

1 Coulomb = die Ladungsmenge, die aus einer wässrigen Silbernitratlösung genau 1,118 mg Silber abscheidet.)

Die Faraday'schen Gesetze folgen aus der Annahme, daß die Ionen so viele Elementarladungen tragen, wie ihre Wertigkeit Z angibt.

$N_L =$ Lohschmidt-Zahl = $6,0225 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{Mol}} =$ Anzahl der Ionen in einem Grammatom.

Die Ionen tragen die Ladung $Z \cdot e \cdot N_L$.

Ein Gramm-Äquivalent trägt davon nur $\frac{1}{Z}$ davon.

$\Rightarrow F = e \cdot N_L$

Auch daraus kann man die Elementarladung bestimmen:

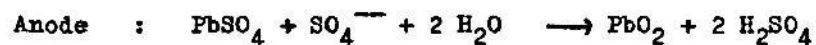
$$e = \frac{F}{N_L} = \frac{96486,7}{6,0225 \cdot 10^{23}} = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

b) Galvanische Elemente

Betrachten wir nun die Umkehrung der Elektrolyse. Was ist das? Bei der Elektrolyse verwendeten wir eine Spannung, um einen Elektrolyten chemisch zu zersetzen. Kehren wir den Vorgang um, so erhalten wir aus dem Elektrolyten, der dissoziiert ist, an den Elektroden ein Potentialgefälle, also eine Spannung. Eine Apparatur, die dieses zustandebringt, nennt man allgemein Galvanisches Element. Deren gibt es verschiedene Sorten, je nachdem um was für Elektrolyte und um was für Elektroden es sich handelt. Wir wollen zunächst als Beispiel die Autobatterie, den sogenannten Bleiakкумуляtor, betrachten.

Der Bleiakкумуляtor besteht aus zwei Bleiplatten, die in Schwefelsäure (H_2SO_4) eintauchen.

Das Blei der Elektroden reagiert mit der Schwefelsäure. Daher überziehen sich die Elektroden mit Bleisulfat $PbSO_4$. Schalten wir die Elektroden an eine äußere Spannungsquelle, so kommt es zu folgenden chemischen Reaktionen:



Es entsteht also verdünnte Schwefelsäure H_2SO_4 und Pb und PbO_2 . Den Vorstehenden Vorgang nennt man das Aufladen der Batterie. Klemmt man nun die äußere Spannungsquelle ab, so laufen die beiden Reaktionen umgekehrt ab. Der Erfolg: zwischen Anode und Kathode entsteht eine Spannung von 2,1 V. Diese Spannung besteht so lange, bis sich wieder alles Blei und Bleioxid in $PbSO_4$ zurückgebildet hat. Normale Autobatterien können einen Strom von ca. 1 A über 70 Stunden lange aufrechterhalten. Bei der Autobatterie braucht man, wie jeder weiß, keine 2,1 V sondern 12 V Spannung. Dazu nimmt man 6 Bleiakкумуляtorelemente und schaltet sie hintereinander. Sie liefern zusammen eine Spannung von 12,6 V.

Betrachten wir ein anderes Galvanisches Element. Eines, bei dem die Spannung im Endeffekt aus der Verschiedenheit der Elektroden resultiert. Wir nehmen eine Zink-(Zn)- und eine Cu-Elektrode in zwei verschiedenen Elektrolyten, die durch eine poröse Tonwand voneinander getrennt sind: Zn in $ZnSO_4$ und die Cu-Elektrode in $CuSO_4$. Verbindet man beide Elektroden über einen Stromkreis, fließt Strom. Die Elektronen fließen vom Zink zum

Kupfer. Das unedlere Metall Zink geht von der Elektrode in Lösung. Und zwar in Form von Ionen: $Zn \longrightarrow Zn^{++} + 2 e^-$. Ein Elektronenüberschuß (e^-) bleibt an der Zn-Elektrode zurück, also ist die Zn-Elektrode die Kathode. Das edlere Metall Kupfer wird aus der Lösung, in der es als Ionen Cu^{++} vorliegt, elementar an der Cu-Elektrode abgeschieden. Dazu werden Elektronen benötigt. Wir haben also einen Elektronenmangel vorliegen. Die Cu-Elektrode ist somit die Anode.

Eine solche Anordnung nennt man ein Daniell-Element. Es erzeugt eine Spannung von 1,11 V.

Praktisch verwendet man heute als Batterien die sogenannten Trockenbatterien (Leclanché-Elemente). Sie bestehen aus einer Zink und einer Kohlenstoff-(Graphit)-Elektrode. Die Elektrolytlösung ist NH_4Cl (Ammoniumchlorid). Die Zinkelektrode bildet den Becher der Batterie, die Graphitelektrode steht in der Mitte. Die NH_4Cl -Lösung ist gelatiniert (also etwas verfestigt) damit sie nicht ausfließen kann.

c) Volta'sche Spannungsreihe

Allgemein kann man sagen, daß die Elektrode mit dem unedleren Metall einen Überschuß an Elektronen und die Elektrode mit dem edleren Metall einen Elektronenmangel hat.

Man kann die Metalle in einer Spannungsreihe derart anordnen, daß alle nachfolgenden bei Kombination mit einer davorstehenden in einem galvanischen Element den positiven Pol bilden.

In untenstehender Tabelle sind die Spannung jeder einzelnen Elektrode gegenüber der sogenannten Wasserstoff-Normal-Elektrode (die man als Bezugsgröße verwendet) aufgelistet. Die Spannung, die ein Galvanisches Element aus zwei beliebigen Metall-Elektroden hergibt, ist dann gerade die Differenz aus beiden unten angegebenen Spannungen.

Spannungsreihe (einiger chem. Elemente und ihre Normalspannung gegen die Normal- H_2 -Elektrode)

Li	-	K	-	Na	-	Mg	-	Zn	-	Fe	-	Cd
-3,02		-2,92		-2,71		-2,35		-0,762		-0,44		-0,402

Ni	-	Pb	-	H_2	-	Cu	-	Ag	-	Hg	-	Au
-0,25		-0,126		O^2		+0,345		+0,8		+0,86		+1,5

4. Stromleitung in Gasen

Wir wissen, daß Gase zu den Nichtleitern zählen, daß es sich dabei um Isolatoren handelt. Bei den Gasen gibt es keine freien Ladungsträger, die eine Stromleitung ermöglichen.

Wenn wir ein Gas einem sehr starken elektrischen Feld aussetzen, kann folgendes passieren :

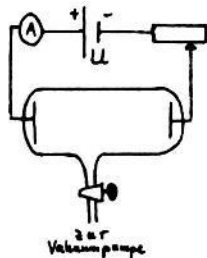
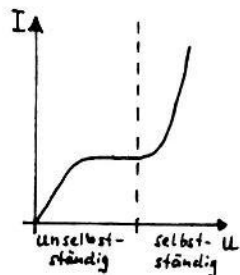
das elektrische Feld ionisiert das Gas, es zerlegt also die Gasatome in Atomrümpfe und in freie Valenzelektronen. Diese können dann Strom leiten und tun dies auch, indem sie eventuell vorhandene Ladungsunterschiede (die meist die Ursache des Feldes sind) ausgleichen. So etwas kennen wir vom Gewitter her und nennen es Blitz. Auch hier wird Strom durch die Luft geleitet, die ja normalerweise ein Isolator ist.

Wovon hängt nun die Ionisationsfähigkeit eines Feldes ab, bzw. wann gibt es Leitung in Gasen ?

Zunächst einmal ist die Feldstärke des elektrischen Feldes maßgebend, d.h. also die elektrische Spannung, die zwischen zwei Polen, zwischen denen das Gas leitend gemacht werden soll, herrscht. Außerdem kommt es auf die Dichte der Gasmoleküle an, also darauf, welcher Druck im Gas herrscht. Je kleiner der Druck im Gas ist, desto weniger Moleküle sind vorhanden, und desto einfacher haben es erzeugte Ionen, Strom zu leiten, da sie viel seltener mit anderen Molekülen, bzw. Ionen zusammenstoßen. Man sagt : ihre mittlere freie Weglänge ist dann größer.

Diese mittlere freie Weglänge ist der Weg, den ein Molekül im Durchschnitt zurücklegt, bis es mit einem anderen Molekül oder Ion zusammenstößt. Es ist logisch, daß diese mittlere freie Weglänge mit sinkendem Druck größer wird.

Wir konstruieren uns ein Glasgefäß, in das zwei Elektroden gegenüber angebracht sind. Zwischen diese legen wir eine Spannung U . Im Gefäß ist ein Gas unter einem bestimmten Druck eingeschlossen. Jetzt ionisieren wir die Gasmoleküle, beispielsweise, durch Bestrahlen mit Röntgen- oder UV-Strahlung. Es fließt Strom, wenn eine Spannung U anliegt. Nun erhöhen wir die Spannung. Der Stromfluß nimmt auch zu. Und zwar zunächst



zunächst

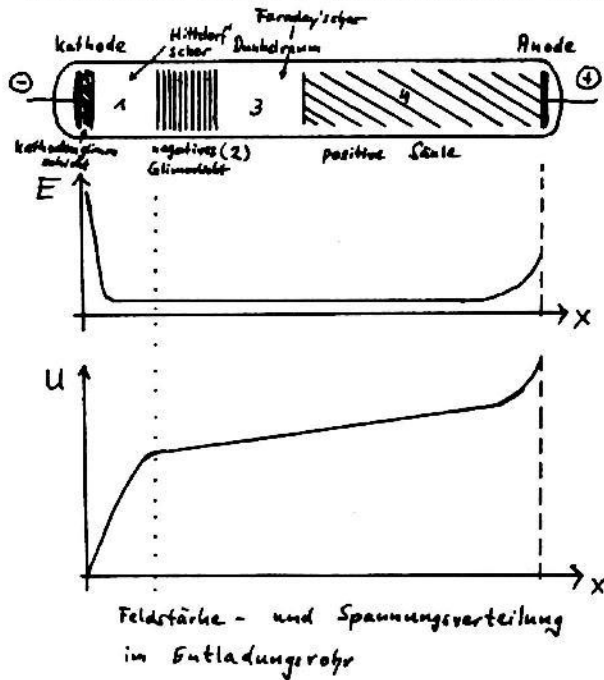
proportional. Hier tragen die entstandenen Ionen nur teilweise zur Stromleitung bei. Viele rekombinieren, bevor sie vom einen zum anderen Pol gewandert sind. Rekombinieren heißt, ein positives Ion verbindet sich wieder mit einem Elektron zu einem neutralen Atom, das keinen Strom mehr leitet. Erhöhen wir die Spannung U weiter - wir geben dadurch natürlich kinetische Energie auf die Ladungsträger - so geben wir ihnen irgendwann so viel Energie mit, daß sie alle zum Ladungstransport beitragen. Sie rekombinieren nicht mehr. Es kommt zur Sättigung. Erhöhen wir die Spannung weiter, ändert sich zunächst nichts. Erst bei einer bestimmten Spannung steigt die Stromstärke (also der Ladungstransport) noch weiter. Wieso jetzt das ? Die Ladungsträger haben nun so viel Energie, daß sie ihrerseits in der Lage sind, andere neutrale Atome durch Stoß zu ionisieren. Dadurch entstehen vermehrt Ladungsträger; die Stromleitung, damit die Stromstärke wird größer. Diese letzte Phase, bei der die Ionen selbst neue Ionen erzeugen, nennt man selbstständige Gasentladung, während die Gasentladung (das ist der Stromfluß durch ein Gas) vorher unselbstständig war.

Im folgenden wollen wir verschiedene Arten der Gasentladungen durchdiskutieren. Je nach Gasdruck und Spannung können wir mehrere Entladungen unterscheiden.

a) Glimmentladung

Wir nehmen eine Glasröhre, bei der eine Spannung von ca. 1000 V an den Polen (an der Kathode -1000 V, an der Anode +) anliegt. Zunächst passiert nichts. Wenn wir jetzt den Druck vermindern, kommt es zur Glimmentladung (die mittlere freie Weglänge wird größer). Eine Glimmentladung ist eine Gasentladung bei relativ kleiner Spannung und vermindertem Druck. Bald fängt das Innere der Röhre an zu leuchten. Das kommt durch Stoßanregung an den vorhandenen Gasteilchen. Bei der Stoßanregung erhalten die Atome kinetische Energie, die dazu aufgebraucht wird, das Atom in einen höheren Energiezustand zu versetzen. Kurze Zeit später springt das Atom in seinen Energiegrundzustand zurück unter Aussendung eines Lichtblitzes. Bei den vielen Zusammenstößen addiert sich dieses zu einem konstanten Leuchten in der Röhre. Betrachten wir uns dieses Leuchten genauer, so stellen wir fest, daß es verschiedene Zonen gibt. Wir wollen dies zunächst einmal zeichnen,

ebenso zeichnen wir unten die Diagramme für die elektrische Feldstärke und die Spannungsverteilung innerhalb der Röhre :



Die Elektronen treten bei der Kathode aus. Unmittelbar vor der Kathode ist die Feldstärke sehr groß und der Spannungsabfall sehr klein. Dort werden positive Ionen stark beschleunigt (zur Kathode hin) und sie schlagen dort weitere Elektronen aus. Diese werden zur Anode hin beschleunigt. Im Raum 2 ist ihre kinetische Energie so groß, daß Stoßanregung auftritt. Zone 2 nennt man auch negatives Glimmlicht.

Dort verlieren die Elektronen ihre ganze Energie und müssen diese erneut durch das elektrische Feld aufnehmen. Deshalb ist die angrenzende Zone (3) wieder dunkel (Faraday'scher Dunkelraum). In der Zone (4) ist die kinetische Energie wieder so weit angewachsen, daß wieder Stoßanregung auftritt. Außerdem findet in dieser Zone (positive Säule) auch Rekombination statt. Sind die Elektronen fast an der Anode angelangt, ist ihre Energie so groß, daß sie selber Gasmoleküle ionisieren. Diese positiven Ionen wandern zurück zur Kathode.

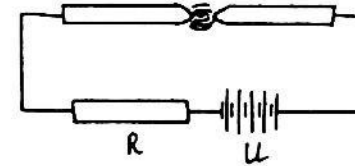
Noch etwas zur "Zündspannung" (das ist die Spannung, bei der die Entladung einsetzt). Es gilt einfach: Zündspannung $U = \text{Druck} \cdot \text{Elektrodenabstand}$.

b) Bogen- und Funkenentladung

Wenn bei einer Entladung der Entladestrom sehr hoch ist, kommt es zum Glühen der Elektroden. Die Glühemission (durch die starke thermische Bewegung des glühenden Materials werden viele Elek-

tronen freigesetzt) ersetzt hier hauptsächlich die Stromleitung. Man nennt diese Art von Entladung Bogen- oder Funkenentladung. Solche Entladungen treten auch bei höheren Drücken auf. Große praktische Bedeutung hat die sogenannte Bogenlampe :

Zwei Kohlestäbe werden über eine Batterie (220 V) und einen Widerstand miteinander verbunden. Zunächst berühren sich die Spitzen. Danach werden die Spitzen auseinandergezogen und die entstehende Funkenbrücke (Lichtbogen) auseinandergezogen.



Die beiden Kohlestäbe werden dabei sehr heiß (bis zu 6000°C).

Funken sind Entladungen, die sehr rasch wieder verlöschen. Man bringt zum Beispiel zwei Metallkugeln, zwischen denen eine hohe Spannung herrscht in die Nähe zueinander. Ein Funke springt über, die Entladung ist erfolgt. Hier eine kurze Zusammenstellung der Funken Schlagweite (Funkenstrecke) zwischen zwei Kugeln des Radius: 1 cm in Luft von 760 Torr und 18°C :

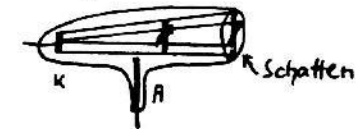
Strecke in cm	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	3	4	5
Spannung in kV	4,8	17,5	30,8	39,3	47	57	64	69

c) Kathoden- und Kanalstrahlen

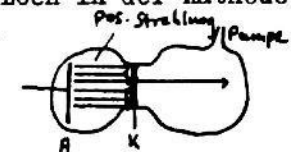
Nun noch ganz kurz zu den sogenannten Kathodenstrahlen und den Kanalstrahlen.

Senkt man bei der Glimmentladung den Druck noch weiterhin, so vergrößert man die mittlere freie Weglänge. Man erreicht, daß sich von der Kathode Elektronen geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit ausbreiten.

Sie gehen von der Kathode zur Anode und können von dort noch weiterwandern.'



Bei den Kanalstrahlen handelt es sich um positive Ionen, die von der Anode kommend durch ein Loch in der Kathode fliegen und so im Kanalstrahlrohr ausgeblendet werden können.



E. MAGNETISMUS

I. MAXWELLSCHE GLEICHUNGEN

1. mathematischer Einschub

Um die Phänomene des Magnetismus besser verstehen zu können, ist es nötig, daß wir uns zunächst mit einigen mathematischen Dingen beschäftigen.

Es handelt sich sowohl bei der Elektrizitätslehre als auch beim Magnetismus hauptsächlich um Felder. Das elektrische Feld (\vec{E} -Feld, wir kennen es schon) und das magnetische Feld (nennen wir es \vec{B} -Feld) spielen dabei die Hauptrolle. Befassen wir uns also zuerst einmal mit Feldern.

a) Felder

Was versteht man darunter?

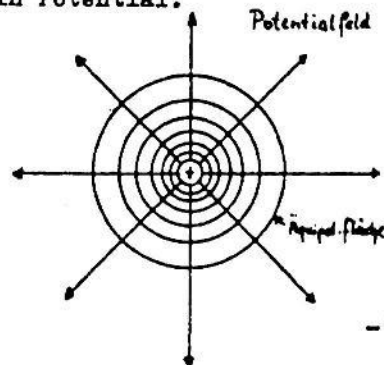
Def.: Das Feld einer physikalischen Größe A ist die Menge von Zahlenwerten, $A(\vec{r})$ bzw. $A(x,y,z)$, welche jedem Ort $\vec{r} = (x,y,z)$ des Raumes zugeordnet sind.

zu deutsch : Jedem Punkt im Raum ist irgendetwas zugeordnet und zwar
ein Skalar (beim Skalarfeld) oder
ein Vektor (beim Vektorfeld).

Beispiele : Skalarfeld (hier ist jedem Punkt ein Skalar zugeordnet) ist z.B. ein Temperaturfeld. In jedem Raumpunkt herrscht eine bestimmte Temperatur. Auch das Potentialfeld ist ein Beispiel : an jedem Punkt existiert irgendein Potential.

Man nennt nun im Skalarfeld die Flächen gleicher Stärke (also gleicher Temperatur, gleichen Potentials usw.)

"Äquipotentialflächen".



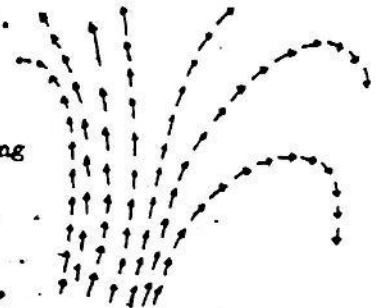
Als Beispiel für ein Vektorfeld ist das Geschwindigkeitsfeld zu nennen. Dabei handelt es sich darum, daß eine kontinuierlich verteilte Materie (Flüssigkeit oder Gas) sich irgendwie bewegt. Nun kann man in jedem Punkt des Raumes den Geschwindigkeitsvektor des betreffenden Flüssigkeitsteilchens betrachten. Die Gesamtheit aller dieser Vektoren (die nicht gleichlang oder gleichgerichtet sein müssen) ist eben das Geschwindigkeitsfeld.

Ein anderes Beispiel ist das Gravitationsfeld.

An jedem Punkt wirkt eine Gravitation auf einen Probekörper, den man in dieses Feld bringt. Diese Gravitationskraft hat nicht nur einen Betrag sondern auch eine Richtung. Also kann man auch hier ein Vektorfeld darstellen, indem man an verschiedenen Punkten repräsentative Vektoren angreifen läßt.

Hier ist ein Geschwindigkeitsfeld gezeichnet (fließendes Medium).

Die Pfeile stellen Betrag und Richtung der jeweiligen Geschwindigkeit dar. Natürlich liegen auch in den Zwischenräumen Vektoren, aber zur Darstellung wählt man meist nur repräsentative aus.



b) partielle Differentiation

Im folgenden wollen wir uns solche Felder näher ansehen.

Am Anfang, als die Dynamik des Massenpunktes besprochen wurde, wurde auch mit Vektoren operiert. Man prüfte, wie sich ein Massenpunkt auf einer Strecke (also einem Vektor) bewegte. Man suchte die Zeitableitung (Geschwindigkeit, ebenfalls ein Vektor) oder die zweite Ableitung nach der Zeit (Beschleunigungsvektor).

Wir gehen an den Vektorfelder ganz ähnlich heran. Nur kommt jetzt noch etwas dazu : wenn sich im Feld (im skalaren wie im Vektorfeld) irgendetwas ändert, so kann es sich zeitlich oder räumlich ändern. Das heißt unsere Größe (Geschwindigkeit, Potential, Temperatur usw.) hängt von vier Variablen ab: x, y, z und t .

Betrachten wir nun als Beispiel, wie sich ein Feld im Raum ändert. Die Geschwindigkeit kennen wir, das ist die Änderung der Strecke mit der Zeit :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Was ist aber jetzt die Änderung mit dem Ort ?

Wir nehmen als Beispiel ein Gravitationsfeld. Die Schwerkraft nimmt (wie hoffentlich noch bekannt) mit der Höhe quadratisch ab (Gravitationsgesetz).

Also, wenn wir die vier Punkte 1, 2, 3 und 4 als repräsentativ ansehen gilt :

$$G(1) > G(2) > G(3) > G(4) .$$

Die Frage lautet nun :

Wie groß ist $\frac{dG}{dh}$, also die Änderung der Gewichtskraft mit der Höhe ?

Das ist aber ganz einfach. Rufen wir uns das Gravitationsgesetz ins Gedächtnis zurück :

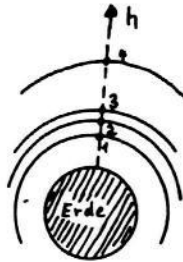
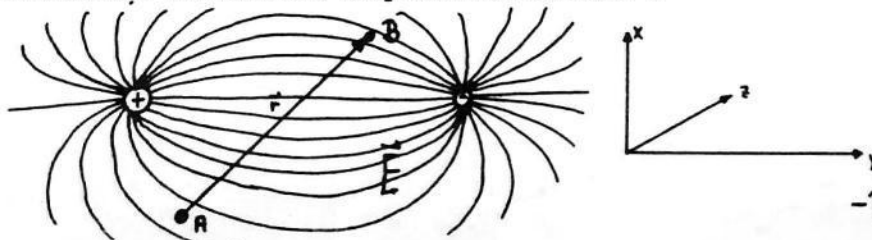
$$G = \gamma \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{(R+h)^2} \cdot m_{\text{Körper}}$$

Daraus folgt natürlich $\frac{dG}{dh} = -2 \cdot \gamma \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{(R+h)^3} \cdot m_{\text{Körper}}$

Das Minus steht dafür, daß die Gewichtskraft abnimmt, wenn h vergrößert wird.

Dieses war ein ziemlich simples Beispiel. Denn wir hatten nur eine einzige Variable. Nur in der Höhe ändert sich die Gewichtskraft. Dies kann man auch wissenschaftlicher ausdrücken : Das Gravitationsfeld ist ein sogenanntes "Zentralfeld". Ein solches ist dadurch ausgezeichnet, daß die betreffende Größe (hier die Gravitationskraft) immer von einem Zentrum ausgeht oder in ein Zentrum zeigt. Dann sind die Äquipotentialflächen Kugelschalen um das Zentrum. Die Schwerkraft ist also auf einer solchen Kugelschale immer gleich stark. Also hängt sie nur vom Radius dieser Schale ab, und das ist eben gerade die Höhe.

Wählen wir uns nun ein komplizierteres Feld :



Dies ist das elektrostatische Feld, das sich ergibt, wenn man zwei gleich große, entgegengesetzte Ladungen in einem Abstand aufstellt. Die Frage soll nun sein :

Wie ändert sich die elektrische Feldstärke, wenn man von Punkt A zum Punkt B geht ?

Einfacher : Wie groß ist die Kraft auf eine Probeladung die von A nach B verschoben wird.

Es sollte noch bekannt sein, daß das elektrische Feld definiert war

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{r}^0 \quad \text{Das war das Feld, das eine Ladung } Q \text{ im Abstand } r \text{ hatte.}$$

Die Kraft zwischen der Ladung Q und einer Probeladung q war dann

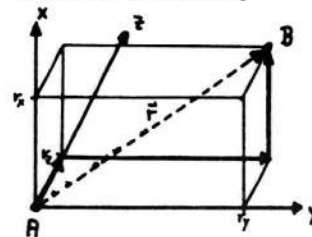
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{r}^0 .$$

Zurück zu unserem Problem: wie ändert sich die Kraft auf eine Probeladung q, die von A nach B verschoben wird ?

Wir können nun nicht mehr sagen, die Änderung sei $\frac{d\vec{E}}{dx}$ oder $\frac{d\vec{E}}{dy}$ oder $\frac{d\vec{E}}{dz}$, da wir weder auf der x-, y- noch auf der z-Achse von A nach B gehen, sondern auf einer Linie \vec{r} . Und das ist ein Vektor ! Und nach Vektoren kann man nicht differenzieren. Also nach was muß man jetzt differenzieren ?

Haben wir eine Größe, die nur von einer Variablen abhängt, sagen wir x, also f(x), so erhalten wir über die Ortsänderung durch $\frac{df(x)}{dx}$ Auskunft.

Jetzt haben wir aber nicht f(x) also eine Funktion, die nur von x abhängt, sondern f(x,y,z). Eigentlich müßte man die Variable t noch dazuzählen, aber unsere beiden Ladungen sollen fest im Raum bleiben, so daß es sich dabei um ein zeitunabhängiges (stationäres) Problem handelt.



Zur Berechnung gehen wir nun von A nach B, aber nicht auf dem direkten Weg, sondern immer parallel zu einer Achse. Von $(0,0,0) \rightarrow (0,0,r_z) \rightarrow (0,r_y,r_z) \rightarrow (r_x,r_y,r_z)$. Das heißt, wir gehen nacheinander die Wege ab, die wir differenzieren können. Und warum ?

Nun bei jedem dieser drei Schritte ändert sich immer nur eine Raumvariable. Beim ersten die z-Koordinate, beim zweiten die y- und beim dritten Schritt die x-Koordinate.

Zunächst der erste Schritt $(0,0,0) \rightarrow (0,0,r_z)$.

Wir ändern also die z -Koordinate und halten x und y fest.

Die Änderung ist dann $\frac{df(x,y,z)}{dz}$, x,y fest.

Um anzuzeigen, daß man eine Funktion nach einer Variablen ableitet und alle anderen Variablen festhält, schreibt man diese Ableitung mit runden d's. Man nennt dies eine partielle Ableitung

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

Für unsere beiden anderen Schritte gilt genau das analoge:

$$(0,0,r_z) \rightarrow (0,r_y,r_z) : \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$$

$$(0,r_y,r_z) \rightarrow (r_x,r_y,r_z) : \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$$

Dazu ein kurzes Beispiel:

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

$$\text{dann ist } \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{ebenso ergibt sich } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Kommen wir zum ursprünglichen Problem zurück:

Wir gehen von A nach B. Für die Änderung des Feldes nach dem Weg fanden wir $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial y}$, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$, wenn wir auf den Koordinatenachsen gehen. Und dies geht, denn wir kommen auch über die Achsen von A nach B. Wie werden aber jetzt die einzelnen Koordinatenableitungen zusammengebracht? Werden sie addiert oder was? Nun das hängt ganz vom Feld ab. Und das wollen wir jetzt genau untersuchen.

c) Gradient

Betrachten wir zunächst ein Skalarfeld.

Nennen wir es $\varphi(\vec{r})$. Ein Potentialfeld, meinetwegen. φ hängt vom Ort \vec{r} ab (\vec{r} ist der Ortsvektor vom Ursprung zum jeweils betrachteten Ort). Man definiert nun

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) := \text{grad } \varphi \quad \text{oder Gradient } \varphi.$$

Der Gradient eines skalaren Feldes beschreibt die Änderung des Feldes mit dem Ort. Er ist ein Vektor mit den Komponenten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Was sagt uns nun dieser Vektor?

1. Die Richtung von $\text{grad } \varphi$ steht immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen des Feldes.
2. Der Betrag $|\text{grad } \varphi|$ gibt die Stärke der Veränderung an.

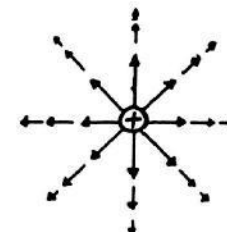
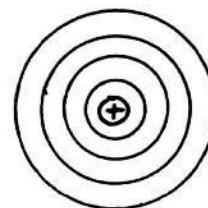
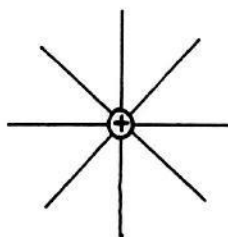
Betrachten wir ein Beispiel:

ein Potentialfeld dargestellt durch

Feldlinien

Äquipotentialflächen

Gradient



Wir sehen:

Der Gradient gibt die Stärke der Veränderung des Feldes direkt an in Richtung und Betrag.

Bleiben wir beim elektrischen Feld:

Wir wissen (hoffentlich!) noch $\varphi = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

ebenso gilt die Umkehrung $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ denn der grad ist eine Ableitung nach dem Ort.

Rechnen wir ein Beispiel:

Nehmen wir an, wir messen ein Potential. Ein Potential ist ja eine Spannungsdifferenz und die ist recht leicht zu messen. Nun finden wir, das Potential ist proportional zu $1/r$, d.h. es nimmt nach außen umgekehrt proportional zum Abstand ab:

$$\varphi = a \cdot \frac{1}{r} \quad (a \text{ ist irgendeine Konstante}). \quad \text{Wie groß ist nun } \vec{E}?$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(wissen wir noch, Betrag eines Vektors, oder etwa nicht?)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = - \frac{a x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{-a x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = - \frac{a x}{r^3} \quad \text{also ist}$$

$$\vec{E} = \left(\frac{ax}{r^3}, \frac{ay}{r^3}, \frac{az}{r^3} \right) = \frac{a}{r^3} \underbrace{(x, y, z)}_{=\vec{r}} = \frac{a}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{a}{r^2} \vec{r}^0$$

mit $a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ erhalten wir direkt das elektrische Feld einer Punktladung Q aus ihrem elektrischen Potential.

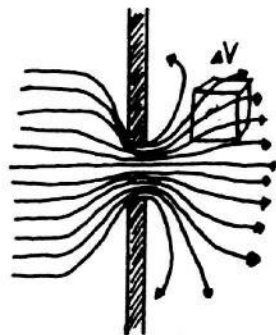
d) Divergenz

Bei der Gradientenbildung haben wir einem skalaren Feld ein Vektorfeld zugeordnet, welches die "Ortsableitung des Skalars" war. Jetzt machen wir es umgekehrt und ordnen einem Vektorfeld ein Skalar zu. (Jetzt addieren wir die partiellen Ableitungen), wir definieren: (sei \vec{A} ein Vektorfeld $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$)

$$\text{div } \vec{A} := \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

heißt "Divergenz von \vec{A} " oder "Quellenfeld von \vec{A} ". Eine Divergenz gibt an, ob und wo in einem Vektorfeld Quellen und Senken sind, d.h. wo Teile des Feldes entstehen oder verschwinden. Damit man sich überhaupt etwas darunter vorstellen kann, sei ein kurzes Beispiel genannt. Betrachten wir das Bild der zwei gleichgroßen entgegengesetzten Ladungen. Dort gehen die Feldlinien von der positiven zur negativen Ladung. Das bedeutet aber, daß die positive Ladung eine Quelle ist (dort "entsteht" das Feld) und die negative Ladung eine Senke (dort "verschwindet" das Feld wieder).

Betrachten wir ein anderes Beispiel etwas genauer:



Es handelt sich hierbei um ein Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r})$, also um ein Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums.

Die lokale Teilchenzahldichte $n(\vec{r}, t)$

$$n(\vec{r}, t) = \frac{\Delta N}{\Delta V} \text{ verändert sich zeitlich!}$$

Für die Konstanz, Zu- oder Abnahme der Teilchenzahl pro Volumen ist $\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t}$ ein Maß.

Nun werden natürlich weder Teilchen erzeugt, noch verschwinden sie. Die Teilchen, die in ΔV hineingehen, kommen aus einem anderen Raumbereich.

Betrachten wir nun die "Teilchenstromdichte" $\vec{j}(\vec{r})$. Sie gibt an, wieviel Teilchen pro Zeit und pro Fläche an der Stelle \vec{r} in der durch \vec{j} angezeigten Richtung strömen.

Nach umständlicher Rechenarbeit (auf die hier verzichtet werden soll - - bitte schön!) findet man:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \text{div } \vec{j} \quad \text{d.h. die Änderung der Teilchenzahl mit der Zeit ist } = - \text{div } \vec{j}.$$

Ist $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$, so ist die Teilchenzahldichte konstant, also ist auch $\text{div } \vec{j} = 0$.

Was heißt aber $\text{div } \vec{j} = 0$? Da die Divergenz eine Ortsableitung ist bedeutet $\text{div } \vec{j} = 0$, daß \vec{j} örtlich konstant ist!

Das heißt für unser ΔV : es fließen ebensoviele Teilchen in das Volumen, wie heraus (in der gleichen Zeit). Dann ist der Teilchenstrom konstant. So einfach ist das!

e) Rotation

So - jetzt haben wir einem skalaren Feld ein Vektorfeld zugeordnet (Gradient) und einem Vektorfeld ein skalares Feld (Divergenz). Fehlt noch die Zuordnung eines Vektorfeldes zu einem Vektorfeld. Definieren wir dies zunächst.

Es sieht zwar ein bißchen kompliziert aus, aber das soll uns nicht schockieren, wir sind ja schon einiges gewöhnt!

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$A = (A_x, A_y, A_z)$
 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - Einheitsvektoren in x, y, z-Richtung.

Determinante (Schule!)

rechnet man diese Determinante aus, so erhält man drei Komponenten des Vektors $\text{rot } \vec{A}$. Diese können wir auch als Definition benutzen:

$$\text{rot } \vec{A} = \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right); \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right); \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\}$$

Man nennt $\text{rot } \vec{A}$ "Rotation von \vec{A} " oder "Wirbelfeld von \vec{A} ".
 Der Vektor $\text{rot } \vec{A}$ gibt an, ob und wo, ebenso wie stark das Feld \vec{A} lokale Wirbel hat.

Was ist jetzt das : lokale Wirbel ?

Nun hat z.B. eine turbulente Strömung lokale Wirbel. Dort ist $\text{rot } \vec{v}(\vec{r})$ sicher ungleich 0. Nicht aber bei einer laminaren Strömung. Dort gibt es keine Wirbel und $\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = 0$.

Also sieht man schon : falls $\text{rot } \vec{A} \neq 0$, dann hat das Feld \vec{A} lokale Wirbel.

der Vektor $\text{rot } \vec{A}$ sagt, wo diese sind
 der Betrag $\text{rot } \vec{A}$ zeigt die Stärke
 dieser Wirbel an.

f) Zusammenfassung, Nabla

Sei $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ irgend ein vektorielles Feld.

so sagt $\text{div } \vec{A}$ etwas über die Strömungsverhältnisse von \vec{A}

$\text{rot } \vec{A}$ etwas über eventuelle Wirbelbildungen und

\vec{A} selbst, etwas über die örtliche Verteilung des Feldes aus.

Das heißt, daß man in den Vektoroperationen \vec{A} , $\text{div } \vec{A}$ und $\text{rot } \vec{A}$ eine Menge an Informationen über ein Feld \vec{A} findet.

Nun noch ein kleiner Einschub :

Wir erinnern und (dunkel ?) mit $\vec{a} = \text{Vektor}$ $\varphi = \text{Skalar}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y; a_z b_x - a_x b_z; a_x b_y - a_y b_x)$$

$$= \vec{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{e}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{e}_z (a_x b_y - a_y b_x)$$

(wobei $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ die Einheitsvektoren in den drei Raumrichtungen darstellen)

$$\text{dasselbe schreiben wir auch } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Diese Regeln wollen wir nun benutzen, um unsere bisherigen Operationen eleganter zu bezeichnen.

Beginnen wir mit dem Gradienten.

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad \text{Dies schreiben wir nun so :}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi$$

Es wäre falsch zu sagen, wir klammerten φ aus. Denn die Klammer allein hat keine Existenzberechtigung.

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ heißt : differenziere φ nach x . Was soll aber $\frac{\partial}{\partial x}$ allein heißen ? $\frac{\partial}{\partial x}$ ist ein sogenannter "Operator".

Ein Operator wirkt immer auf eine Größe, die hinter ihm steht und sagt aus, was mit dieser Größe zu geschehen hat.

$\frac{\partial}{\partial x} \varphi$ sagt aus : differenziere das was folgt (hier φ) nach x .

Also ist auch die Operation $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ ein Operator.

Diesen nennen wir "Nabla" und geben ihm das Zeichen ∇ .

Also $\boxed{\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)}$ Nabla ist ein Vektor !

Nabla sagt nun aus, was mit dem folgenden zu geschehen hat.

Somit können wir nun für unseren Gradienten auch schreiben :

$$\boxed{\nabla \varphi = \text{Grad } \varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

Machen wir es ebenso mit der Divergenz :

$$\text{Div } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x, A_y, A_z) = \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = \text{Div } \vec{A}}$$

und für die Rotation ergibt sich $\boxed{\nabla \times \vec{A} = \text{Rot } \vec{A}}$, da

$$\text{Rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{A}$$

Hier einige Rechenregeln (nur der Vollständigkeit halber)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad}(\psi + \varphi) = \text{grad} \psi + \text{grad} \varphi \quad \nabla(\psi + \varphi) = \nabla\psi + \nabla\varphi \\ \text{grad}(\psi \cdot \varphi) = \psi \text{grad} \varphi + \varphi \text{grad} \psi \quad \nabla(\psi \cdot \varphi) = \psi \cdot \nabla\varphi + \varphi \cdot \nabla\psi \\ \text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div} \vec{A} + \text{div} \vec{B} \quad \nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B} \\ \text{div}(\alpha \vec{A}) = \alpha \text{div} \vec{A} \quad \nabla \cdot (\alpha \vec{A}) = \alpha \nabla \cdot \vec{A} \\ \text{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot} \vec{A} + \text{rot} \vec{B} \quad \nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B} \\ \text{rot}(\alpha \vec{A}) = \alpha \text{rot} \vec{A} \quad \nabla \times (\alpha \vec{A}) = \alpha (\nabla \times \vec{A}) \\ \text{rot}(\psi \vec{A}) = \psi \text{rot} \vec{A} + (\text{grad} \psi) \times \vec{A} \quad (\psi \text{ ist skalares Feld}) \\ \nabla \times (\psi \vec{A}) = \psi (\nabla \times \vec{A}) + (\nabla\psi) \times \vec{A} \end{array} \right.$$

*su. (α ist eine reelle Zahl)

$$\text{div}(\text{grad} \psi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = (\nabla \cdot \nabla) \psi = \Delta \psi \quad (\text{Laplace-Operator})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \psi) = (\nabla \cdot \nabla) \psi = \Delta \psi$$

$$\text{div}(\psi \text{grad} \varphi - \varphi \text{grad} \psi) = \psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi$$

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) = \psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi$$

es gilt der Zusammenhang

$$\text{rot}(\text{grad} \psi) = 0 \quad \nabla \times (\nabla \psi) = 0$$

also : ein Gradientenfeld ist stets wirbelfrei !
(Man erinnere sich dabei an $E = -\text{grad} \phi$ - Feldlinien kreuzen sich nicht!)

$$\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0 \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

also : ein Wirbelfeld ist stets quellenfrei (logisch : ein Feld bestehend aus lauter Wirbeln (Geschlossene Feldlinien) kann keine Quellen und Senken haben).

und es gilt noch

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

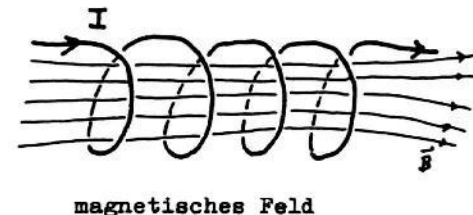
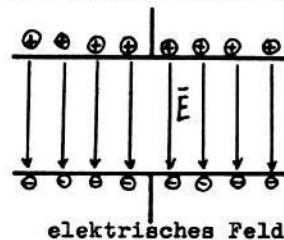
--- Nach diesen ganzen mathematischen Formalismen wenden wir uns nun wieder Physikalischem zu. Wir werden nun diese Operationen benutzen, um mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen die Elektrodynamik (Magnetismus) zu beschreiben..

← * $\text{div}(\psi \vec{A}) = \psi \text{div} \vec{A} + \vec{A} \text{grad} \psi$ $\nabla \cdot (\psi \vec{A}) = \psi (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla \psi$
gehört da drauf! Vergessen - Sorry!

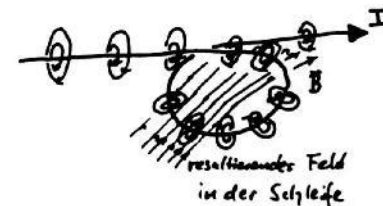
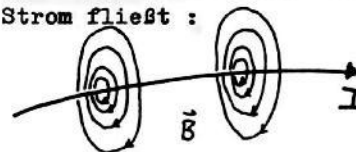
... und nun (endlich !) zum Magnetismus :

2. Maxwell'sche Gleichungen

Zunächst einmal führen wir ein magnetisches Feld ein. Dies soll ganz ähnlich dem elektrischen Feld \vec{E} sein. Nennen wir die Feldstärke des magnetischen Feldes \vec{B} . Hier sind die Feldlinien des elektrischen und des magnetischen Feldes dargestellt :



Ein magnetisches Feld wird immer da erzeugt, wo ein elektrischer Strom fließt :



a) Begriff

Die vier Gleichungen, die von James Clerk Maxwell aufgestellt wurden, beschreiben die gesamte Elektrodynamik, d.h. alle Phänomene der Elektrizitätslehre und des Magnetismus werden mit diesen Gleichungen beschrieben - aus diesen Gleichungen kann man alle anderen Gleichungen dieser physikalischen Gebiete ableiten. Mit zwei Ausnahmen : das sind zwei Materialgleichungen, auf die wir aber noch zu sprechen kommen.

Das Kapitel hier scheint auf den ersten Blick etwas kompliziert, da die Maxwell-Gleichungen nicht sehr einfach sind. Doch ist es sehr interessant zu sehen, wie sich ein ganzes Kapitel aus diesen vier elementaren Gleichungen ergibt. Natürlich hat Maxwell diese Gleichungen nicht einfach hingeschrieben, so wie wir das jetzt tun. Er hat die Gleichungen und

Formeln, die sich aus elektrischen und magnetischen Versuchen ergaben, zusammengefaßt.

Sehen wir uns die vier Maxwell-Gleichungen einmal an :

1) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	3) $\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$	4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

\vec{E} = elektrische Feldstärke \vec{j} = Stromdichte = $\frac{dI}{dA}$
 \vec{B} = magnetische Feldstärke = Strom, der pro Zeit durch eine Fläche A geht.
 ϵ_0 = Dielektrizitätskonst. ρ = Ladungsdichte = $\frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}}$
 c = Lichtgeschwindigkeit
 t = Zeit

Das sieht jetzt zunächst ziemlich kompliziert aus. Da wir aber mittlerweile wissen, was div und rot bedeutet, können wir uns diese Gleichungen schon einmal - zumindest qualitativ - begreiflich machen.

b) Gedanken zu den Gleichungen

Stellen wir nun zu den einzelnen Gleichungen Überlegungen an :

1) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ Das heißt : Die Quellen des elektrischen Feldes sind Ladungen !
 genauer : Die Quellen von E sind $\frac{\rho}{\epsilon_0}$.
 Was ist das ρ / ϵ_0 ?

$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\sum Q}{V \epsilon_0}$ Was hat nun $V \cdot \epsilon_0$ für eine Bedeutung ? Nun - in $V \cdot \epsilon_0$ steckt die Einheitenumrechnung drin. Noch einmal :

Die Quellen des elektrischen Feldes sind Ladungen !

Im Feldlinienbild heißt das : Feldlinien beginnen und enden an Ladungen !

2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Das heißt : Die Quellen und Senken des magnetischen Feldes sind = 0, d.h. es gibt keine. Heißt das nun auch, daß es kein magnetisches Feld gibt ? Nein ! Es heißt nur, daß es keinen Anfang und kein Ende der magnetischen Feldlinien gibt. Also sind magnetische Feldlinien immer geschlossen.

Na und, was bringt uns das ?

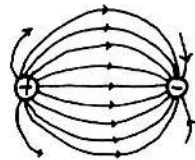
...eine wichtige Erkenntnis :

es gibt keine magnetischen Monopole! Also es müssen immer zwei magnetische Pole vorhanden sein, um ein magnetisches Feld zu erzeugen. Im Gegensatz dazu kann eine elektrische Ladung schon ein elektrisches Feld aufbauen.

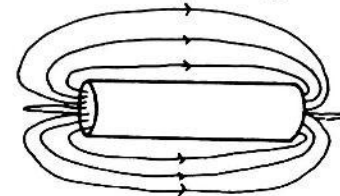
Zwischen positiver und negativer elektrischer Ladung baut sich ein elektrisches Feld auf. Die Feldlinien beginnen bei der positiven und enden bei der negativen Ladung.

Im magnetischen Feld sind die Feldlinien geschlossen :

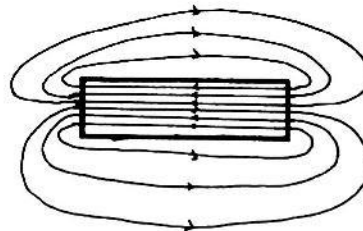
elektrisches Feld



magnetisches Feld eines Stabmagneten



...und wie sieht es im Stabmagneten aus ? Genauso :



Trennen wir nun solch einen Stabmagneten :

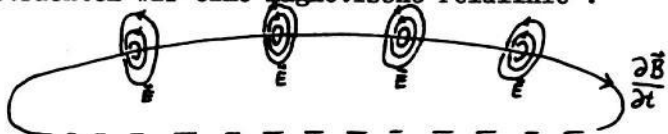


so erhalten wir zwei ; die Feldlinien bleiben geschlossen. Wir können den Stabmagneten trennen so oft, wie wir wollen, niemals erhalten wir etwas, aus dem magnetische Feldlinien

entstehen oder verschwinden, also keine magnetischen "Monopole".
Diese sehr wichtige Erkenntnis steckt in $\text{div } \vec{B} = 0$.

$$3) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Betrachten wir eine magnetische Feldlinie:



Ändern wir nun die magnetische Feldstärke ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$), so bauen sich um diese Feldlinie elektrische Wirbelfelder ($\text{rot } \vec{E}$) auf! Zur Richtung ist zu sagen, daß sie umgekehrt zur sog. Korkenzieherregel (kommt später!) verläuft. Das Minus vor $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dreht diese Normalrichtung um.

$$4) \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right)$$

Lassen wir zunächst einmal die Konstanten c^2 und ϵ_0 weg, da sie nur als Umrechnungsfaktoren dienen. Also

$$\text{rot } \vec{B} \sim \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$$

dies bringt uns zu folgenden Erkenntnissen:

1. Sowohl ein \vec{j} , d.h. ein elektrischer Strom also auch ein $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, also ein sich änderndes elektrisches Feld rufen ein $\text{rot } \vec{B}$ also ein magnetisches Wirbelfeld hervor.

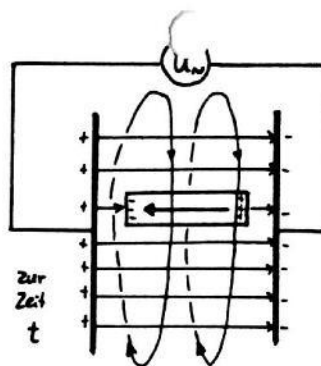
2. Lösen wir nach $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ auf:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \cdot \text{rot } \vec{B} - \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad \text{d.h.}$$

eine Änderung von \vec{E} kann ein magnetisches Wirbelfeld und/oder einen elektrischen Strom erzeugen

In einer Momentaufnahme:

In einem Kondensator, der mit Wechselstrom andauernd auf- und entladen wird, soll sich ein Stück Metall befinden.



Zu einer bestimmten Zeit t baut sich je nach Ladungsverteilung ein elektrisches Feld zwischen den Platten auf. Im Metallstück fließt dann ein elektrischer Strom. Um die elektrischen Feldlinien baut sich ein magnetisches Feld ($\text{rot } \vec{B}$) auf.

Damit sind die wesentlichen Eigenschaften des elektrischen und des magnetischen Feldes beschrieben.

c. Integralform

Hier soll nun ein kurzes mathematisches Kapitel folgen:

Bisher haben wir die sog. Differentialform der Maxwell'schen Gleichungen kennengelernt. Manchmal ist es aber auch nützlicher, die sogenannte Integralform zu kennen. Daraus lassen sich viele bekannte Gleichungen ableiten.

Zunächst noch einmal (zum Merken!) die Differentialform:

1) $\text{div } \vec{B} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	3) $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2) $\text{div } \vec{E} = 0$	4) $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right)$

Um die Differentialform in die Integralform zu überführen, wenden man die Integralsätze von Gauß und Stokes an:

$$\oint_{\mathcal{M}} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_V \text{div } \vec{B} \, dV \quad (\text{Gauss}) \quad \oint_{\mathcal{M}} = \text{geschlossenes Integral über die Fläche } \mathcal{M} \quad (d\vec{a} = \text{Flächenelement})$$

$$\int_V = \text{Volumenintegral} \quad dV = \text{Volumenelement}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (\text{Stokes}) \quad \oint_S = \text{geschlossenes Wegintegral} \quad d\vec{s} = \text{Weglement}$$

$$\int_A = \text{Flächenintegral} \quad d\vec{a} = \text{Flächenelement}$$

(\vec{B} = irgendein Vektor)

Umrechnung :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_V dV = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_H \vec{E} d\vec{s}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \int_V 0 dV = 0 = \oint_H \vec{B} d\vec{s}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \int_H \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{s} = - \int_H \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} = \oint_C \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_H \vec{B} d\vec{s}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \int_H \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{s} = \int_H \left(\frac{1}{c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{s} = \frac{1}{c^2} \int_H \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$= \oint_C \vec{B} d\vec{s} = \frac{1}{c^2} \int_H \vec{j} d\vec{s} + \frac{1}{c^2} \int_H \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} =$$

$$= \frac{I}{\epsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \int_H \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s}$$

Daraus ergeben sich dann die Integralformen :

$$1') \quad \oint_H \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad 3') \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_H \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$2') \quad \oint_H \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad 4') \quad c^2 \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_H \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} + \frac{I}{\epsilon_0}$$

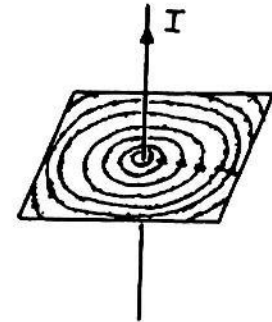
Auf diese Gleichungen werden wir später noch zurückgreifen. Zwar sind die Differentialformen einleuchtender (die Vorstellungen von Quellen, Senken und Wirbelfeldern sind recht nützlich) aber die Integralformen haben den Vorteil, daß sich daraus alle möglichen Beziehungen ergeben, die zum Teil aus der Schule schon bekannt sind.

3. Magnetfelder

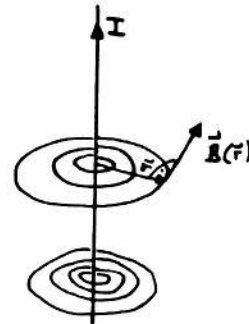
Man kann Magnetfelder erzeugen, indem man irgendwelche Konfigurationen von stromdurchflossenen Leitern zu Hilfe nimmt. Darstellen kann man diese Magnetfelder durch Eisenfeilspäne, die sich längs der Feldlinien anordnen, da sie durch das Magnetfeld magnetisiert werden und sich im Magnetfeld orientieren. Berechnen wir nun (anhand der Maxwell-Gleichungen) die Magnetfelder von verschiedenen Leiteranordnungen : gerader Draht, Spule.

a) ...um einen geraden Draht

Um einen geraden Draht bilden sich konzentrische magnetische Feldlinien. Dies kann man sichtbar machen, wenn man einen geraden Draht senkrecht durch einen Karton laufen läßt und auf diesem Karton Eisenfeilspäne verteilt. Diese ordnet sich dann kreisförmig nach den Feldlinien des magnetischen Feldes.



Machen wir solch ein Experiment, und messen die elektrische Feldstärke (zum Beispiel mit einer Spule, die an einen Volt-Meter angeschlossen ist - Induktion, vgl. entsprechendes Kapitel), so stellen wir folgendes fest :



1. je größer wir den Strom durch dem Draht machen, desto größer wird \vec{B} d.h. $|\vec{B}| \sim I$.
2. Je weiter wir uns vom Draht entfernen, desto kleiner wird B (linear), d.h. $|\vec{B}| \sim \frac{1}{r}$

Insgesamt können wir sagen, daß gilt

$$B = C \cdot \frac{I}{r} \quad (C = \text{Proport.faktor})$$

Diesen Proportionalitätsfaktor wollen wir nun finden und außerdem mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen die Proportionalität zwischen B und I/r zeigen.

Wählen wir die Maxwell-Gleichung 4), da nur dort der Strom I berücksichtigt ist :

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Wie integrieren wir aber rot \vec{B} , um schließlich \vec{B} explizit zu erhalten ? Nun, wir wählen einfach die schon integrierte Form

$$4') \quad c^2 \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{a} + \frac{I}{\epsilon_0}$$

Nun haben wir aber einen geraden Draht vorliegen, der mit Gleichstrom durchflossen werden soll. Das heißt, daß das elektrische Feld, das an unserem Draht anliegt (und von einer Batterie verursacht wird) ein konstantes Feld ist. Daher ist

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \text{ und der Term } \int_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{a} \text{ in Gleichung 4')} \text{ fällt heraus.}$$

$$\text{also gilt hier } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}$$

Daraus berechnen wir nun B :

ds ist ein geschlossener Integrationsweg (bzw. das dazugehörige Wegelement). Wählen wir dies als konzentrischen Kreis um den Leiter (so wie auch die Feldlinien verlaufen), so ist auf diesem Weg B immer konstant, also gilt

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint_S ds = B 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}$$

Warum nun ist $\oint_S ds = 2\pi r$? Nun, was heißt $\oint ds$? Dabei handelt es sich um ein geschlossenes Kreisintegral. Und genau, wie ein normales Integral

$\int_0^s ds = s$ (die gesamte Länge, über die integriert wird) ist eben

$\oint ds = \text{Umfang}$ (der gesamte Umfang, über den integriert wird).

$$\text{Somit ergibt sich : } B = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{I}{\epsilon_0 c^2}$$

daß bedeutet, daß B vom Radius (also vom Drahtabstand) abhängt - und das ist ja auch ganz logisch.

Schreiben wir es noch einmal hin :

Das Magnetfeld um einen geraden Leiter im Abstand r ist

$$B(r) = \frac{I}{r} \cdot \frac{1}{2\pi \epsilon_0 c^2}$$

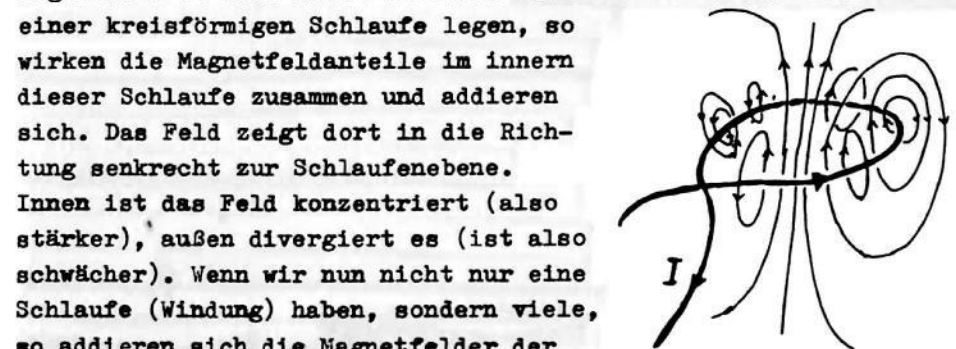
(Damit haben wir auch unsere Proportionalitätskonstante C gefunden $C = 1/2\pi \epsilon_0 c^2$, wie man sieht, alles nur Konstanten).

b) ... in einer stromdurchflossenen Spule

Experimentieren wir mit Spulen verschiedener Länge und Dicke, so stellen wir fest, daß das Magnetfeld im Innern der Spule umso stärker ist, je länger die Spule ist. Und ist sie sehr lang, so ist B außen vernachlässigbar klein.

Wieso ?

Nun - überlegen wir einmal : Wir wählen eine kleine Spule mit sagen wir 200 Windungen und eine ganz lange Spule mit 10000 Wdg. Bei beiden legen wir einen Strom I an (der bei beiden gleich sein soll). Nun wissen wir, daß ein gerader Draht ein konzentrisches Magnetfeld um sich herum aufbaut. Wenn wir nun diesen Draht zu einer kreisförmigen Schlaufe legen, so wirken die Magnetfeldanteile im Innern dieser Schlaufe zusammen und addieren sich. Das Feld zeigt dort in die Richtung senkrecht zur Schlaufenebene. Innen ist das Feld konzentriert (also stärker), außen divergiert es (ist also schwächer). Wenn wir nun nicht nur eine Schlaufe (Windung) haben, sondern viele, so addieren sich die Magnetfelder der einzelnen Windungen. Klar ! Also muß das Magnetfeld einer Spule proportional zur Windungszahl sein. Deswegen ist also das Feld im Innern einer langen Spule stärker als in einer kurzen Spule. Warum ist aber bei der langen Spule der äußere Anteil vernachlässigbar, bei der kurzen Spule nicht ?



Betrachten wir dies energetisch (das ist immer gut !)
 Wir haben zwei Spulen, eine lange, eine kurze. Durch beide läuft der gleiche Strom. Also erhalten beide gleichviel elektrische Energie. Wenn wir nun annehmen, die Spulen seien aus dickem, sehr leitfähigem Draht gewickelt (um den ohmschen Widerstand bei beiden klein zu halten), können wir davon ausgehen, daß bei beiden Spulen ungefähr gleich viel Energie in magnetische Energie verwandelt wird. Hat nun die lange Spule innen ein stärkeres Feld (also mehr magnetische Energie im Innern) als die kurze Spule, muß sie zwangsläufig außen entsprechend weniger magnetische Energie (also ein kleineres Feld) haben, als die kurze Spule. Insgesamt können wir sagen, daß das Magnetfeld einer Spule proportional zur Windungszahl und umgekehrt proportional zu ihrer Länge ist. Ebenso ist es (genau wie bei dem langen Draht) proportional zum Strom I, der durch sie fließt :

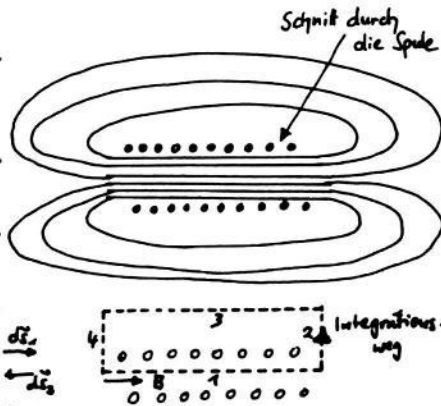
$$B \sim \frac{n \cdot I}{l} \quad \text{oder} \quad B = C' \frac{n \cdot I}{l}$$

(wobei n die Windungszahl, l die Spulenlänge, I der Strom und C' wieder eine Proportionalitätskonstante ist).

Wollen wir nun wieder die Maxwell-Gleichung 4') anwenden, um das bisherige zu verifizieren und um C' zu berechnen :

Zunächst fragen wir nach dem Integrationsweg.

Wie liegen eigentlich die Feldlinien bei solch einer Spule ?
 Oben sind sie so gezeichnet, als seien es keine geschlossenen Feldlinien. Aber das ist nur ein Ausschnitt. Genaugenommen sehen sie etwa so aus, wie in nebenstehender Zeichnung. Wie legen wir dann den Integrationsweg ? Am besten genauso, nur mit dem Unterschied, daß wir den Weg etwas idealisieren und in vier lineare Wege aufspalten. Denn wir können das geschlossene Wegintegral auch so schreiben :



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{s}_1 + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{s}_2 + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{s}_3 + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{s}_4$$

Wo nun aber \vec{B} senkrecht zu \vec{s} steht ist $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$, da \vec{B} und $d\vec{s}$ Vektoren sind und $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ ein Skalarprodukt. ebenso können wir schreiben, dort wo \vec{B} und $d\vec{s}$ parallel sind :

$\vec{B} \cdot d\vec{s} = |\vec{B}| |d\vec{s}|$ da der $\cos 0^\circ = 1$ ist. Also ergibt sich insgesamt

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int B_{\text{innen}} ds_1 + \int B_{\text{außen}} ds_3 = \int B_{\text{innen}} ds_1$$

(da wir bei der langen Spule $B_{\text{außen}}$ gegenüber B_{innen} vernachlässigen können).

$$\text{also } \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int B_{\text{innen}} ds_1 = \frac{\text{Strom}}{\epsilon_0 \cdot c^2}$$

$$\text{nun ist } \int B_{\text{innen}} ds_1 = B_{\text{innen}} \int ds_1 = B_{\text{innen}} \cdot l$$

wie groß ist der Strom ? I ? Nein - nicht ganz, denn jede Windung trägt mit dem Strom I zum Magnetfeld bei ! Daher müssen wir für den Strom nI einsetzen :

$$B_{\text{innen}} \cdot l = \frac{n \cdot I}{\epsilon_0 \cdot c^2} \quad \text{bzw.}$$

Das Magnetfeld im Innern einer langen Spule ist

$$B = \frac{n \cdot I}{l \cdot \epsilon_0 \cdot c^2}$$

So - jetzt mal was ganz anderes :

Überall schleppen wir dieses $\epsilon_0 \cdot c^2$ mit uns herum.

Was ist das eigentlich ? wo kommt es her ?

Nun - das ϵ_0 kennen wir schon aus der Elektrostatik. Dort war es eine Konstante, die dazu beitrug, daß elektrische und mechanische Größen miteinander verknüpft wurden. Erinnern wir uns : Wo tauchte ϵ_0 zum erstenmal auf ? Beim Coulomb'schen Gesetz. Auf der einen Seite stand eine Kraft (in Newton), auf der anderen Seite stand das Produkt zweier Ladungen (historisch in Coulomb) durch das Quadrat einer Strecke (in Meter²). Nun mußte eine Größe her, die diese elektrischen mit den mechanischen Größen verband. Und das war ϵ_0 (bzw. der Faktor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$).

Es wäre heute möglich, auf solche Faktoren zu verzichten, wenn man ein Einheitensystem entwickeln würde, was nicht mehr aus elektrischen, mechanischen, thermodynamischen ... Einheiten bestehen würde. Dann müßte man aber alle physikalischen Begriffe und Größen neu definieren und die ganze Sache wäre zwar elegant und logisch, aber eine solche Nomenklatur hätte zur Folge, daß alle Leute, die sich schon mal mit Physik befaßt haben, alles neu lernen müßte, und das ist ein bißchen viel verlangt.

Zurück zu $\epsilon_0 c^2$. Woher kommt jetzt dieses c^2 ? Das ist doch die Lichtgeschwindigkeit. Was hat die denn mit Magnetismus zu tun? Nun - eine ganze Menge:

Zwar waren magnetische Erscheinungen schon lange vor Einstein bekannt, aber sie konnten nicht erklärt werden. Es war nicht möglich zu verstehen, warum ein stromdurchflossener Leiter von einem Magnetfeld begleitet wird. Oder warum ein sich änderndes magnetisches Feld einer Spannung induziert.

Erklären konnte man all dies erst mit der Relativitätstheorie. So verrückt das klingt, aber nur bei relativistischer Betrachtung gelangt man erst zu magnetischen Kräften. Ich will versuchen, das kurz und einfach zu erläutern:

Zunächst einige Bemerkungen zur Relativitätstheorie. Seit Einstein 1904 seine spezielle Relativitätstheorie aufgestellt hat, wissen wir alles ist relativ. Nun, das tägliche Leben zeigte dies vorher schon, aber es war neu, daß so etwas exaktes wie die Physik mit ihren Längen- und Massendefinitionen usw. relativ sein könnte; und doch ist es so: ein Körper, der sich gegenüber einem ruhenden Beobachter sehr schnell bewegt, ist von diesem aus gesehen kürzer und schwerer, als ein adäquater Körper, der in Ruhe zum Beobachter ist. Erreicht er die Lichtgeschwindigkeit, so wird er (immer vom ruhenden Beobachter aus gesehen) unendlich klein und unendlich schwer. Ein Grund dafür, daß die Lichtgeschwindigkeit von massebehafteten Körpern nicht erreicht werden kann, da man eine unendlich große Energie bräuchte, um einen unendlich schweren Körper zu beschleunigen.

Beobachtet nun ein ruhender Beobachter einen relativ dazu bewegten geladenen Leiter, so ist dessen Ladungsdichte (aufgrund der relativistischen Längenkontraktion) vergrößert im Gegensatz zur entsprechenden ruhenden Leiter. Dadurch ist die Kraft einer ruhenden Probeladung auf den bewegten Leiter größer, als auf einen ruhenden. Es wirkt somit vom bewegten Leiter eine zusätzliche Kraft. Diese kann man berechnen und stellt fest, daß sie genau so groß ist, wie die magnetische Kraft aus einem Magnetfeld, das durch in einem Leiter bewegte Elektronen (eben elektrischen Strom) erzeugt wurde. Rechnet man diese zusätzliche Magnetkraft aus, so steckt in dieser ein Term c^2 , der aus der relativistischen Gleichung für die Längenänderung bei sehr hohen Geschwindigkeiten herrührt.

Somit ist auch die Herkunft von e^2 geklärt und wir können weiter-

hin beruhigt den Faktor $\epsilon_0 c^2$ mitschleppen. Nur vereinfachen wir das ganze und machen aus der Dielektrizitätskonstanten ϵ_0 die dazu analoge Induktionskonstante μ_0 (die im magnetischen Fall dem elektrischen entspricht):

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{sec}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vsec}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

Zu guter Letzt soll noch das Magnetfeld in der Mitte eines Kreisstroms I angegeben werden. Ein Strom laufe auf einer Kreisbahn (einem kreisförmigen geschlossenen Leiter) mit dem Radius R . Dann ist das magnetische Feld im Zentrum (ohne die komplizierte Herleitung)

$$B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{I}{2R}$$

c) magnetische Feldstärke

Fassen wir noch einmal kurz zusammen, was wir bisher an Magnetfeldern ermittelt haben:

Magnetfeld um einen geraden Leiter

$$B = \frac{I \mu_0}{2\pi r}$$

in einer langen Spule

$$B = \frac{n I \mu_0}{l}$$

in der Mitte eines Kreisstroms

$$B = \frac{I \mu_0}{2 \cdot R}$$

so ergibt sich für die Einheit der magnetischen Feldstärke:

$$[B] = \frac{\text{Strom} \cdot [\mu_0]}{\text{Länge}} = \frac{\text{A} \cdot \text{V} \cdot \text{sec}}{\text{m} \cdot \text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{sec}}{\text{m}^2} := \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (1 \text{ Vsec} = 1 \text{ Wb})$$

(Wb = Weber)

Noch ein Wort zu den Einheiten:

Früher nannte man die magnetische Feldstärke H und die magnetische Induktion (kommt bald!) nannte man B . Beide hängen so zusammen:

$$B = \mu_0 H \quad [\text{im Vakuum}]$$

Heute verwendet man für die Feldstärke die Abkürzung B . Das hängt damit zusammen, daß man heute das SI-System verwendet und nicht mehr das alte cgs-System. In vielen Lehrbüchern wird noch mit der

II. ELEKTROMAGNETISCHE INDUKTION

1. Faraday's Versuche

Feldstärke H gearbeitet. Sie hatte den Vorteil, daß (rechnet man im cgs-System) der Faktor $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 1$ war und zwar ohne Dimension.

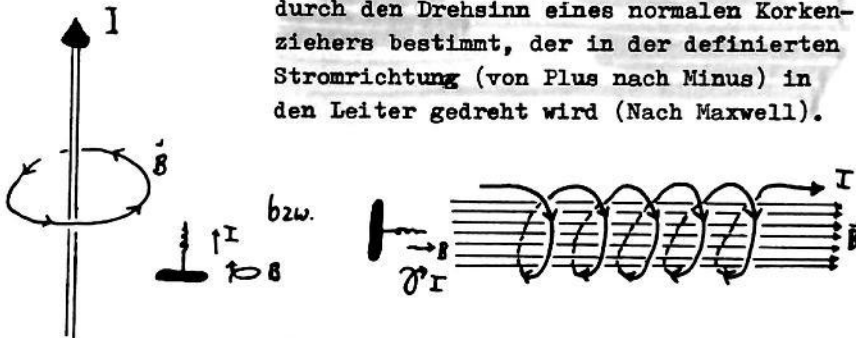
Das erleichterte die Rechnung auf magnetischem Gebiet erheblich. Dadurch wurde die Einheitenrechnung mit elektrischen Größen stark erschwert und unanschaulich.

Außerdem hat das neue System den Vorteil, daß man die Zusammenhänge zu den anderen Gebieten (E-Lehre, Mechanik, Relativitätstheorie etc.) aus den Gleichungen errathen kann. Das geht nicht, wenn man die Lichtgeschwindigkeit willkürlich gleich 1 setzt.

d) Richtung der Feldstärke

Korkenzieherregel :

Die Richtung der magnetischen Feldlinien eines stromdurchflossenen Leiters wird durch den Drehsinn eines normalen Korkenziehers bestimmt, der in der definierten Stromrichtung (von Plus nach Minus) in den Leiter gedreht wird (Nach Maxwell).



Wie wir vorhin bei der Berechnung von Magnetfeldern schon gesehen haben, kann man mit Hilfe der modifizierten Maxwell-Gleichung

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad \text{bzw.} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}$$

Magnetfelder berechnen, die von irgendwelchen Leiteranordnungen hervorgerufen werden.

Wenn irgendein Leiter mit Gleichstrom durchflossen wird, so gilt dieses "Durchflutungsgesetz"

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}$$

In Worten : Das Linienintegral der Feldstärke B über jede Geschlossene Kurve s = Gesamtstrom, der die von s umschlossene Fläche durchsetzt, geteilt durch $\epsilon_0 \cdot c^2$.

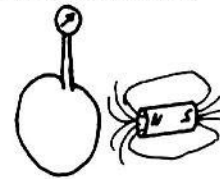
Elektromagnetische Induktion = Erregung elektrischer Spannungen durch zeitlich veränderliche Magnetfelder :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d.h. : ändern wir ein magnetisches Feld mit der Zeit, so erhalten wir ein elektrisches Wirbelfeld. An zwei verschiedenen Punkten hat dieses elektrische Feld eine Potentialdifferenz, also eine elektrische Spannung.

Experimente von Michael Faraday (1831) :

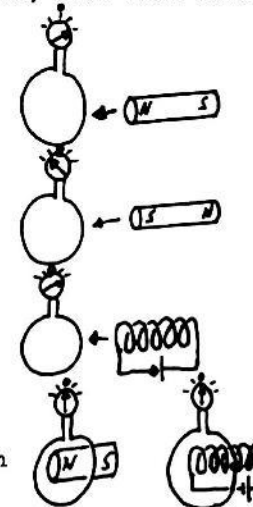
Versuchsaufbau :



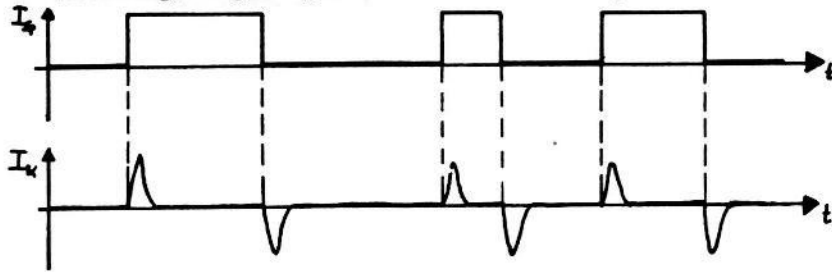
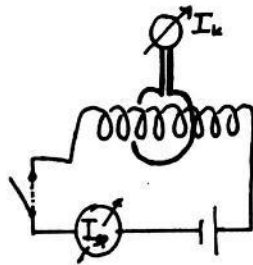
1. eine geschlossene Leiterschleife, die an ein ballistisches Galvanometer angeschlossen ist.
2. ein Permanentmagnet

Das ballistische Galvanometer reagiert aufgrund seiner gedämpften Schwingung ziemlich träge, d.h. es zeigt nicht jede kleine Stromänderung an, sondern nur sogenannte Stromstöße, d.h. also eine durch die Leiterschleife geflossene Gesamtladung.

1. Nähert man ein Permanentmagnet einer Leiterschleife, so wird in ihr ein Strom induziert.
2. Nähert man den anderen Pol des Permanentmagneten, so wird der gleiche Strom entgegengesetzter Richtung ind.
3. Dasselbe wie ein Permanentmagnet vermag auch eine stromdurchflossene Spule (Elektromagnet) zu leisten.
4. Beläßt man den Magneten in der Leiterschleife (ohne Bewegung), so ergibt sich kein induzierter Stromstoß.



5. Schaltet man den Strom eines Elektromagneten, um den die Schleife fest angebracht ist, ein und aus, so wird jedesmal ein Stromstoß (mit abwechselnder Richtung) angezeigt:



Andere Möglichkeiten der Induktion siehe z.B. bei Gerthsen Kap. 7.2.1. unter den Nummern 1. - 13.

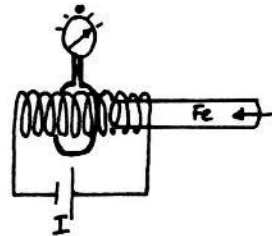
Zusammenfassend stellt man folgendes fest :

Eine Änderung des magnetischen Feldes induziert in der Nähe eine elektrische Spannung, die in einer Leiterschleife einen Stromfluß bewirkt.

Wohlgemerkt : nur die Änderung des Magnetfeldes induziert eine Spannung, nicht das Magnetfeld selbst !

Die durch die Leiterschleife transportierte Ladungsmenge ist vom Anfangs- und Endzustand des Magnetfeldes und seiner Orientierung abhängig.

Schiebt man in die Spule (mit konstantem Spulenstrom), die fest im Innern einer Leiterschleife montiert ist, einen Eisenkern, so sehen wir, daß auch da ein Strom induziert wird. Das bedeutet : Nicht allein das Magnetfeld der Spule kann bei seiner Änderung einen Strom induzieren, sondern es kommt nach auf die Materie an, in der das Magnetfeld sich ändert.



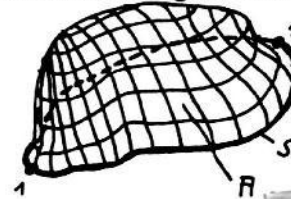
Darauf kommen wir später noch zu sprechen, wenn es um die Magnetisierung von Materie geht.

2. Induktionsgesetz

Wir nehmen nun (um das ganze quantitativ mit einer Formel auszudrücken) wieder eine der Maxwell-Gleichungen her :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \dot{\vec{B}} \quad \text{oder} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

Letzteres besagt : Ist s eine geschlossene Kurve, A eine von s aufgespannte Fläche, so gilt eben



$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a}, \text{ allgemeiner}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{gilt in jedem Punkt})$$

Wir nennen den Term $\int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = \Phi$ den magnetischen Fluß des Magnetfeldes \vec{B} durch die Fläche A .

Wäre \vec{B} überall gleich, so könnte man das Integral durch eine Multiplikation ersetzen :

$$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Das bedeutet, daß der magnetische Fluß einfach Magnetfeld mal durchsetzte Fläche ist. Ein einfaches Maß ist dabei die Zahl der Magnetfeldlinien pro durchsetzte Fläche, also die Flächendichte der Magnetfeldlinien.

Nun ist es aber so, daß das Magnetfeld \vec{B} nicht an allen Punkten gleich ist; es handelt sich um ein Vektorfeld, also müssen wir die Einzelbeiträge $\Delta \vec{B}_1$ mit den einzelnen Flächenelementen $\Delta \vec{a}$ multiplizieren, alle diese aufsummieren, oder (wenn wir die Flächenelemente $\rightarrow 0$ gehen lassen) integrieren.

(Dies nur noch einmal zur Erinnerung, was "Integral" eigentlich heißt) So - also mit dem magnetischen Fluß gilt :

$$- \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \dot{\Phi}$$

Sehen wir uns die andere Seite der Gleichung an :

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{vorn}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{hinten}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (\text{wenn wir die geschlossene Kurve } s \text{ in zwei Teilkurven aufteilen (siehe Figur).})$$

Aus Kapitel D. I. 4. wissen wir (vielleicht noch - schön wär's) daß das Integral $\int_A \vec{B} \cdot d\vec{s} = \varphi(r)$ einem Potential zwischen den

Punkten 1 und 2 entspricht.

Alle Potentiale zusammen bilden dann die induzierte Spannung U_{ind} :

Also ergibt sich insgesamt :

$$U_{ind} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \dot{\Phi} .$$

Kurz $U_{ind} = - \dot{\Phi}$ Dies ist das sogenannte **Induktionsgesetz**

in Worten : die induzierte Spannung ist gleich der negativen Änderung des magnetischen Flusses !

Jetzt verstehen wir auch die Faraday-Versuche? Immer, wenn der magnetische Fluß geändert wurde (d.h. die Zahl der magnetischen Feldlinien in der Leiterschleife), so wurde ein entsprechender Stromstoß in der Schleife induziert.

Das Ganze mit dem Fluß nun noch etwas genauer :

a) magnetischer Fluß

Was ist das also nochmal ' Fluß ' ?

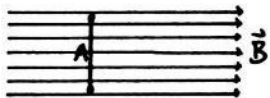
Der magnetische Fluß ist vergleichbar mit der Zahl der Feldlinien, die durch die Leiterschleife treten. Eine Änderung dieser Zahl (der Feldliniendichte) entspricht der induzierten Spannung.

Hier will ich noch einmal das Integral $\int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \Phi$ für den Fluß erklären.

Es ist sehr wichtig, daß solche Dinge klar verstanden werden : wann man differenziert; was ist ein Integral in der Physik; wo verwendet man so etwas... Deshalb noch einmal genau :

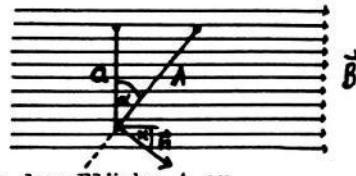
$$\text{Was heißt } \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \Phi$$

Wir vereinfachen die Sache zunächst, indem wir annehmen, daß das Magnetfeld \vec{B} konstant und senkrecht zur Fläche A steht.



Dann sagen wir: der Magnetische Fluß sei das Produkt aus Magnetfeld mal Fläche:

Steht nun aber \vec{B} nicht senkrecht zu \vec{A} , so müssen wir die Sache vektoriell anpacken : Der Normalenvektor \vec{n} steht senkrecht zur Fläche A, hat aber den Betrag 1. Er gibt somit die Orientierung der Fläche A an.



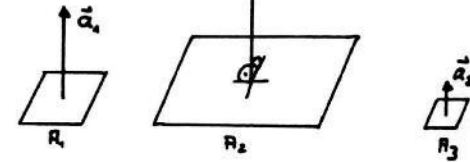
Damit gilt für den Fluß : $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{a} = |\vec{B}| |\vec{a}| \cos \alpha = B \cdot A \cos(\vec{B}; \vec{n})$

$$\text{oder } \Phi = \vec{B} \cdot \vec{a}$$

\vec{a} ist ein Vektor, der die Größe und die "Richtung" der Fläche A angibt. Er steht senkrecht auf der Fläche und hat den Betrag A, also die Größe dieser Fläche.

Rechts sieht man drei Beispiele für solche Flächenvektoren.

Für unseren Fluß haben wir nun



$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{a}$ erhalten, das

ist das Produkt des Magnetfeldes mit der Projektion der Fläche A senkrecht zum Feld \vec{B} .

Dies gilt allerdings nur, wenn die Fläche plan ist (also eben).

Was tun wir nun, wenn die Fläche gekrümmt ist?

Dann zerteilen wir diese Fläche in winzig kleine Flächenelemente

$\Delta \vec{a}_i$ und summieren die einzelnen Produkte auf :

$$\Phi \approx \sum_i \vec{B} \cdot \Delta \vec{a}_i \quad \text{aber, was ist das ?}$$

Lassen wir die Flächenelemente infinitesimal klein werden : $\Delta \vec{a}_i \rightarrow d\vec{a}$

Dann müssen wir aber auch $\sum \rightarrow \int$ gehen lassen : also

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

Das Integral geht natürlich über die ganze Fläche A.

b) Lenz'sche Regel

Wir fanden $U_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}$; woher kommt das Minuszeichen ?

Mit ein wenig Blättern hier findet man unter dem Kapitel "Maxwell-Gleichungen"

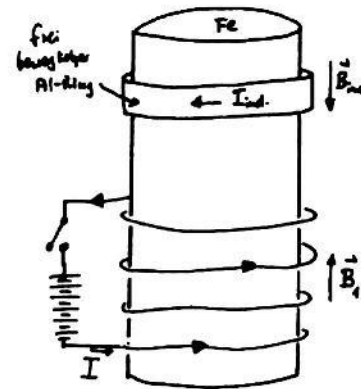
$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

Aber diese Gleichungen sind ja erst nach vielen experimentellen Untersuchungen erstellt worden.

Hier ein Beispiel dazu :

III. SELBSTINDUKTION

1. Induktivität

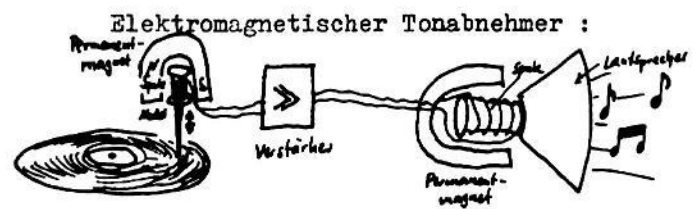


Der Versuch von Eliku und Thomson :
 Schaltet man den Erregerkreis I ein, so fließt der Strom I. Dieser erzeugt in der Spule das Magnetfeld \vec{B}_1 . Beziehungswise : Direkt beim Einschalten von I resultiert die Änderung $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \Rightarrow$ auch eine Flußänderung $\frac{d\Phi}{dt}$. Diese erzeugt im Aluminium-Ring eine Spannung U_{ind} , die einen Ringstrom I_{ind} erzeugt. Und dieser wiederum induziert ein Magnetfeld \vec{B}_{ind} . Was passiert ?
 Der Ring geht nach oben. D.h. \vec{B}_{ind} und \vec{B}_1 haben verschiedene Vorzeichen. Daraus folgerte Lenz seine berühmte Regel :

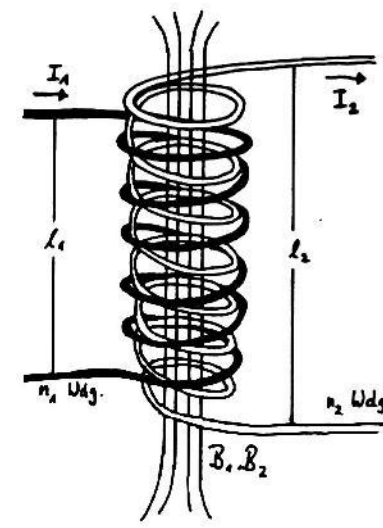
Die induzierte Spannung erzeugt einen Induktionsstrom, der stets so gerichtet ist, daß er den ihn erzeugenden Vorgang zu hemmen versucht (Lenz'sche Regel).

Und das ist die Erklärung für das Minuszeichen im Induktionsgesetz.

c) eine Anwendung : magnetischer Tonabnehmer



Die von der Schallplatte (in die eine schwingungsförmige Rille eingeritzt ist) über die Nadel auf die Spule übertragenen Schwingungen bewegen die Spule in einem permanenten Magnetfeld. Hier wird eine Spannung induziert. Diese wird verstärkt und im Lautsprecher wieder auf eine Spule gegeben. Dort erzeugt sie ein sich änderndes Magnetfeld. Dieses wechselwirkt mit dem konstanten Feld des Permanentmagneten. Somit bewegt sich die Spule im Rhythmus der Schallplattenschwingungen.
 An der Spule nun ist ein Papptrichter befestigt, der die Luft im gleichen Rhythmus in Druckschwankungen versetzt, den wir als Schall empfinden.
 Bei der Plattenaufnahme wird genau der entgegengesetzte Weg beschrieben.



Zwei Spulen seien übereinandergesteckt. Beide seien sie sehr lang und sie sollen sich eng umschließen.
 Der Strom I_1 erzeugt ein Magnetfeld B_1 . Dieses wiederum erzeugt eine Spannung U_{ind2} und diese einen Induktionsstrom I_2 . Dieses wollen wir quantitativ betrachten :

Auf Seite 162 hatten wir die Gleichung für das Magnetfeld, das sich in einer Spule der Länge l , mit Windungszahl n bildet, wenn ein Strom I die Spule durchfließt :

$$B = \frac{n \cdot I}{l \cdot \epsilon_0 c^2}$$

Die schwarze Spule in unserer Zeichnung habe die Windungszahl n_1 und die Länge l_1 . Dann ergibt sich (falls der Strom I_1 fließt) das Magnetfeld B_1 :

$$B_1 = \frac{I_1 \cdot n_1}{\epsilon_0 c^2 \cdot l_1} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{I_1 n_1}{l_1} = \mu_0 \cdot \frac{I_1 n_1}{l_1}$$

Beträgt die Querschnittsfläche bei Spule I (bei der schwarzen Spule) A_1 und bei Spule II, A_2 , so ist der magnetische Fluß Φ_2 in einer Spulenwindung bei Spule II gerade

$$\Phi_2' = A_2 \cdot B_1$$

Das ist der Fluß, der durch das Magnetfeld B_1 (induziert in Spule I durch Strom I_1) in Spule II erzeugt wird.

Der gesamte Fluß in Spule II ist daher : $\Phi_2 = n_2 \cdot A_2 \cdot B_1$ oder auch

$$\Phi_2 = \mu_0 \cdot \frac{n_1 n_2}{l_1} \cdot A_2 \cdot I_1$$

Da $U_{ind2} = - \frac{d\Phi_2}{dt}$ wobei U_{ind2} die in Spule II von Magnetfeld B_1 induzierte Spannung ist, ergibt sich

$$U_{ind2} = - \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\mu_0 \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{l_1} \cdot A_2}_{\text{const.}} \cdot I_1 \right) = - \mu_0 \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{l_1} \cdot A_2 \cdot \frac{dI_1}{dt}$$

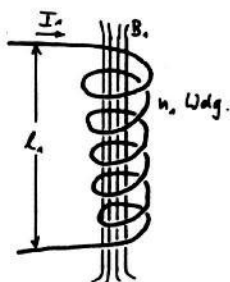
die vorgezogenen Konstanten bezeichnen wir mit einem neuen Buchstaben

$$U_{\text{ind}_2} = -L_{12} \cdot \frac{dI_1}{dt} \quad \text{also} \quad L_{12} = \mu_0 \cdot \frac{n_1 n_2}{l_1} \cdot A_2$$

L_{12} heißt "Gegeninduktivität"

In unserem Beispiel hat der Strom I_1 in der schwarzen Spule (I) über das Magnetfeld B_1 in der Spule II eine Spannung induziert. Beide Größen I_1 und U_{ind_2} sind durch die Gegeninduktivität L_{12} (in der die geometrischen Verhältnisse der Spulen eingehen) miteinander gekoppelt: $U_{\text{ind}_2} = -L_{12} \cdot \frac{dI_1}{dt}$

Wenn aber nun bei zwei ineinandergesteckten Spulen der Strom der einen Spule über das induzierte Magnetfeld in der anderen Spule wiederum eine Spannung erzeugt, warum soll dann nicht der Strom in einer einzigen Spule über das induzierte Magnetfeld in derselben Spule eine Spannung induzieren?



Der Strom I baut in der Spule den magnetischen Fluß Φ_1 auf. Wird dieser Fluß geändert, so erzeugt er in der gleichen Spule die induzierte Spannung U_{ind} , somit gilt

$$I_1 \Rightarrow B_1 = \mu_0 \frac{n_1}{l_1} \cdot I_1 \Rightarrow \Phi_1 = n_1 B_1 A_1$$

$$\Phi_1 = \mu_0 \cdot \frac{n_1^2 A_1}{l_1} \cdot I_1 \quad \text{und somit, da } U_{\text{ind}_1} = - \frac{d\Phi_1}{dt}$$

gilt für die in der Spule durch sein eigenes Magnetfeld B_1 erzeugte Spannung $U_{\text{ind}} = - \mu_0 \cdot \frac{n_1^2 \cdot A_1}{l_1} \cdot \frac{dI_1}{dt} = -L \cdot \frac{dI_1}{dt}$

mit $L = \mu_0 \cdot \frac{n^2 A}{l}$ dem sogenannten Selbstinduktionskoeffizient

Dieser Selbstinduktionskoeffizient L hängt nur von der Spulengeometrie ab.

Für eine Spule gilt $U_{\text{induziert}} = -L \dot{I}$

Nach der Lenz'schen Regel hemmt eine Selbstinduktion (also eine Spule) jede Stromänderung.

Fließt durch eine Spule ein Gleichstrom, so ändert sich dieser nicht und die Spule wirkt nur als Ohmscher Widerstand (aufgrund des normalen metallischen Stromwiderstandes im Leiter). Liegt aber ein zeitlich nicht konstanter Strom vor (Wechselstrom), so ändert sich dieser laufend, eine Hemmung dieses Stromes aufgrund der Selbstinduktion ist die Folge; daher wirkt eine Spule (abgesehen von ihrem ohmschen Widerstand) als Wechselstromwiderstand.

Betrachten wir wieder die beiden ineinandergesteckten Spulen.

Die Folge des Stromes I_1 waren zwei Spannungen:

$$U_{\text{ind}_2} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt} \quad \text{und} \quad U_{\text{ind}_1} = -L \frac{dI_1}{dt}$$

Für das Verhältnis dieser beiden Spannungen gilt:

$$\frac{U_{\text{ind}_2}}{U_{\text{ind}_1}} = \frac{-L_{12} \dot{I}_1}{-L \dot{I}_1} = \frac{L_{12}}{L} = \frac{\mu_0 \frac{n_1 n_2}{l_1} A_2}{\mu_0 \frac{n_1 n_1}{l_1} A_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{falls } A_1 = A_2)$$

d.h. das Verhältnis der Spannungen, die in den beiden Spulen induziert werden, hängt nur von Verhältnis der Windungszahlen der Spulen ab (falls die beiden Querschnitte gleich sind).

Darauf kommen wir noch einmal zurück, wenn wir im Kapitel Wechselstrom den Transformator besprechen, der auf diesem Zusammenhang beruht.

Noch kurz zur Einheit von L :

$$L = \mu_0 \cdot \frac{n^2 A}{l} = \left[\frac{\text{Vsec} \cdot \text{m}^2}{\text{Am} \cdot \text{m}} = \frac{\text{Vsec}}{\text{A}} = \text{Hy (Henry)} \right]$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \left[\frac{\text{Vm sec}^2}{\text{Asec m m}} = \frac{\text{Vsec}}{\text{Am}} \right]$$

Das heißt: eine Spule hat die Induktivität von 1 Henry, falls durch die Änderung der Stromstärke um 1 A/sec die Spannung von 1 Volt induziert wird.

2. Ein- und Ausschaltvorgänge (bei der Spule)

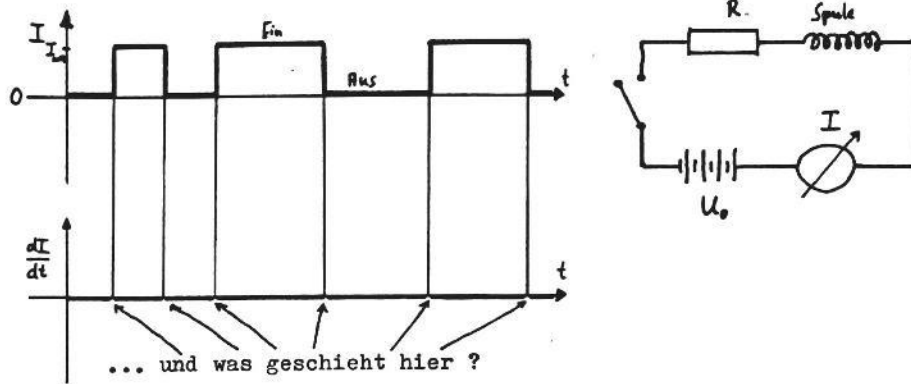
Betrachten wir nun einen Gleichstromkreis, in den eine Spule (Induktivität) eingebaut ist.

Ändert diese Spule im Gleichstromkreis etwas? Eigentlich nicht, da der Gleichstrom konstant ist und nur eine Stromänderung eine Spannung induziert:

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}$$

Falls $I = \text{const.}$, ist $U_{\text{ind}} = 0$, d.h. es passiert nichts. Gut.

Dieses ändert sich dann, wenn wir den Strom ein- und ausschalten. Dann ist er nämlich nicht mehr konstant:



Beginnen wir mit dem ohmschen Gesetz :

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{also hier} \quad I = \frac{\text{Summe aller im Kreis vorhandenen Spanngn.}}{\text{ohmscher Widerstand}}$$

$$I = \frac{U_0 + U_{\text{ind}}}{R} = \frac{U_0 + (-L \frac{dI}{dt})}{R}$$

$$\text{oder } I = \frac{U_0}{R} - \frac{L}{R} \frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad L \frac{dI}{dt} + R I = U_0$$

Dies ist eine Differentialgleichung (Dgl.) für I (I kommt normal vor und in einer zeitlichen Ableitung). Die Lösung solch einer Dgl. ist eine Funktion der Zeit : $I = I(t)$. Aber wie löst man die Dgl.? Antwort : " Gut geraten ist halb gewonnen! "

Man kann eine solche Differentialgleichung nicht explizit lösen, indem man nach I auflöst. Man kann nur probieren : man rät, wie $I(t)$ aussehen könnte (d.h. "man macht einen Ansatz"), setzt in die Dgl. ein und prüft, ob etwas richtiges herauskommt (ob links und rechts vom Gleichheitszeichen das gleiche steht).

So haben wir seinerzeit die Gleichungen bei den Schwingungen gelöst. Wir wußten vorher in etwa, was als Lösung herauskommen würde und hatten so mit dem Ansatz keine großen Schwierigkeiten.

Hier ist es nun so, daß wir überhaupt nicht wissen, was herauskommt. Da es sich hier aber um eine Dgl. 1. Grades handelt (es ist nur eine einfache Ableitung vorhanden), können wir auch eine andere Lösungsmöglichkeit nutzen : wir separieren die Variablen.

$$L \frac{dI}{dt} + R I = U_0 \quad | : L$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{U_0}{L} - \frac{R}{L} I = \frac{U_0 - R I}{L}$$

$$\text{oder auch} \quad \frac{dI}{(U_0 - R I)} = \frac{1}{L} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{U_0 - R I} = \frac{dt}{L}$$

$$\text{und integrieren :} \quad \int \frac{1}{U_0 - R I} \cdot dI = \int \frac{1}{L} dt = \frac{1}{L} \int dt = \frac{1}{L} t + \text{const.}$$

wie findet man nun das Integral $\int \frac{1}{U_0 - R I} dI$?

Indem man eine mathematische Formelsammlung benutzt. Dort findet man

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax + b) \quad ; \quad \text{hier ist } x = I, a = -R, b = U_0$$

$$\text{also gilt} \quad \int \frac{1}{U_0 - R I} dI = -\frac{1}{R} \ln(U_0 - R I)$$

Somit wurde aus unserer Dgl bisher :

$$-\frac{1}{R} \ln(U_0 - R I) = \frac{1}{L} t + \text{const.}$$

$$\ln(U_0 - R I) = -\frac{R}{L} t + \text{const.1} \quad | - \ln R$$

$$\ln(U_0 - R I) - \ln R = -\frac{R}{L} t + \underbrace{\text{const.1} - \ln R}_{\text{const.2}}$$

$$\ln \frac{U_0 - R I}{R} = \ln \left(\frac{U_0}{R} - I \right) = -\frac{R}{L} t + \text{const.2}$$

Jetzt können wir nach I auflösen :

Aber zuvor : wie groß ist diese Konstante const.2 ?

Diese finden wir, indem wir die Anfangsbedingungen betrachten.

Bei $t = 0$ ist $I = 0$; setzen wir diese Anfangsbedingungen ein :

$$\ln \left(\frac{U_0 - 0}{R} \right) = \ln \frac{U_0}{R} = 0 + \text{const.2} \quad \Rightarrow \quad \text{const.2} = \ln \frac{U_0}{R}$$

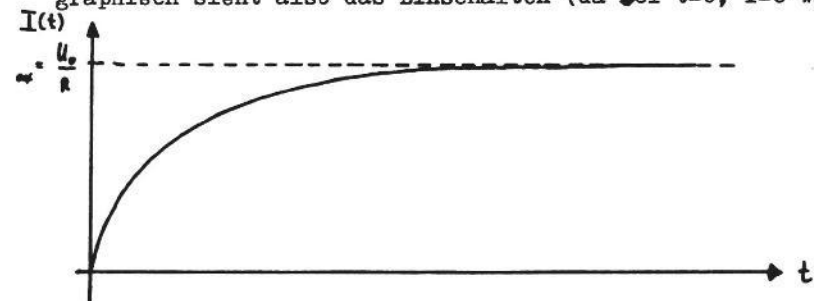
$$\text{somit ergibt sich} \quad \ln \left(\frac{U_0}{R} - I \right) = -\frac{R}{L} t + \ln \frac{U_0}{R}$$

UM den Logarithmus wegzubekommen, wenden wir die Exponentialfunktion an :

$$\left\{ \ln \left(\frac{U_0}{R} - I \right) \right\} = \left\{ -\frac{R}{L} t + \ln \frac{U_0}{R} \right\} = \left\{ -\frac{R}{L} t \right\} \cdot \left\{ \ln \frac{U_0}{R} \right\} = e^{-\frac{R}{L} t} \cdot \frac{U_0}{R}$$

$$\frac{U_0}{R} - I = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L} t} \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

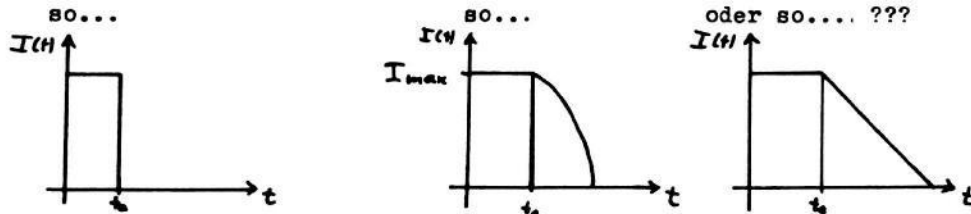
graphisch sieht also das Einschalten (da bei $t=0, I=0$ war !) so aus :



das bedeutet : für $t \rightarrow \infty$ geht $e^{-\frac{R}{L}t}$ gegen 0 und I hat

seinen Maximalwert $I_{\max} = U_0 / R$ erreicht.
Dies ist der gleiche Wert, der auch vorhin beim Fall konstanter Spannung U_0 gefunden wurde.

Wie sieht nun das ganze beim Ausschalten aus ?



Wir berechnen es :

wir hatten $L \frac{dI}{dt} + RI = U_0$, I war $I = \frac{U_0 + U_{\text{ind}}}{R}$

Nach der Ausschaltzeit t_a ist $U_0 = 0$. Also kann nur noch die Spannung U_{ind} einen Beitrag leisten. Wenn nicht, so ergibt sich ein Stromverlauf nach der ersten Zeichnung oben.

Unsere Dgl. wird mit $U_0 = 0$ zu $L \frac{dI}{dt} + RI = 0$

oder $\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I$ bzw. $\frac{dI}{-RI} = \frac{dt}{L}$ und integriert

$-\frac{1}{R} \int \frac{dI}{I} = \frac{1}{L} \int dt$ also $-\frac{1}{R} \cdot \ln I = \frac{1}{L} t + \text{const.}$

$\ln I = -\frac{R}{L} t + \text{const.}$

Auch hier suchen wir die Konstante wieder mittels der Anfangsbedingungen : Bei $t = 0$ ist $I = I_{\max}$ (die Stromstärke vor dem Ausschalten)

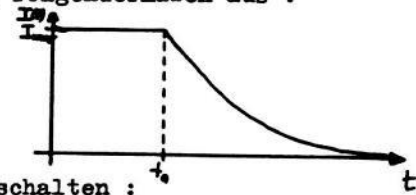
$\Rightarrow \ln I_{\max} = -\frac{R}{L} \cdot 0 + \text{const.} \Rightarrow \text{const.} = \ln I_{\max}$

$\ln I - \ln I_{\max} = \ln \frac{I}{I_{\max}} = -\frac{R}{L} t$

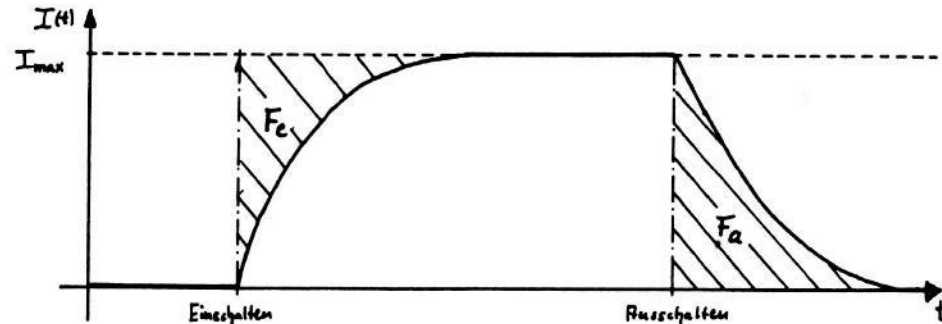
$e^{\left\{ \ln \frac{I}{I_{\max}} \right\}} = \frac{I}{I_{\max}} = e^{\left\{ -\frac{R}{L} t \right\}} \Rightarrow I(t) = I_{\max} e^{-\frac{R}{L} t}$

Im Diagramm sieht der Ausschaltvorgang folgendermaßen aus :

Die Stromstärke geht von I_{\max} im eingeschalteten Zustand exponentiell auf 0 zurück, wenn man den Stromkreis unterbricht.



Insgesamt erhält man beim Ein- und Ausschalten :



Eine kurze Energiebetrachtung :

Schalten wir den Stromkreis aus, so entnehmen wir der Stromquelle keine Energie mehr, es fließt aber noch ein Strom. Woher kommt diese Energie ? Sie kann eigentlich nur aus dem gebildeten Magnetfeld herkommen, das langsam in der Spule zusammenfällt unter Induzierung einer Spannung im Kreis.

Diese Energie muß (Energieerhaltungssatz !) beim Einschalten aus der Stromquelle in den Kreis transportiert werden.

Sie ist gleich der vom Strom I gegen die induzierte Spannung verrichtete Arbeit.

(D. h. bei der Kurve oben muß die Fläche F_e gleich der Fläche F_a sein)

$W = - \int_0^{t_a} I \cdot U_{\text{ind}} dt = \int_0^{t_a} I L \frac{dI}{dt} dt = L \int_0^{I_{\max}} I dI = \frac{1}{2} L I^2 \Big|_0^{I_{\max}} = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$

Die Energie des Magnetfeldes ist daher

$W = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$

3. Energiedichte des magnetischen Feldes

Wie groß ist nun die magnetische Energiedichte eines beliebigen Magnetfeldes ?

In einer langen Spule der Länge l, Querschnitt A mit n Windungen, durch die der Strom I fließt ist die magnetische Energie

$W = \frac{1}{2} L I^2$. Wie groß ist nun die Energiedichte ?

Die Energiedichte ist die Energie pro Volumen, also

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \frac{L}{V} I^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{I^2}{V} \mu_0 \frac{n_1^4 A_1}{l_1} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2 n_1^2 A_1}{l_1} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n^2 I^2}{l^2}$$

Da für das Magnetfeld einer Spule gilt : $B_{\text{Spule}} = \frac{n \cdot I}{l \epsilon_0 c^2}$

bzw. (wenn man $\frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ durch μ_0 ersetzt) :

$$B_{\text{Spule}} = \mu_0 \frac{I \cdot n}{l} \Rightarrow \mu_0 \frac{n^2 I^2}{l^2} = \frac{1}{\mu_0} \cdot B^2$$

Somit können wir die Energiedichte des Magnetischen Feldes durch die magnetische Feldstärke (bzw. durch die alte Schreibweise H) ausdrücken :

$$w = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} B^2$$

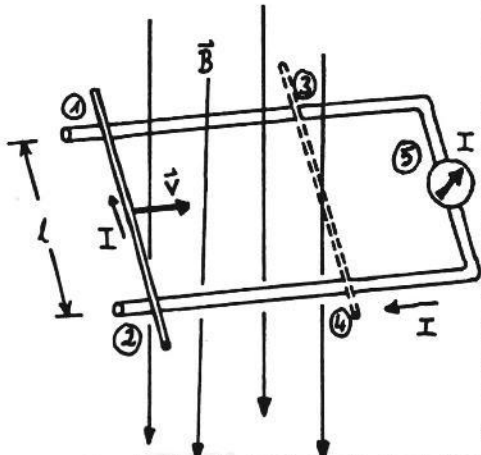
$$w = \frac{1}{2} H \cdot B$$

IV. KRÄFTE IM MAGNETFELD

1. Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter

Ein Magnetfeld kann Kräfte ausüben; das soll nun etwas genauer untersucht werden. Dazu habe ich eine Stromschiene (ein Metallbügel oder so etwas ähnliches) mit einem Strommeßgerät verbunden.

Auf der Schiene liegt ein verschiebbarer Metallstab. Zunächst (bei $t = 0$) liegt er auf den Punkten 1 - 2. Jetzt verschiebe ich ihn mit konstanter Geschwindigkeit im Magnetfeld B nach 3 - 4. Dazu brauche ich die Zeit t; der Stab wurde dabei um die Länge x verschoben. Das Rechteck 1-2-5 wurde also in der Zeit t um das Stück 1-2-4-3 verkleinert. Die Fläche nahm um $\Delta A = l \cdot x$ ab. Dadurch hat auch der magnetische Fluß durch diese Leiterschleife (um eine solche handelt es sich dabei natürlich) ab-



genommen : $\Phi(t=0) = \Phi(t) + \Delta\Phi$; $\Delta\Phi = - B l x$ (Minus, weil abgenommen)

Da $U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (Blx) = Bl \cdot \frac{dx}{dt} = Blv$.

Das heißt : durch die Verkleinerung der Fläche wird im Kreis die Spannung $U_{\text{ind}} = Blv$ induziert. Diese erzeugt (da der Kreis geschlossen ist) einen Strom I mit einer Gesamtleistung von

$$N = U_{\text{ind}} I = B l v I.$$

Wo kommt nun diese Leistung her ? Sie kann nur aus der mechanischen Bewegung kommen (logo !)

$$N_{\text{mech}} = \frac{dW}{dt} = \frac{F ds}{dt} = F \cdot v \stackrel{!}{=} N_{\text{elektr.}} = BlvI$$

Das heißt : der Kraft F entspricht BlI oder :

$$\text{Durch die Kraft F können wir einen Strom } I = \frac{F}{B l}$$

erzeugen.

In unserem Beispiel lag der bewegliche Stab senkrecht zu den magnetischen Feldlinien. Das ist natürlich ein Spezialfall. Liegt er in einem Winkel α zu den Feldlinien, so ist die Änderung des Flusses um den Faktor $\sin\alpha$ kleiner, ebenso auch die Leistung und die Kraft $F = I B l \sin\alpha$ ($\vec{B}; \vec{l}$)

ganz allgemein kann man sagen :

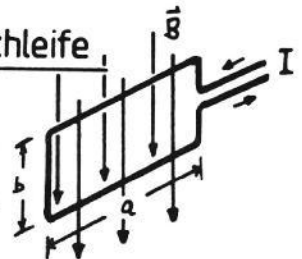
In einem Magnetfeld B wird auf ein Leiterstück dl, durch das ein Strom I fließt, die Kraft $d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$ ausgeübt !

Denn : erstens setzten wir eine konstante Geschwindigkeit voraus, dadurch brauchten wir das ganze Problem nicht infinitesimal zu betrachten, zweitens erzeugten wir durch eine Kraft einen Strom - natürlich erzeugt dann auch ein Strom eine Kraft !

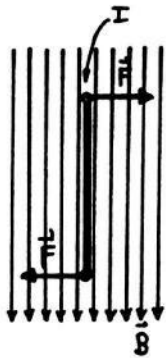
Dies soll jetzt an einem Beispiel veranschaulicht werden.

2. Drehmoment auf eine Stromschleife

Eine Stromschleife befindet sich drehbar gelagert in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} . Ihre Ebene sei parallel zu den Feldlinien.



3. Kräfte zwischen parallelen Leitern



Lassen wir nun einen Strom fließen, so wirkt eine Kraft $d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$

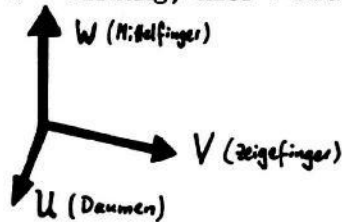
Im Querschnitt betrachtet wirkt die Kraft einmal nach rechts (wo der Strom auf uns zu fließt) und auf der anderen Seite nach links. Daraus ergibt sich also ein Drehmoment.

Betrachten wir genau die Richtungen: Da es sich hier wieder um ein Kreuzprodukt handelt, können wir wieder die rechte Hand-Regel anwenden.

Zur Vereinfachung führen wir noch drei

Buchstaben ein (UVW-Regel). U = Ursache, hier: Stromfluß, V = vermittelndes Feld \vec{B} , W = Wirkung, hier: Kraft.

Somit kennen wir die Richtung in die die Kraft wirkt. Wie groß ist sie nun - und wie groß ist das Drehmoment? $d\vec{F}$ und $d\vec{l}$ haben gleiche



Richtung und sind konstant, daher können wir mit endlichen Größen rechnen $d\vec{F} \rightarrow \vec{F}$ und $d\vec{l} \rightarrow \vec{A}$. Sehen wir uns die Beträge an:

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{oben}} &= I a B \\ F_{\text{unten}} &= I a B \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Für das Drehmoment gilt dann } |\vec{M}| = F \cdot b = I a b B.$$

Da $a \cdot b$ gerade die Leiterfläche A ist gilt: $|\vec{M}| = I A B$.

Vektoriell exakt gilt:

$$\vec{M} = I \vec{B} \times \vec{A} \quad \left\{ \begin{aligned} |\vec{A}| &= \text{Größe der Fläche} \\ \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} &= \text{Richtung der Flächennormalen.} \end{aligned} \right.$$

In großem Abstand von der Stromschleife (wenn also der Abstand zum Beobachter groß gegen die Schleifendimensionen a, b ist)

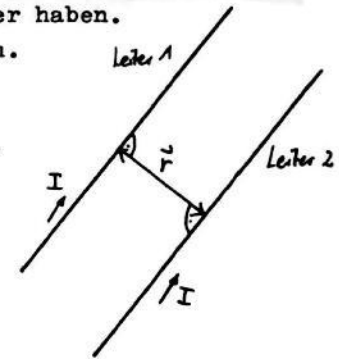
wirkt eine solche im \vec{B} -Feld wie ein elektrischer Dipol im elektrischen Feld. Daher liegt es nahe, der Stromschleife ein magnetisches Dipolmoment zuzuordnen:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= I \cdot \vec{F} \text{ ganz analog zum elektrischen Fall: } \vec{M}_{el} = Q \vec{l} \times \vec{E} \rightarrow \vec{m}_{el} = Q \cdot \vec{l} \\ \vec{M}_{mg} &= I \vec{B} \times \vec{F} = \vec{B} \times I \cdot \vec{F} \rightarrow \vec{m}_{mg} = I \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

Wenn wir nun zwei Leiter vorliegen haben, die von einem Strom durchflossen werden, so wirkt auch da eine Kraft. Von jedem Leiter geht eine Kraft aus, sodaß wir insgesamt eine Wechselwirkung der Kräfte beider Leiter haben.

Das wollen wir nun genauer untersuchen. Dabei gehen wir natürlich wieder von unserer Gleichung $d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$ aus.

Außerdem wissen wir hoffentlich noch, wie das Magnetfeld eines geraden Leiters im Abstand r dieses Leiters war; wenn nicht \rightarrow nachschauen!



$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}. \text{ Das bedeutet, daß}$$

in jedem Punkt des Leiters 2 von Leiter 1, diese Feldstärke herrscht. Umgekehrt gilt natürlich das gleiche.

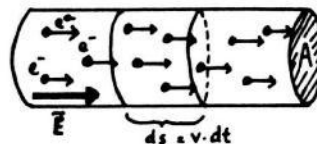
Da beide Leiter überall gerade ^{sind}, können wir wieder mit endlichen Größen statt mit infinitesimal kleinen rechnen: $d\vec{F} \rightarrow \vec{F}$ und $d\vec{l} \rightarrow \vec{l}$. Da außerdem die Kräfte parallel und daher die Abstände senkrecht sind, können wir aus dem Kreuzprodukt ein normales Produkt machen (also alles skalar betrachten):

$$F = I l B \text{ hier also } F = \mu_0 \frac{I^2 l}{2\pi r} \text{ Diese Kraft herrscht}$$

zwischen den beiden Leitern. Man sieht sofort, daß das Vorzeichen dieser Kraft davon abhängt, in welche Richtung die Ströme fließen. Fließen sie in gleiche Richtung, ist das Vorzeichen positiv, die Kraft also abstoßend, bei Stromfluß in verschiedene Richtungen negatives Vorzeichen, Anziehung.

4. Lorentzkraft

Vielleicht gibt es den einen oder anderen, der sich schon darüber Gedanken gemacht hat, woher diese Kraft zwischen Strömen eigentlich kommt. Das soll nun geprüft werden.



Wir betrachten einen Leiter, durch den der Strom I fließt. Wir wissen, daß $I = dQ/dt$. Die Elektronen bewegen sich mit einer mittleren Driftgeschwindigkeit

keit \vec{v} durch den Leiter. Sie haben die Ladung $-e_0$. Greifen wir uns ein kurzes Stück Leiter heraus $d\vec{s}$. Da $\vec{v} = d\vec{s}/dt$ ist, gilt natürlich für die Länge ds : $|ds| = v \cdot dt$. Im Zeitintervall dt treten $n \cdot v \cdot dt \cdot A$ Ladungen durch die Querschnittsfläche A des Leiters, wobei n die Anzahl freier Ladungen pro Volumen bedeutet.

Wieso $n \cdot v \cdot dt \cdot A$? Nun das Volumen ist $v \cdot dt \cdot A$, darin sind n Ladungen vorhanden, insgesamt also $n \cdot v \cdot dt \cdot A$. Für die durch A transportierte Ladungsmenge heißt das also:

$$dQ = -n \cdot e_0 \cdot v \cdot dt \cdot A \implies I = \frac{dQ}{dt} = -n \cdot e_0 \cdot v \cdot A$$

Das ist der Strom, der durch den Leiter fließt.

Bisher wissen wir schon, daß an einem Leiterstück der Länge dl eines stromdurchflossenen Leiters die Kraft $d\vec{F} = I \, d\vec{l} \times \vec{B}$ angreift. Und wo greift die Kraft nun genau an? An den Elektronen. Denn die Kraft wirkt ja nur bei Stromfluß. Genau genommen greift sie nur an bewegten Ladungen an. Da unser Leiter gerade ist, setzen wir wieder an

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} = -n \cdot e_0 \cdot A \cdot v \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

$$\text{oder } \vec{F} = -n \cdot e_0 \cdot A \cdot l \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

n kennen wir nicht (Problem!); Aber wir wissen $n = \frac{\text{Anzahl}}{\text{Volumen}}$

$$n = \text{Anzahl} / A \cdot l \quad \text{also } \vec{F} = - \frac{\text{Anzahl}}{A \cdot l} \cdot e_0 \cdot A \cdot l \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = - \text{Anzahl} \cdot e_0 \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{Und das bedeutet:}$$

Die Kraft auf ein einzelnes bewegtes Elektron ist

$$\vec{F} = -e_0 \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Allgemein kann man dann sagen:

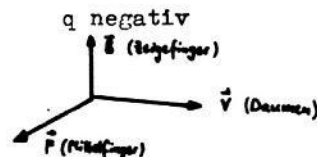
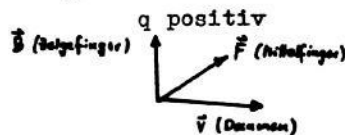
Die Kraft auf eine mit \vec{v} bewegte Ladung q im Magnetfeld \vec{B} ist

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Diese Kraft ist so wichtig, daß man ihr sogar einen Namen gegeben hat: man nennt sie "Lorentz-Kraft".

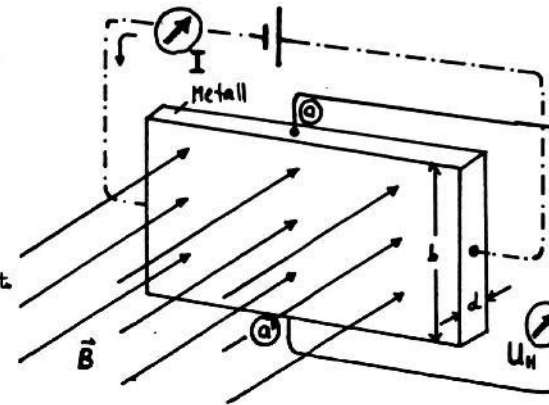
Die Richtung der Kräfte können wir uns wieder leicht merken. Wir haben es hier wieder mit einem Kreuz-Produkt zu tun.

Also rechte-Hand-Regel. (Beziehungswise linke Hand, falls q negativ ist.



5. Anwendung: Hall-Effekt

Dazu soll nun eine Anwendung folgen: der Hall-Effekt.



Ein rechteckiger Metallstreifen werde vom Strom I durchflossen. Senkrecht zum Streifen liegt ein homogenes Magnetfeld \vec{B} an. Ohne Magnetfeld liegen die Punkte a und a' auf gleichem Potential. Also finden wir dann am Meßgerät U_H keinen Ausschlag. Wenn aber nun das Magnetfeld eingeschaltet wird, liegt zwischen a und a' eine Spannung U_H , die sogenannte Hall-Spannung. Wieso? Nun - im Magnetfeld erfahren die Elektronen eine Lorentzkraft -

und zwar eine Kraft hier nach oben $\vec{F} = -e_0 \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Das bedeutet, daß im Punkt a hauptsächlich negative, im Punkt a' mehr positive Ladungen vorhanden sind. Es hat also durch das Magnetfeld eine Ladungstrennung stattgefunden. Es besteht also zwischen a und a' eine Potentialdifferenz. Also baut sich auch zwischen beiden Punkten ein Feld E_H auf. Die Ladungstrennung verläuft so lange bis es zwischen den Lorentz-Kräften der Elektronen und der Kraft des Feldes E_H Gleichgewicht herrscht:

$$-e_0 \vec{v} \times \vec{B} + e_0 \vec{E}_H = 0 \quad \text{Da } I = -n e_0 v A$$

$$\implies v = - \frac{I}{n e_0 A} \quad \text{und} \quad E_H = \frac{U_H}{b}$$

$$-e_0 \cdot \frac{-I}{n e_0 A} \cdot B + e_0 \cdot \frac{U_H}{b} = 0 \implies \frac{U_H}{b} = - \frac{I}{n e_0 A} \cdot B$$

$$\implies U_H = - \frac{1}{n \cdot e_0} \cdot \frac{I \cdot B \cdot b}{b \cdot d} = - \frac{1}{n \cdot e_0} \cdot \frac{I \cdot B}{d}$$

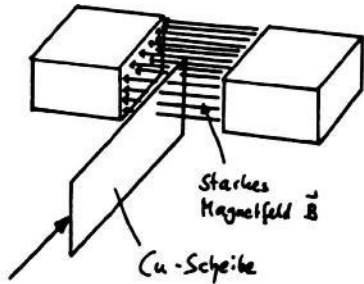
$$U_H = R_H \frac{I \cdot B}{d} \quad \text{mit } R_H = \frac{1}{n \cdot e_0}$$

U_H = Hall-Spannung, R_H = Hall-Konstante

Mit Hilfe des Hall-Effektes kann man die Ladungsträgerdichte in einem Metall bestimmen: Indem man U_H mißt, wenn I und B bekannt sind.

Andererseits kann man auch (falls die Ladungsträgerkonzentration n bekannt ist) Magnetfelder kleiner Stärke bestimmen.

6. Wirbelströme



Um nach der nebenstehenden Zeichnung eine Kupferscheibe in ein Magnetfeld zu schieben, müssen wir eine Kraft aufwenden - wir spüren einen Widerstand. Wieso? -
Durch das Magnetfeld werden in der Kupferscheibe, in der ja freie Ladungsträger vorhanden sind, Kreisströme erzeugt. Die Elektronen fließen also auf irgendwelchen Bahnen im Kupfer umher. Nur sind diese Bahnen nicht geordnet, wie bei Leitern, wo elektrische Felder

anliegen, die die Elektronen in eine Richtung beschleunigen, sondern die Bahnen sind ungeordnet. Hauptsächlich sind sie aber kreisförmig. Dies kann man sich veranschaulichen, wenn man die Linke-Hand-Regel der Lorentz-Kraft anwendet: da \vec{B} immer wirksam ist, dreht sich die Richtung von \vec{v} immer weiter und führt zu geschlossenen kreisförmigen Bahnen. Wäre das Kupfer ein reines und störungsfreies Gitter, wären es alles exakt Kreisbahnen, auf denen sich die Elektronen bewegen. Diese Kreisströme nennt man Wirbelströme. Diese Wirbelströme induzieren wieder Magnetfelder, die nach der Lenz'schen Regel dem äußeren Feld entgegengerichtet sind. Beide Felder (äußeres und innere) stoßen sich also ab. Dies ist auch mit einer Energieumwandlung in Form von Wärme verbunden. Um nun einen Energieverlust durch Wirbelströme gering zu halten, verwendet man z.B. bei Transformatoren statt einem massiven Eisenkern viele geschichtete, elektrisch gegeneinander isolierte Eisenbleche, so bleibt die Ausbreitung der Wirbelströme klein, da sie auf die einzelnen dünnen Eisenbleche beschränkt bleiben.

Des Weiteren nutzt man den Energieverlust durch Wirbelströme bei der Wirbelstrombremse aus. Dies hauptsächlich bei der Bahn. Starke Magnetfelder werden um die Schienen gelegt und erzeugen dort Wirbelströme.

V. MATERIE IM MAGNETFELD

Genau wie bei der nichtleitenden Materie im elektrischen Feld gibt es auch eine magnetische Polarisation in einem Material, das in ein magnetisches Feld gebracht wurde. Magnetische Momente werden in der Materie induziert, die sich aber nach außen hin aufheben. Man kann es sich so vorstellen: jedes Volumenelement erhält eine magnetische Polarisation.

1. Magnetisierung

Wir beschreiben diesen Zustand durch das magnetische Moment je Volumeneinheit. Diese Größe \vec{J} nennen wir Magnetisierung:

$$\vec{J} = \frac{\text{Magnetisches Moment}}{\text{Volumeneinheit}} = \frac{\vec{m}}{V} \quad \left[\frac{\text{A} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^3} \right] = \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

In den meisten Fällen ist die Magnetisierung dem die erzeugenden Magnetfeld \vec{B} proportional $\vec{J} \sim \vec{B}$ $\vec{J} = \frac{\chi}{\mu_0} \cdot \vec{B}$.

Auf die Bedeutung der Proportionalitätskonstante komme ich gleich.

Hat man es mit Magnetfeldern zu tun, ist es oft nützlich, die "magnetische Intensität \vec{H} " zu verwenden. Diese Größe wurde oft früher als Feldstärke des magnetischen Feldes bezeichnet.

$$\text{Def. : } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

Dieses \vec{H} stellt auch so etwas wie eine Feldstärke dar:

Betrachten wir \vec{H} in einem Vakuum. Dort ist keine Materie, kann also auch nichts polarisiert sein. das heißt, \vec{J} muß 0 sein.

Dann gilt $\vec{H}_{\text{Vakuum}} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ Im Vakuum unterscheiden sich \vec{B} und \vec{H} nur um einen konst. Faktor.

$$\text{Vakuum } \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\text{Nichtvakuum } |\vec{B}| = \mu_0 |\vec{H}| + \mu_0 |\vec{J}| = \mu_0 |\vec{H}| \left(1 + \frac{\mu_0 |\vec{J}|}{\mu_0 |\vec{H}|} \right) = \mu_0 |\vec{H}| \left(1 + \frac{\chi}{\mu_0} \right)$$

$$\text{da } \frac{J}{H} = \frac{\chi}{\mu_0} \frac{B}{H} = \frac{\chi}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_0 H}{H} = \chi \Rightarrow |\vec{B}| = \mu_0 |\vec{H}| (1 + \chi) = \mu_0 |\vec{H}| \mu_r = \mu_0 \mu_r |\vec{H}|$$

$$\text{Vakuum } |\vec{B}| = \mu_0 \cdot |\vec{H}| \Rightarrow \mu_r = 1 \text{ für Vakuum}$$

$$\text{Materie } |\vec{B}| = \mu_0 \mu_r |\vec{H}| \Rightarrow \mu_r \neq 1 \text{ für Materie}$$

Dabei wurde definiert $\mu_r = 1 + \chi$ bzw.

$$\chi = \mu_r - 1$$

χ fanden wir vorhin schon als Proportionalitätsfaktor zwischen Magnetfeld und **Magnetisierung**. Man nennt die Größe "**Suszeptibilität**". Genau genommen: magnetische Suszeptibilität. Es war

$$\vec{J} = \chi \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

oder aber

$$\vec{J} = \chi \cdot \vec{H}$$

So steht die Suszeptibilität als Proportionalitätsfaktor zwischen magnetischen Intensität und Magnetisierung.

Das heißt: χ gibt uns an, wie groß die **Magnetisierungsfähigkeit des betreffenden Stoffes ist**. χ ist eine sogenannte Materialkonstante, die eine Materialeigenschaft quantitativ angibt. Man teilt nun die Stoffe in drei Gruppen ein, je nach Suszeptibilität. Die Bedeutung dieser drei magnetischen Eigenschaften wird später genauer erklärt:

Suszeptibilität χ	Stoff ist	relative Permeabilitätszahl μ_r
0	Vakuum	1
> 0	paramagnetisch	> 1
> 0	ferromagnetisch	$\gg 1$
< 0	diamagnetisch	< 1

Wir sehen: bei $\epsilon_r \gg 1$ wurde $\chi \gg 0$ durchgestrichen. Dies hat einen ganz bestimmten Grund: im ferromagnetischen Fall (dabei handelt es sich v.a. um die Metalle Eisen, Kobalt und Nickel) ist die Magnetisierung dem magnetischen Feld nicht mehr proportional. Das heißt, daß Gleichung $\vec{J} = (\chi/\mu_0) \cdot \vec{B}$ nicht stimmt. Diese war ja die Definition für χ . Daher kommt die Größe χ beim Ferromagnetismus nicht mehr vor.

Bleiben wir noch kurz bei der Magnetisierung. Es gilt

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad \text{und} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \quad \text{also} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_r} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \mu_r \vec{H}}{\mu_0} - \frac{\mu_0 \mu_r \vec{H}}{\mu_0 \mu_r} = \mu_r \vec{H} - \vec{H}$$

$$\vec{J} = \underbrace{\mu_r \vec{H}}_{\text{Intensität der Materie}} - \underbrace{\vec{H}}_{\text{Intensität des Vakuums}}$$

Die Magnetisierung ist die Differenz zwischen Feld (Intensität) mit und Feld (Intensität) ohne Materie.

anders ausgedrückt: Die Magnetisierung \vec{J} ist die von der Materie selbst herrührende Intensität oder: die Magnetisierung ist die von der Materie zusätzlich herrührende Feldstärke.

2. Arten der Magnetisierung

Nun zu den drei verschiedenen Fällen:

a) Diamagnetismus

$$\chi < 0, \text{ d.h. mit } \vec{J} = \frac{\chi}{\mu_0} \vec{B} :$$

Die Magnetisierung ist dem äußeren Feld entgegengerichtet!

Dieser **Diamagnetismus** ist eine Eigenschaft aller Stoffe: durch ein äußeres Magnetfeld werden im Innern des Stoffes Kreisströme erzeugt, deren Magnetfeld dem äußeren entgegengerichtet ist. Diese Ringströme werden im atomaren Bereich induziert; jedes Atom wirkt als kleiner magnetischer Dipol. Wie gesagt gibt es das bei allen Stoffen (wenn man ein Magnetfeld anlegt!). Nur wird es in vielen Fällen vom Para- oder Ferromagnetismus überdeckt.

b) Paramagnetismus

$\chi > 0$, d.h. Die Magnetisierung steht parallel zum äußeren Magnetfeld. Aber: zusätzlich kommt hinzu, daß der **Paramagnetismus** auch ohne äußeres Feld wirkt! In den Atomen, aus denen der Stoff besteht, kreisen Elektronen auf mehr oder weniger kreisförmigen Bahnen - sie bilden Kreisströme. Dabei heben sich bei vielen Stoffen die daraus resultierenden magnetischen Momente auf. Nicht aber bei allen. Genaugenommen ist der Elektronenspin (das heißt der Eigendrehimpuls des einzelnen Elektrons) der, der das magnetische Moment bildet. Sitzen auf einer Schale zwei Elektronen mit entgegengerichteten Spins, so heben sich ihre magnetischen Momente gegenseitig auf. Bei vielen Stoffen gibt es aber sogenannte ungepaarte Elektronen, die ein magnetisches Moment erzeugen. Legt man nun kurzzeitig ein Magnetfeld an, so richten sich diese magnetischen Momente aus (es handelt sich um magnetische Dipole, die sich in einem Feld drehen, wie oben beschrieben). Die Ausrichtung bleibt bestehen, selbst wenn das äußere Feld abgeschaltet ist.

Es ist klar, daß dieser Paramagnetismus temperaturabhängig ist, da die Brown'sche Molekularbewegung der Ausrichtung entgegenwirkt,

In erster Näherung gilt für die Temperaturabhängigkeit des Paramagnetismus :

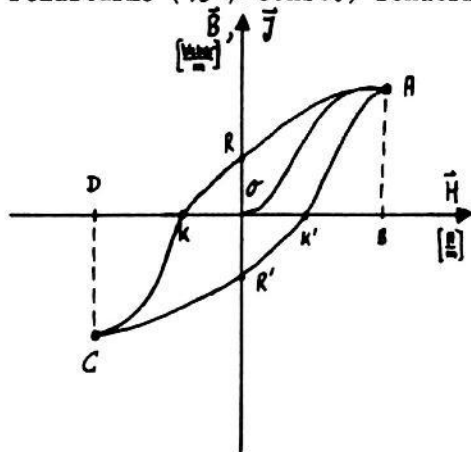
$$\chi = \frac{C}{T} \quad \text{wobei } T \text{ die absolute Temperatur und } C \text{ die sogenannte "Curie-Konstante" bezeichnet, die für verschiedene Stoffe verschieden ist.}$$

c) Ferromagnetismus

Beim Ferromagnetismus ist $\mu_r \gg 1$. Das heißt es liegt eine sehr starke Magnetisierung vor, weit stärker, als dies beim Paramagnetismus der Fall ist. In einigen Stoffen sind die vorhandenen Spinmomente von vornherein in weiten Räumen des Kristalls (An den sogenannten "Weiss'schen Bezirken") ausgerichtet. Und zwar durch eine spezielle elektromagnetische Kraft, die Austausch-Wechselwirkung genannt wird. Wird nun an ein solches Stück Metall ein äußeres Magnetfeld angelegt, so richten sich die ganzen Bezirke spontan aus, d.h. sie "klappen" um und zwingen nach außen eine sehr starke Magnetisierung.

d) Hystereseschleife

Der Ferromagnetismus ist nicht nur eine Funktion der äußeren Feldstärke ($\chi \neq \text{const.}$) sondern auch der Vorgeschichte der Magnetisierung. Dies wird deutlich, wenn man sich die "Hysteresekurve" aufstellt.



Ein zunächst unmagnetisches Eisenstück wird durch Anlegen eines Magnetfeldes magnetisiert. Im Diagramm ist das der Ast von $O \rightarrow A$. Dies ist die Abhängigkeit der Magnetisierung \vec{J} vom Feld (die bei dia- und paramagnetischen Substanzen linear ist). Man nennt den Verlauf $O \rightarrow A$ die "jungfräuliche Kurve". Verringert

man das äußere Feld bis auf $\vec{H} = 0$, so geht die Magnetisierung zurück bis zu einem Wert bei R, der "Restmagnetisierung" genannt wird. (oft auch als Remanenz bekannt). Man kann die Restmagneti-

stärkung zurückführen, indem man das äußere Feld umpolt und bis zum Punkt K vergrößert (dieses Feld nennt man dann Koerzitivfeld = Gegenfeld). Erhöht man diese noch weiter bis D, wird wieder die Maximalmagnetisierung (bei Punkt C) erreicht (deren Orientierung jetzt aber umgekehrt wie in A ist). Will man nun diese wieder abbauen, muß man das Feld wieder verkleinern, erhält bei $\vec{H} = 0$ die Restmagnetisierung, die beim Koerzitivfeld K' verschwindet. Vergrößert man \vec{H} weiter, erreicht man wieder Punkt A. Man kann also machen was man will, man bleibt immer auf der Kurve A-R-K-C-R'-K'-A. Den Punkt O (d.h. unmagnetisch ohne Feld) erreicht man so nicht mehr. Dies kann man nur, wenn man das Eisenstück so stark erhitzt, daß die Orientierungen in den Weiss'schen Bezirken durch die thermische Molekularbewegung auflöst wird.

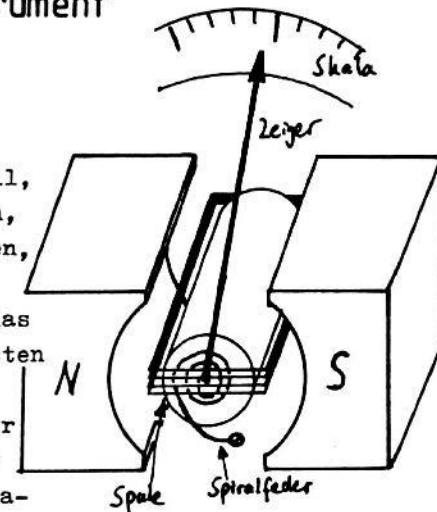
Die Fläche, die durch die Hystereseschleife eingeschlossen wird, gibt die Arbeit an, die man zum Magnetisieren leisten muß.

3. elektrische Meßinstrumente

a) Drehspulinstrument

Bauen wir in einer Spule ein Magnetfeld auf, aus einem Strom, der gemessen werden soll, so können wir den Strom messen, wenn wir eine Möglichkeit haben, das Magnetfeld zu messen. Und das geht. Wir lassen einfach das Spulenmagnetfeld mit einem festen Magnetfeld wechselwirken :

Eine Zylinderspule mit Zeiger befindet sich drehbar gelagert in einem Magnetfeld eines Permanentmagneten. Fließt der zu messende Strom durch die Spule, wird durch das Permanentmagnetfeld auf das Spulenmagnetfeld eine Kraft übertragen, die dort als Drehmoment angreift. Die Spule dreht sich, bis beide Kräfte (genauer Drehmomente) ausgeglichen sind. Das Spulenmagnetfeld ist proportional zum Strom in der

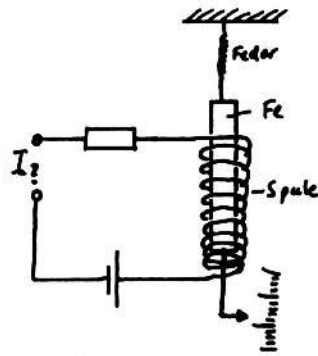


VI. FREIE ELEKTRONEN UND IONEN

1. Freie Teilchen

Spule (nach dem 4. Maxwell'schen Gesetz), dazu ist das Drehmoment proportional, sodaß auch der Zeigerausschlag proportional dem Meßstrom ist. Eine geeichte Skala zeigt dann den Meßstrom an. Um nach der Messung die Spule wieder in Ursprungslage zurückzudrehen und um überhaupt eine geeignete Rückstellkraft zu haben, ist eine Rückstellfeder angebracht.

b) Weicheiseninstrument



Im nebenstehenden Bild sieht man, wie aus dem zu messenden Strom ein Magnetfeld aufgebaut wird. Spule (logo)! Ein Weicheisenkern wird in der Spule magnetisiert und sein induziertes Magnetfeld wechselwirkt mit dem Spulenfeld, sodaß er in die Spule hineingezogen wird, und zwar umso mehr, je höher der Strom ist. Eine Feder bringt ihn in die Ruhelage zurück.

Weitere Meßgeräte wie Hitzdrahtamperemeter und Wheatstone'sche Brückenschaltung sind bereits an anderer Stelle erklärt.

Falls diese Begriffe böhmische Dörfer sind, schleunigst Kap. D III 2) "Elektrischer Widerstand" (Seite 139 f), bzw. Kap. D III 3) "Kirchhoff'sche Gesetze" (Seite 141 f) aufschlagen und nachlesen!

Ein weiteres - heute fast vergessenes - Meßgerät ist das sogenannte Voltmeter: Bei Stromdurchgang bestimmter Stromstärke wird aus einer wäßrigen Silbernitratlösung Silber abgeschieden. Und zwar wird bei einer Stromstärke von 1 A in 1 sec 1,18 mg Ag an der entsprechenden Elektrode abgeschieden; diese Verfahren (Messung von Zeit und Auswägen des abgeschiedenen Silbers) bringt natürlich nur bei relativ großen Stromstärken etwas.

Nachzutragen bleibt noch, daß die Ausschläge von Weicheisen- und Hitzdrahtamperemetern unabhängig von der Stromrichtung sind. Dies gilt nicht für das Drehspulinstrument. Das bedeutet, daß die beiden ersten auch zur Messung von Wechselstrom geeignet sind (wobei sie die Effektivwerte anzeigen) - das wird noch eingehend erklärt!

Bisher haben wir schon öfter den Begriff "freie Elektronen" oder auch "Ionen" gehört. Gerade bei den Leitungsphänomenen spielen sie eine große Rolle. Betrachten wir uns ein Elektron, das frei sein soll: es befindet sich im Vakuum, wird dort vielleicht von einem elektrischen Feld beschleunigt und erhält Energie. Wieviel Energie trägt solch ein Elektron?

Nehmen wir an, es durchlaufe eine Spannungsdifferenz von einem Volt. Es befindet sich also zwischen den Kondensatorplatten die eine Spannung von einem Volt tragen. Jetzt wird es zur positiven Platte hin beschleunigt - klar es wirkt ja eine Kraft. Eine elektrische Kraft. Die ist

$$F = q E = q \frac{U}{d}, \text{ wobei } E \text{ das elektrische Feld, } U \text{ die Spannung (1 Volt) und } d \text{ der Plattenabstand ist.}$$

Wie groß ist dann die kinetische Energie, die das Elektron erhält?

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{ und zwar an den Grenzen } s=0 \text{ bis } s=d.$$

$$\Rightarrow W_{el.} = q \cdot U. \text{ Klar - kennen wir ja!}$$

$$\text{Rechnen wir's aus: } W_{el.} = 1.602 \cdot 10^{-19} [C] \cdot 1 [V].$$

$$\text{Einheitenprobe: } [C = A \cdot sec], [CV = A \cdot V \cdot sec = W \cdot sec = J] \text{ ok. !}$$

Jetzt tragen alle möglichen freien Ionen auch Ladungen in dieser Größenordnung, ein, zwei, drei Elementarladungen. Typische Beschleunigungsspannungen sind einige Volt, Kilovolt oder auch (bei den großen Teilchenbeschleunigern) einige Megavolt.

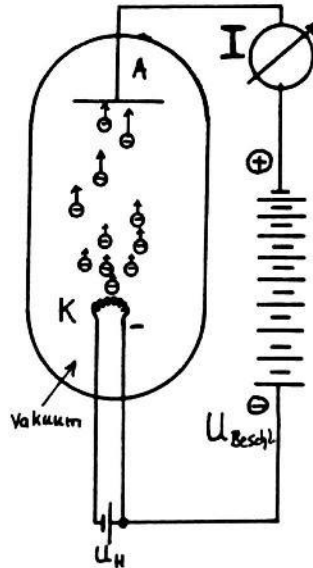
Das heißt, das typische Elektronen- oder Ionenenergien sehr klein sind. Um sich die Schreiarbeit zu vereinfachen, hat man eine neue Größe eingeführt. Man nennt die Energie, die ein Ladungsträger in einer Potentialdifferenz von einem Volt erhält

$$1 \text{ Elektronenvolt (eV)}. \text{ Der Umrechnungsfaktor ist nun einfach: } 1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \text{ oder } 1 \text{ J} = 1/1.602 \cdot 10^{-19} \text{ eV.}$$

Um nun mit freien Ladungsträgern (deren Energien wir jetzt definiert haben) experimentieren zu können, müssen wir sie zunächst einmal erzeugen. Wie kann man Elektronen und Ionen aus Flüssigkeiten oder Festkörpern separieren?

a) Glühelctrischer Effekt

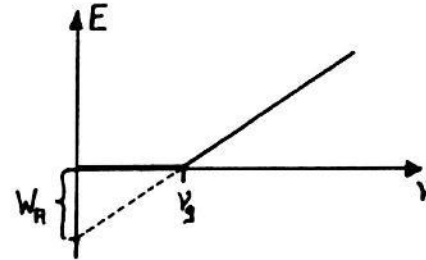
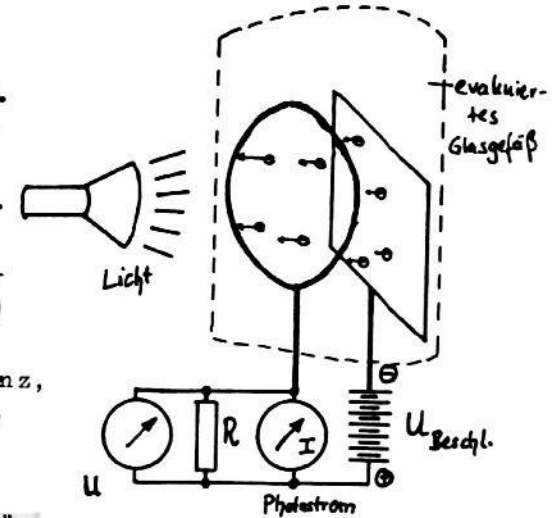
Wir wissen ja, daß es im Innern eines Metalls frei verschiebbare Elektronen gibt, die die große elektrische und thermische Leitfähigkeit der Metalle bewirken. An den Metalloberflächen sind die in ganz typischer Weise gebunden. Um sie aus dem Metallverband "auszulösen" muß man zunächst eine "Auslösearbeit W_A " leisten (die pro Elektron bei ca. 1 bis 5 eV liegt). Aber wie macht man das? Nun - man kann den Elektronen zum Beispiel thermische Energie dieser Größenordnung zuführen. Man erhitzt das Metall. Die Elektronen erhalten thermische Energie, bewegen sich schneller und einige sind so energiereich, daß sie "ausdampfen" können. Saugt man dann diese noch zusätzlich elektrisch ab (mit einem entsprechenden Feld, so kann man sie vom Metall ablösen. Ein Heizdraht, der an den negativen Pol einer Spannungsquelle angeschlossen ist (indem also ein Elektronenüberschuß ist), wird durch eine Heizspannung U_H erhitzt. Elektronen treten aus und werden zum positiven Pol hin beschleunigt. Wie bei der Elektrolyse nennt man den negativen Pol "Kathode", den positiven "Anode". Dies funktioniert natürlich am besten in einer evakuierten Röhre, sonst würden die austretenden Elektronen sofort mit den Gasmolekülen kollidieren.



b) Photoeffekt (Lichtelctrischer Effekt)

Eine andere Möglichkeit bietet sich an, wenn man ein Metall nicht erhitzt, sondern Energie durch Licht einstrahlt. Dazu muß man energiereiches Licht verwenden (z.B. Ultraviolettstrahlung). Bei Versuchen dieser Art wurde übrigens gezeigt, daß die Energie solchen Lichtes nicht in der Intensität steckt,

sondern in seiner Frequenz. Man bestrahlt eine negativ aufgeladene Metallplatte mit Licht kleiner Frequenz. Was passiert? Nichts! Jetzt erhöht man die Intensität (man macht es heller) wieder nichts! Jetzt ändert man die Frequenz, erhöht also die Energie. Ab einer gewissen Energie W_A treten Elektronen aus, man mißt einen sog. "Photostrom",



der mit steigender Frequenz nun linear ansteigt. Der Schwellenwert W_A ist eine materialspezifische Größe. Und zwar ist dieses W_A gerade wieder die Ablöse- oder Austrittsarbeit: Ist die eingestrahlte Energie pro Elektron zu gering, tritt es nicht aus - kein Stromfluß. Ist sie gerade W_A , tritt es aus, aber es reicht noch nicht für einen konstanten Stromfluß, erst, wenn $W > W_A$ fließt Strom.

Trägt man nun die Elektronen-Energie gegen die Frequenz des eingestrahlten Lichtes auf (die Elektronenenergie erhält man aus dem fließenden Strom), so sieht man, daß erst von einer Grenzfrequenz ν_0 an etwas passiert. Mit anderen Worten: Strahlt man eine Energie ein, teilt diese sich in Austrittsarbeit W_A und kinetische Energie des Elektrons E_{auf} auf. Aus dem Diagramm liest man

$$E(\nu) = h\nu - W_A$$

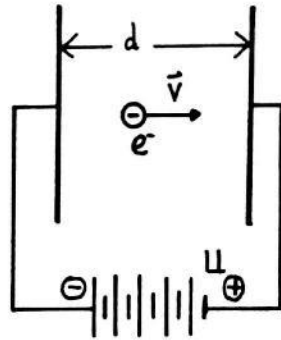
h ist der Steigungsfaktor, (der ist für alle Materialien gleich und zwar: $h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ [J sec]}$ "Plancksches Wirkungsquantum"). Diese Größe spielt in der Atomphysik eine ganz entscheidende Rolle. Dort wird mehr davon zu hören sein.

Formen wir die Gleichung um:

$$\underbrace{h \cdot \nu}_{\text{Energie des Lichts}} = \underbrace{E}_{\text{kin. Energie der Elektronen}} + \underbrace{W_A}_{\text{Austrittsarbeit}}$$

c) Elektronen im elektrischen Feld

Wir wollen nun kurz auf die Bewegung von Elektronen in elektrischen und magnetischen Feldern eingehen.



Wir haben das gerade zwar schon angesprochen aber : doppelt genäht hält besser, Also :

Im Plattenkondensator (Feld E, Plattenabstand d, Spannung U) befindet sich ein zunächst ruhendes Elektron. Für E gilt :

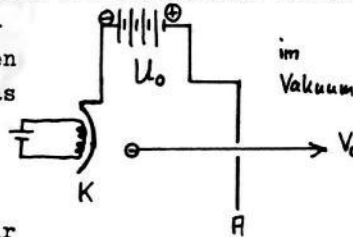
$E = \frac{U}{d}$. Am Elektron greift die Kraft $F = e \cdot E$ an. Es ist frei beweglich und beginnt sich nach dem Newton'schen Gesetz $F = m\ddot{x}$ zu bewegen : $|\vec{F}| = ma = eE = e \cdot \frac{U}{d}$.

Somit $|\vec{a}| = \frac{e \cdot U}{m \cdot d}$. Das Elektron bewegt sich

gleichmäßig beschleunigt. Naja das ist fast trivial : eine konstante Kraft greift an und was bleibt dem Elektron da schon anderes übrig!

Anderer Fall : ein Elektron kommt in den Kondensator mit einer Geschwindigkeit v_0 herein und zwar senkrecht zu den Feldlinien. Zunächst : wie erhalten wir ein Elektron mit konstanter Geschwindigkeit v_0 ? Einfach durch Beschleunigen in einem begrenzten elektrischen Feld. Die Anode sei durchbohrt und das Elektron durchfliegt die Anode mit von da an konstanter Geschwindigkeit.

Wieso trifft das Elektron das Loch ? Dumme Frage - es treten natürlich sehr viele Elektronen aus der Kathode aus und einige davon fliegen eben durch das Loch und bilden dahinter einen Elektronenstrahl, bestehend aus Elektronen, alle mit der Geschwindigkeit v_0 . Wir betrachten allerdings nur ein einzelnes. Frage : wie groß ist v_0 ? Im Beschleuniger Aufbau erhält es die kinetische Energie

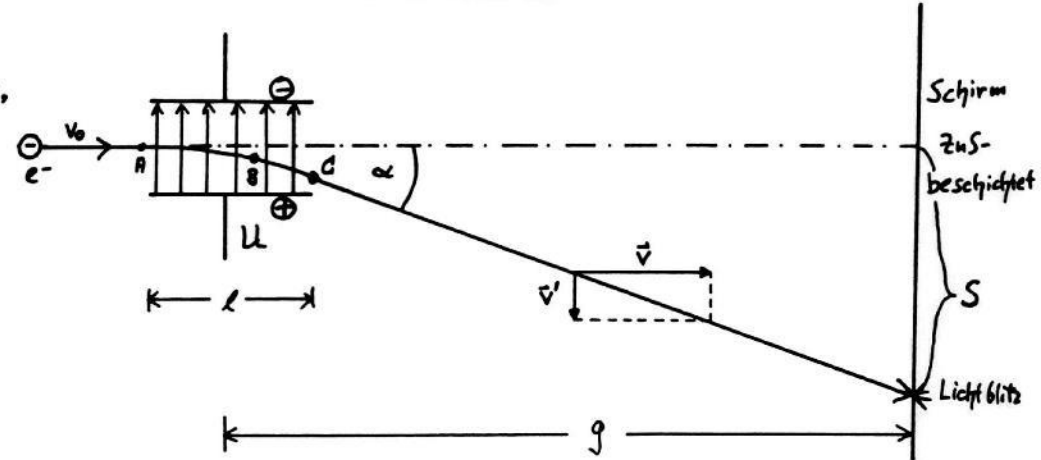


$\frac{m}{2} v_0^2 = e \cdot U_0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2 e U_0}{m}}$

Zurück zum Problem (Bild auf der nächsten Seite) : wir lassen nun ein Elektron mit v_0 senkrecht in einen Kondensator einfliegen.

Was wird geschehen ?

Auf seinem Flug durch den Kondensator wird das Elektron etwas zur positiven Platte hin abgelenkt. Um wieviel ? Wovon hängt



der Ablenkwinkel α , bzw. die Ablenkstrecke s (in einer Entfernung g) ab ?

Im Punkt A hat das Elektron v_0 . Im Punkt B ist es schon etwas abgelenkt. Die Bewegung (im Bild) nach unten ist eine gleichmäßig beschleunigte (das \vec{E} -Feld wirkt dauernd, solange das Elektron noch im Kondensator ist). Die Bahn also eine Parabel. Wieso eine Parabel? Nun - vergleichen wir das ganze doch einmal mit dem Problem des waagrechten Wurfes (Kap. A, I.4.d) (S. 15)). Na - dämmerts ?

Ab Punkt C, wo das Elektron den Kondensator verläßt, ist die Gesamtgeschwindigkeit wieder konstant, die Richtung auch. Spalten wir die Geschwindigkeit in eine horizontale und eine vertikale auf (\vec{v} und \vec{v}'): die horizontale ist genauso groß wie v_0 - denn v_0 bestand nur aus einer horizontalen Komponente - und in horizontaler Richtung wirkten keine Kräfte im Kondensator. Wie groß ist aber $|\vec{v}'|$?

Wir wissen, daß auf das Elektron im Kondensator die Beschleunigung $|\vec{a}| = \frac{e \cdot U}{m \cdot d}$ wirkt. Und diese ist konstant. Also können wir statt $|\vec{a}| = \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = \frac{|\vec{v}'|}{t}$ schreiben. Denn die Richtung von \vec{a} ist ja vertikal, also genauso wie unsere Komponente \vec{v}' .

$|\vec{v}'|$ ist dann $a \cdot t$. Wie groß ist aber t. Das heißt : wie lange fliegt das Elektron durch den Kondensator ? Das können wir aus der Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung ermitteln :

Wir wissen ja, daß $v = v_0$, also die horizontale Geschwindigkeitskomponente gleichbleibt.

Und es ist klar, daß $v = v_0 = \frac{l}{t}$ also $t = \frac{l}{v_0}$. Simpel, wie?

Für unser v' bedeutet das:

$$v' = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot \frac{l}{v_0}$$

Wie erhalten wir nun den Ablenkwinkel (indem wir mal ganz hinten im Kopf unser altes Trigonometrie-Schulwissen auskramen).

Aus der Zeichnung ersehen wir nämlich $\tan \alpha = \frac{v'}{v} = \frac{eUl}{m d v_0^2}$.

Allerdings gilt ebenso $\tan \alpha = \frac{s}{g} = \frac{e \cdot U \cdot l}{m \cdot v_0^2 \cdot d}$

Setzen wir nun $v_0^2 = \frac{2 \cdot e \cdot U_0}{m}$ ein und lösen nach s auf, ergibt sich

$$s = \frac{g \cdot l}{2 \cdot d} \cdot \frac{U}{U_0}$$

Wovon hängt es also ab, wie stark die Ablenkung ist?

Nur von der Geometrie des Aufbaus (g, l, d) und von den beiden Spannungen U_0 (Beschleunigungsspannung) und U (Ablenkspannung).

Was kann man daraus schließen?

Die Ablenkung ist unabhängig von der Ladung. Die kommt garnicht vor. D.h. das ganze gilt auch für Protonen oder Helium-Kerne usw.

Wenn wir mehr über die Ladungen von Teilchen lernen wollen, müssen wir uns die Wirkung von Magnetfeldern auf solche Teilchen ansehen.

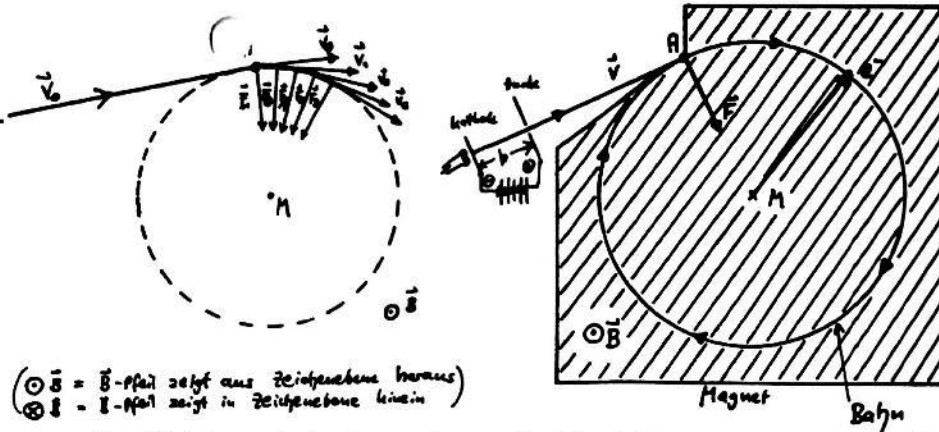
d) Elektronen im magnetischen Feld

Betrachten wir nun Elektronen in Magnetfeldern.

Gerät ein geladenes Teilchen (z.B. ein Elektron) in ein Magnetfeld, so wirkt auf dieses die Lorentzkraft - vorausgesetzt, das Teilchen hat eine Geschwindigkeit. Wir wissen noch

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Kommt das Teilchen im Punkt A erstmals mit dem Magnetfeld in Berührung, wird es dort senkrecht zu \vec{v} und \vec{B} in Richtung Punkt M abgelenkt. Nun hat es eine neue Geschwindigkeit \vec{v}_1 . Der Geschwindigkeitsbetrag ist gleich geblieben, aber



($\odot \vec{B}$ = \vec{B} -Pfeil zeigt aus Zeichenebene heraus)
($\otimes \vec{B}$ = \vec{B} -Pfeil zeigt in Zeichenebene hinein)

die Richtung ist eine andere. Somit wirkt auch jetzt eine (richtungsmäßig) andere Lorentzkraft \vec{F}_1 . Das Elektron wird wieder Richtung M abgelenkt - neue Geschwindigkeit $\vec{v}_2 \Rightarrow$ neue Kraft \vec{F}_2 usw. Das Teilchen beschreibt insgesamt - solange es im konstanten Magnetfeld \vec{B} ist - eine Kreisbahn, bei der die Geschwindigkeitsvektoren tangential und die Kraftvektoren senkrecht (= radial) zur Bahn stehen.

Da alle Vektoren aufeinander senkrecht stehen, haben wir es mit der Beschreibung einfacher.

$$\text{Aus } \vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \text{ wird } F = q \cdot v \cdot B$$

Wie groß ist der Bahnradius des Teilchens?

Um dies zu beantworten, müssen wir uns die Sache noch etwas näher ansehen. Wieso bleibt das Teilchen eigentlich auf einer Kreisbahn? Nun - es wirkt außer der Lorentzkraft (die das Teilchen Richtung M beschleunigt - und es auf eine Spiralbahn zwingen würde) noch eine Zentrifugalkraft (da das Teilchen eine Masse hat), die beiträgt, die Kreisbahn aufrechtzuerhalten.

Es muß gelten $\vec{F}_{\text{Lorentz}} = -\vec{F}_{\text{Zentrifugal}}$ oder

$$|\vec{F}_L| = q \cdot v \cdot B = \frac{m}{r} \cdot v^2 = |\vec{F}_Z| \Rightarrow r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Wie groß ist aber v ? Die Richtung von \vec{v} ändert sich dauernd, der Betrag aber ist gleich geblieben. \vec{v} ist die Geschwindigkeit, mit der das Teilchen in das Magnetfeld hineinflog, also wieder so eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Und die können wir durch Beschleunigung im elektrischen Feld erreichen. Dort war

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U_0}{m}} \text{ wenn } m \text{ die Masse, } q \text{ die Ladung des Teilchens und } U_0 \text{ die Beschleunigungsspannung sind.}$$

Damit können wir r nur aus Konstanten und Apparategrößen bestimmen

$$r = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{2 \cdot U_0 \cdot \frac{m}{q}}$$

Die Größen B und U_0 geben wir durch unseren Aufbau vor und können sie messen; das Verhältnis q/m können wir dann bestimmen. Das spezielle Verhältnis e/m (e = Elementarladung) nennt man "spezifische Ladung". Beispiele für spezifische Ladungen :

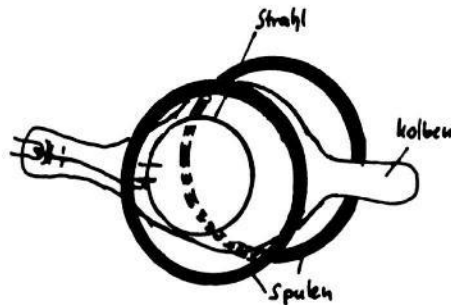
Elektron	$\frac{e}{m_e} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$
Proton	$\frac{e}{m_p} = 9,58 \cdot 10^7 \frac{C}{kg}$
He-Kern	$\frac{2e}{2 \cdot m_{He}} = 1,92 \cdot 10^8 \frac{C}{kg}$

Aus den Apparategrößen erhält man also die spezifische Ladung

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2}$$

So konnte man auch erstmals die Elektronenmasse bestimmen; die Elementarladung war durch den Millikan-Versuch bekannt.

In einem evakuierten Glaskolben ist ein Beschleunigungssystem für Elektronen untergebracht. Schaltet man dieses ein, sieht man einen nach oben laufenden Strahl von schwach blauer Farbe (die Elektronen stoßen im Restgas vorhandene Argonatome an, regen diese zum Leuchten an). Ein relativ homogenes und konstantes Magnetfeld erzeugt man mit zwei sog. "Helmholtz-Spulen", die außen am Kolben angebracht sind. Dieses

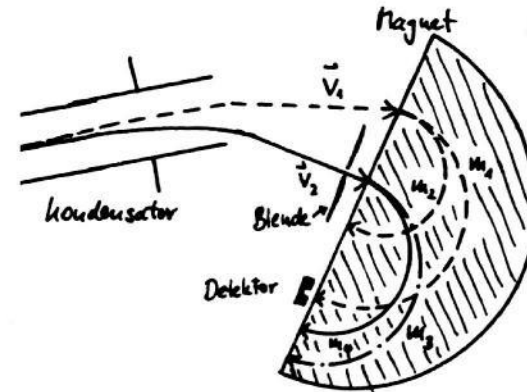


durchsetzt den Kolben und zwingt die Elektronen auf eine Kreisbahn, die man wiederum als Spur der angeregten Ar-Atome erkennen kann. Man kennt B und U_0 , bestimmt r und berechnet e/m . Verdreht man nun den Kolben gegen das Magnetfeld, sodaß der ursprüngliche Elektronenstrahl nicht mehr senkrecht zu \vec{B} steht, sieht man keine Kreis- sondern eine Schraubenbahn, deren Achse parallel zu den Magnetfeldlinien liegt. Mit der Elementarladung von $1,602 \cdot 10^{-19} C$ erhält man die Elektronenmasse zu $9,1 \cdot 10^{-31} kg$.

e) Massenspektrometer

Die Ablenkung von Ladungsträgern in elektrischen und magnetischen Feldern findet in der Technik große und vielfältige Anwendungen. Ein Beispiel ist der sogenannte Massenspektrometer. Dort werden geladene Teilchen nach ihren Massen getrennt. Anders ausgedrückt : man erstellt ein Massenspektrogramm einer Probe von vielen geladenen Teilchen (Ionen).

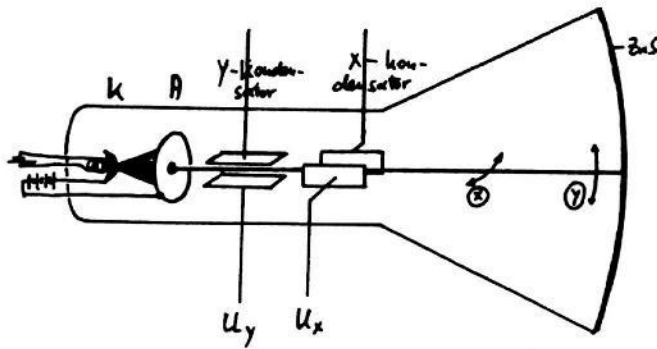
Im ersten Schritt werden die Teilchen, die verschiedene Geschwindigkeiten und verschiedene Massen haben sollen, in einem elektrischen



Feld nach ihren Geschwindigkeiten separiert, im zweiten Schritt erfolgt die Massentrennung im magnetischen Feld. Es gibt verschiedene Bautypen, je nach besonderer Anwendung. Nebenstehende Zeichnung zeigt das Prinzip nach "Aston", bei dem nach Geschwindigkeiten und nach Masse getrennt wird - etwas physikalischer : erst Trennung nach Impuls (im \vec{E} -Feld), dann Trennung nach Energie (im \vec{B} -Feld).

f) Braun'sche Röhre

Eine weitere wichtige Anwendung besteht in der Braun'schen Röhre (oft auch Elektronenstrahloszillograph genannt). Läßt man einen Elektronenstrahl aus Elektronen mit gleichem Impuls hintereinander durch zwei Kondensatoren, die im Winkel von 90° zueinander angeordnet sind, ablenken, so kann man durch geschickte Wahl der beiden Ablenkspannungen U_x und U_y den Strahl in jede gewünschte Richtung lenken. Der x-Kondensator lenkt den Strahl in horizontaler Richtung ab, der y-Kondensator bewegt ihn in vertikaler Richtung. Der Schirm ist zinksulfidbeschichtet - wenn dort ein Elektron auftrifft sieht man einen Lichtblitz, bei vielen Elektronen (Strahl) einen Leuchtfleck.



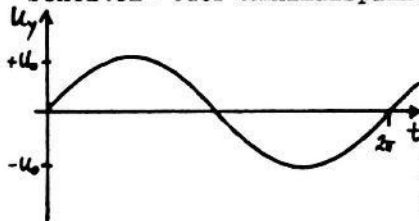
Was kann man nun mit einer solchen Röhre anfangen? Nun einmal kann man sie als Elektronenstrahloszillograph verwenden, zum anderen kann man damit eine Fernsehbildröhre bauen.

Zunächst zum Oszillograph :

Meist macht man zeitabhängige Spannungen sichtbar. Zum Beispiel kann man sehr schön Wechselspannungen mit dem Oszillograph beobachten. Legt man eine Wechselspannung an die U_y -Ablenkung, was sieht man da ? Man sieht einen Leuchtpunkt in der Frequenz der Wechselspannung auf und abgehen. Ist die Frequenz nicht zu klein (≥ 50 Hz), so verschwimmt das Bild zu einem Strich. Was heißt das ?

Wir sehen bei $U_y = 0$ einen Punkt. Nennen wir dessen Ort Ursprung. Dann schalten wir U_y ein; eine Wechselspannung, die sinusförmig sein soll, also

$U_y = U_0 \sin \omega t$. U_0 ist die sogenannte Scheitel- oder Maximalspannung, ω die Frequenz.

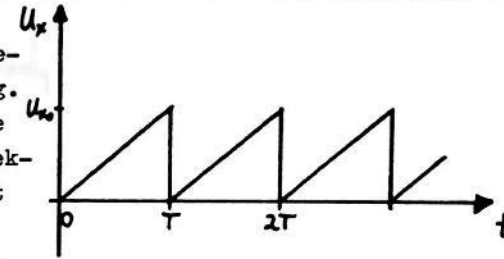


Im Diagramm sieht das so aus. Die Spannung schwingt periodisch zwischen $+U_0$ und $-U_0$ hin und her. Die Ablenkung unseres Striches

auf dem Bildschirm ist nun ein Maß für dieses U_0 . Der Strich erstreckt sich auch von $+U_0$ nach $-U_0$. Die Eichung dieser Spannung als y -Ablenkung auf dem Schirm hängt natürlich mit der Entfernung Kondensator-Schirm zusammen und kann leicht vorgenommen werden. So - ein Strich zu sehen, der sich

von $+U_0$ nach $-U_0$ erstreckt bringt nichts neues. Dafür können wir auch ein normales Meßgerät verwenden und U_0 bestimmen. Bei der Braun'schen Röhre haben wir noch die x -Ablenkung, die wir jetzt gebrauchen.

Legen wir an U_x eine sogenannte Sägezahnsschwingung. So eine Schwingung (siehe Bild) kann durch eine elektrische Schaltung erzeugt werden; uns interessiert aber zunächst nicht, wie.



Wie wird unser Strahl durch die Sägezahnsschwingung bewegt, wenn $U_y = 0$ ist und bleibt ? Nun - von $t=0$ bis T steigt die Spannung an, d.h. der Strahl bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit von Ursprung nach rechts (wenn an der rechten Kondensatorplatte der positive Pol liegt). Bei $t=T$ wird U_x plötzlich null, d.h. der Strahl springt rasch wieder zum Ursprung zurück. Dann bewegt er sich wieder nach rechts, springt zurück usw. Geht das schnell genug, d.h. ist die Frequenz der Sägezahnsschwingung groß genug (≥ 50 Hz), so sieht man wieder einen Strich, der von 0 bis zur Ausdehnung entsprechend U_{x0} reicht. Legen wir nun an die y -Ablenkung unsere sinusförmige Wechselspannung, und synchronisieren beide Signale (d.h. daß beide Frequenzen im Verhältnis einfacher Zahlen zueinander stehen - im Oszillatorbau heißt das "triggern"), so sehen wir auf dem Bildschirm eine Sinusspannung, die genau wie das Diagramm auf der letzten Seite aussieht. Die Frequenz der Spannung können wir aus der eingestellten Sägezahnfrequenz leicht ermitteln (am Oszillator die sogenannte Zeitbasis). Man kann also mit einem Oszillograph zeitabhängige Spannungen direkt sichtbar machen.

Häufig gibt es Zweistrahlsszillographen, die zwei Elektronenstrahlen, mit separaten y -Ablenkungen haben. Dort kann man zwei zeitabhängige Spannungen gleichzeitig betrachten und vergleichen (Amplituden, Frequenz- oder Phasenunterschiede).

Das Fernsehen funktioniert ganz ähnlich : Die x -Ablenkung läßt einen Elektronenstrahl von links nach rechts wandern, die y -Ablenkung sorgt dafür, daß dieses links-rechts-Wandern zeilen-

2. Elektronenröhre

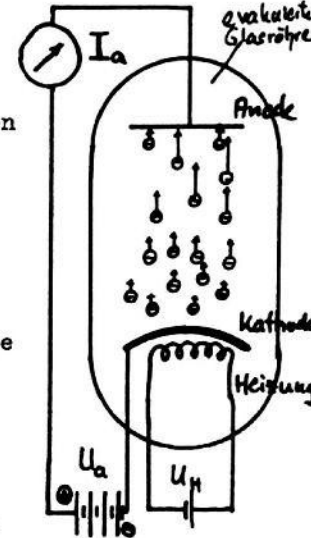
a) Raumladungen

weise geschieht. 625 Zeilen ergeben ein Bild. 25 Bilder werden in einer Sekunde übertragen. Bisher wäre das allerdings sehr langweilig : man würde nur ein weißes Bild sehen. Nichts sonst. Erreicht man nun, daß man die Stärke des Elektronenstrahls kontinuierlich ändern kann, indem man zwischen Kathode und Anode ein mehr oder weniger negativ aufgeladenes Gitter einfügt (genauere Erklärung folgt im nächsten Kapitel), so kann man die einzelnen Punkte auf dem Bildschirm (ca. 5 Millionen pro Sekunde) entsprechend hell oder dunkel samt allen Zwischenwerten erscheinen lassen. Und damit ist es möglich, komplette Bilder zu übertragen.

Das Farbfernsehen funktioniert ganz analog : dort werden drei Elektronenstrahlen unabhängig voneinander erzeugt (jeweils für die Farben Rot, Grün und Blau). Diese treffen auf dem Schirm statt wie beim SW-Fernsehen auf einen Punkt auf drei benachbarte Punkte auf (ein sogenanntes Tripel). Für jedes Tripel gibt es in einer vor dem Schirm liegenden Lochmaske drei Löcher. Der Schirm ist so konstruiert, daß er pro Tripel drei verschiedenen fluoreszierende Substanzen erhält (für die drei Farben).

Sieht man sich einen Farbfernseh Bildschirm aus der Nähe an, erkennt man die pro Bildpunkt im Tripel angeordneten drei Farbpunkte rot, grün und blau. Ist der Bildschirm weiß, sieht man diese drei Farben auch, aber alle in der gleichen Intensität. Diese Intensitätsunterschiede zwischen den drei Farben pro Punkt sind es nämlich, die den Punkt in einer beliebigen Farbe (schwarz, weiß, rot, grün, blau und alle Mischfarben) erscheinen lassen. Wie bekannt, gibt es verschiedene Farbfernsehverfahren, die sich in der Übertragung der drei verschiedenen Farbsignale unterscheiden. Würde man die drei Signale unabhängig voneinander übertragen, bräuchte man eine große Bandbreite pro Übertragungskanal. So gibt es verschiedene Modulationstricks, die Übertragung zu rationalisieren - und darin unterscheiden sich eben die verschiedenen Systeme.

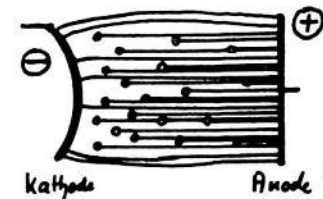
Der Strom zwischen der Kathode und der Anode in einer Elektronenröhre (nebenstehendes Bild) ist im Normalfall stationär, d.h. konstant. Das ist einleuchtend : die Kathode hat immer die gleiche Spannung gegenüber der Anode, die Heizleistung der Kathodenheizung ist immer konstant, also emittiert die Kathode immer gleichviel Elektronen pro Sekunde. Die Anode ist positiv geladen, zieht also die Elektronen an. Diese werden zur Anode hin beschleunigt. Das würde aber bedeuten, daß kein stationärer Stromfluß vorliegt, dies würde nämlich einen gleichförmigen Elektronenstrom voraussetzen. Man kann die Stromstärke messen, die ist immer gleich. Also was ist da passiert ? Betrachten wir uns das genauer :



Die Stromdichte, d.h. Strom pro Fläche (das bedeutet, der fließende Strom pro Querschnittsfläche, durch den die fließenden Elektronen treten; das ist hier die Röhrenquerschnittsfläche) ist proportional zur Ladung der Elektronen, zur Elektronengeschwindigkeit und zur Elektronenzahldichte :

$$i = \frac{\Delta I}{\Delta A} = e_0 \cdot v \cdot n ; \quad n = \frac{\text{Zahl der Elektronen}}{\text{Volumen}}$$

Wenn $I = \text{const.}$ muß auch $i = \text{const.}$ sein, d.h. wenn \vec{v} von Volumenelement zu Volumenelement variiert (das heißt es ja, wenn die Elektronen beschleunigt werden), dann kann auch n nicht konstant sein. In der Nähe der Kathode (\vec{v} klein) ist n groß, dort sammeln sich also viele Elektronen. Diese sogenannte "Raumladungswolke" wird zur Anode hin immer dünner. Was hat das für Konsequenzen ? Die von der Anode ausgehenden Feldlinien erreichen gar nicht alle die Kathode, sondern oft in den Ladungen der Raumladung. Das bedeutet aber, daß das elektrische Feld (das entspricht ja der Feldlinien-

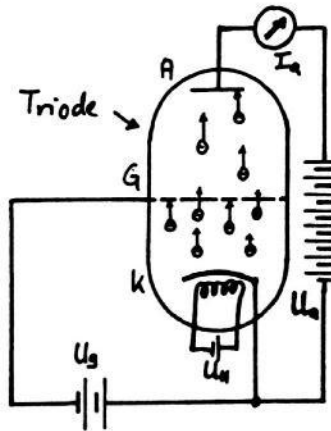


dichte) zur Kathode hin immer kleiner wird. Und das bedeutet, daß die von der Kathode austretenden Elektronen nur insoweit zum Stromfluß beitragen, als sie die Elektronen ersetzen, die (aus der Raumladungswolke kommend) von der Anode absorbiert werden. Wird nun die Spannung zwischen Kathode und Anode erhöht, so reichen die Feldlinien von der Anode her weiter zur Kathode hin (da die Elektronen schneller beschleunigt werden). Die Raumladungswolke wird kleiner. Der Strom wächst an, und zwar soweit, bis sich wieder eine Raumladungszone vor der Kathode aufgebaut hat.

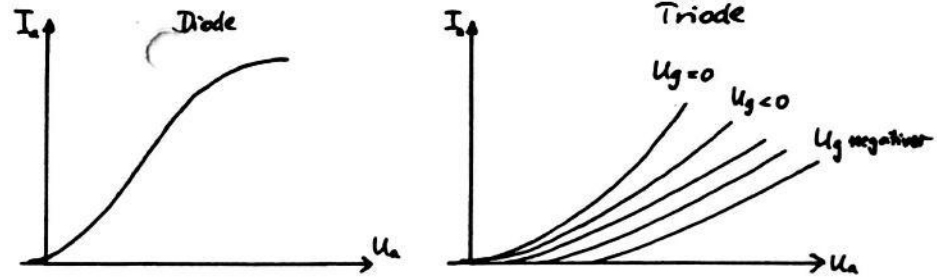
b) Die Triode

Bisher sprachen wir von der Elektronenröhre mit Kathode und Anode. Eine solche Anordnung nennt man Diode. Damit kann man Wechselströme gleichrichten - da sie den Strom nur in einer Richtung durchläßt (die Elektronen können nur von der Kathode zur Anode wandern, d.h. der Strom fließt nur von der Anode zur Kathode, denn wir wissen ja noch, daß die technische Stromrichtung umgekehrt zur Elektronenbewegung ist, oder ??).

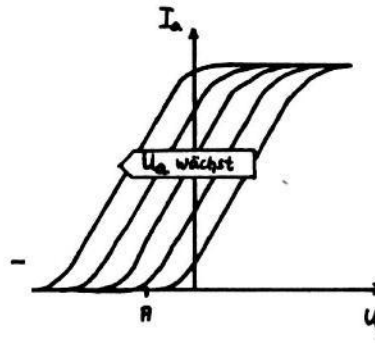
Man kann solch eine Elektronenröhre auch zu Regelungszwecken verwenden. Hauptsächlich im Verstärkerbau. Dort ist sie zwar vielfach durch die Transistoren ersetzt worden, die weniger Leistung verbrauchen und nicht so heiß werden, aber für Leistungsverstärker wird die Röhre noch verwendet. Wie kann man nun den Stromfluß im Innern der Röhre steuern? Nun - einfach indem man ein Gitter (Drahtnetz) einführt, daß mehr oder weniger positiv oder negativ geladen wird (siehe Zeichnung einer Verstärkerschaltung).



Zunächst zur Röhre selbst. Trägt man den Anodenstrom (Strom zwischen Kathode und Anode) gegen die Anodenspannung auf, erhält man die Kennlinie der Röhre. Schaltet man nun das Gitter dazu (mit

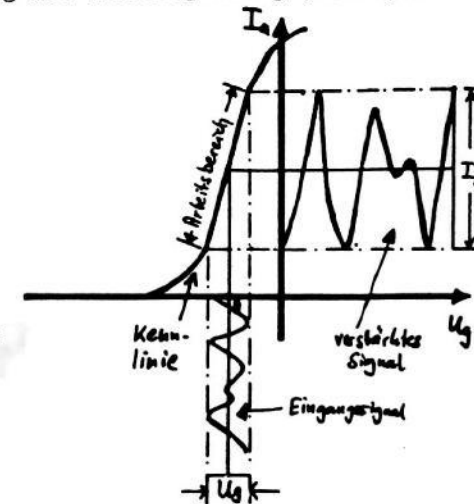


negativer Spannung (rechtes Bild), so verändert sich die Steilheit der Kennlinie. Nun hängt es von der Linearität und der Steigung der Kennlinie ab, wie gut die Verstärkung ist.



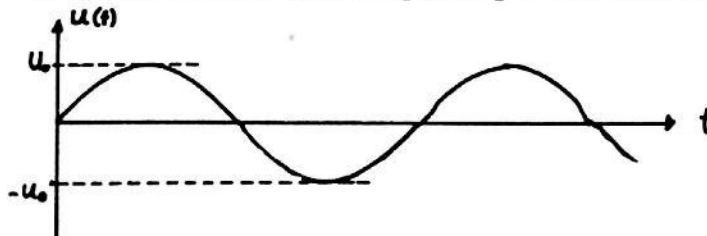
Trägt man U_g (also die Gitterspannung) gegen den Anodenstrom auf, sieht man, daß für verschiedene Anodenspannungen die gleichen Kennlinien herauskommen, nur daß diese für größeres U_a nach links verschoben werden. Man wählt nun ein U_a bei dem beim vorgegebenen U_g z.B. im Punkt A eine möglichst lineare Kennlinie darüberliegt. Dann hat man optimale Verstärkung. U_g ist meist vorgegeben, durch die Spannung, die verstärkt werden soll. Deshalb stellt man U_a danach ein.

So nun das ganze etwas weniger technisch, dafür verständlicher: Wir haben einen konstanten Elektronenstrom zwischen Anode und Kathode. Die Elektronen sind negativ, werden also von der Anode angezogen. Schalten wir jetzt ein negatives Gitter dazwischen, kann durch geringfügige Änderung der Gitterspannung (mehr positiv oder mehr negativ) eine starke Änderung des Stromflusses erreicht werden. Kleine Spannungsänderungen \rightarrow große Stromänderungen (Verstärkung). Nebenstehendes Bild zeigt, wie eine sich ändernde Spannung (z.B. von einem Mikrophon kommend) verstärkt wird. Die Kennlinie gibt Auskunft über Stärke (Steilheit) und Güte (Linearität) der Verstärkung.



VII. WECHSELSTROM

Wenn wir zu Hause eine Lampe einschalten, so fließt Wechselstrom durch die Leitung. Was ist aber Wechselstrom? Wir haben uns bisher mit Gleichstrom befaßt - das war ein Stromfluß, der zeitlich konstant war. Durch die Leiter des Stromkreises floß immer der gleiche Strom. Der Strom hatte immer die gleiche Richtung und war immer gleich stark. Beim Wechselstrom nun sieht das etwas anders aus. Dort ändert sich die Stromstärke in Stärke und Richtung periodisch. Und warum tut sie das? Das tut die Stromstärke natürlich nur dann, wenn am Stromkreis eine Spannung anliegt, die sich ebenso periodisch ändert, also eine Wechselspannung. Wir sehen uns solche Wechselspannungen und -ströme einmal an:



Wir sehen: die Spannung schwingt periodisch zwischen den Maximalspannungen U_0 hin- und her. Daher ist es klar, daß wir die Zeitabhängigkeit der Spannung (und auch des Stromes) formelmäßig genauso schreiben, wie wir es damals bei den Auslenkungen für Schwingungen gemacht haben. Wir sagen also

$$U(t) = U_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

T ist hier die Zeit, die vergeht, bis die Spannung wieder die gleiche Phase hat (das entspricht direkt der Schwingungsdauer bei der Pendelbewegung). Da $\frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \omega$ ist, können wir auch schreiben:

$$U(t) = U_0 \sin \omega t$$

U_0 ist hierbei natürlich die Spannungsamplitude.

Unser Netz hat auch eine Wechselspannung mit der Frequenz $\nu = 50$ Hz (die Spannung schwingt also 50mal in der Sekunde zwischen U_0 und $-U_0$ hin und her). Wobei dann an der

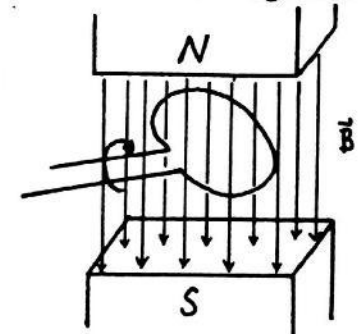
Steckdose der eine Pol immer geerdet ist, d.h. dort herrscht immer gleiches Potential (Nulleiter), während das Potential am anderen Pol periodisch zwischen U_0 und $-U_0$ schwankt.

Zuerst aber fragen wir uns, wie denn solch ein Wechselstrom erzeugt wird. Denn es wird jedem einleuchten, daß man mit Galvanischen Elementen keine Wechselströme herstellen kann.

1. Erzeugung von Wechselströmen

Wechselströme erzeugt man meist auf induktivem Wege mit Dynamomaschinen.

Eine Leiterschleife dreht sich in einem homogenen Magnetfeld. Die Drehung der Leiterschleife rührt von einer Turbinendrehung her: die Turbine wird durch strömenden Dampf (Kraftwerk) oder strömendem Wasser (Wasserkraftwerk) in Drehung versetzt.

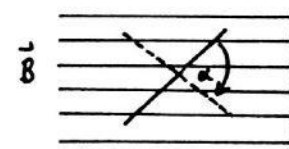


Was geschieht nun, wenn man eine Leiterschleife in einem Magnetfeld bewegt? Es wird in ihr ein Strom induziert.

Wir wollen das nach dem Induktionsgesetz berechnen:

Die Schleife drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \text{ . Die Schleife habe die Fläche } A \text{ .}$$



Nun wird aber die Zahl der Feldlinien, die durch die Fläche gehen, periodisch mit der Drehung schwanken.

Nur die Projektion der Leiterschleifenfläche in Richtung der Feldlinien trägt zur Induktion bei.

Wie groß ist die effektiv von Feldlinien durchsetzte Fläche?

diese Fläche ist $A \cos \alpha$.

Und wie groß ist der magnetische Fluß durch diese Fläche?

Der ist $\Phi = B \cdot A \cdot \cos \alpha = B A \cos \omega t$

Warum das?

Wenn $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ und α ist konstant, dann gilt $\omega = \frac{\alpha}{t}$ und

$$\alpha = \omega t$$

So - und jetzt zum Induktionsgesetz :

Es war
$$U_{\text{ind}} = - \frac{d}{dt} \Phi$$

Hier gilt dann also
$$U_{\text{ind}} = - \frac{d}{dt} (B \cdot A \cdot \cos \omega t) = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin \omega t$$

Gut - das ist also die Spannung, die in der Leiterschleife induziert, und an den Schleifringen abgegriffen wird. Sie ist periodisch in der Zeit, was aber ist $B \cdot A \cdot \omega$? Machen wir eine Dimensionsbetrachtung $[B] = \frac{V \cdot \text{sec}}{m^2}$, $[A] = m^2$, $[\omega] = \frac{1}{\text{sec}}$

also ergibt sich als Dimension für $[B A \omega] = V$
Es handelt sich hier also um eine Spannung. Und zwar ist diese Spannung konstant.

Es ist logisch, daß dieses U_0 , die Scheitelspannung ist, also die Spannung, die wir vorher Spannungsamplitude nannten. Wir sehen - wir erhalten dasselbe Ergebnis wie vorher :

$$U_{\text{ind}} = U(t) = U_0 \sin \omega t$$

Das also kommt aus unserer Steckdose heraus, bzw. diese Wechselspannung liegt an. Schließen wir darüber einen Stromkreis, so fließt in diesem der Strom

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$$

Dies aber nur, falls wir nur ohmsche Widerstände haben. Wie wir später noch sehen werden, gibt es im Wechselstromkreis noch andere Widerstände, als die, die wir schon kennen. Es handelt sich dabei um den kapazitiven und den induktiven Widerstand (also Kondensator und Spule).

2. Effektivwerte

Wir wissen, wir haben in unserem Hausnetz eine Spannung von 220 V. Was aber ist bei $U(t) = U_0 \sin \omega t$ 220 V ? Ist dies die Scheitelspannung U_0 oder was ?

Was können wir mit dem Strom anfangen ? Wir können ihn Arbeit leisten lassen. Man definiert nun die Stärke der

Spannung so :

Wir nennen den Wert von Wechselstrom (und Wechselspannung), der die gleiche Arbeit verrichtet, wie der entsprechende Gleichstrom (und die Gleichspannung) Effektivwert.

Es gibt somit eine Effektivspannung und eine Effektivstromstärke U_{eff} und I_{eff} . Und bei unserem Stromnetz ist eben $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$.

Gut - wenn die Effektivspannung 220 V beträgt, wie groß ist dann U_0 ? Wir nehmen an, daß U_0 größer als U_{eff} ist. Denn U_{eff} ist ja prinzipiell so etwas wie ein Mittelwert der Spannung. Gut U_0 ist also größer als U_{eff} , aber wie groß ist es. Das wollen wir nun errechnen :

$$U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$$

$$I(t) = I_0 \cdot \sin \omega t$$

Die Momentanleistung, die die Wechselspannung $U(t)$ im Widerstand R erzeugt, ist

$$P = U(t) \cdot I(t) = \frac{U(t)^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t$$

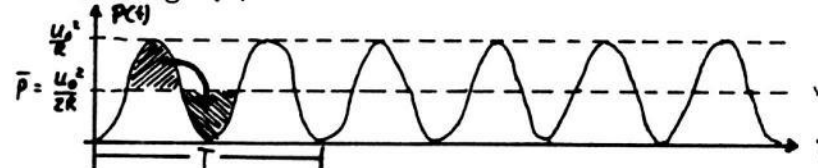
da nun $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$ ist, gilt

$$P = \frac{U_0^2}{2R} (1 - \cos 2\omega t)$$

$$= \frac{U_0^2}{2R} - \frac{U_0^2}{2R} \cos 2\omega t$$

Das heißt also, daß auch die Leistung periodisch schwankt. Ja - das ist so. Wir brauchen aber die mittlere Leistung, um sie mit der Leistung gleichzusetzen, die eine Gleichspannung U_{eff} am Widerstand R erzeugt, gleichzusetzen.

Wir suchen den Mittelwert. Dazu zeichnen wir einmal diese Leistung $P(t)$:



Wir sehen, daß die Spitzen der Kurve gerade in die Lücken hineinpassen, daß also genausoviel Flächenanteil über dem Wert \bar{P} liegen, wie darunter. Der Mittelwert der Leistung ist also

$$\bar{P} = \frac{U_0^2}{2R}$$

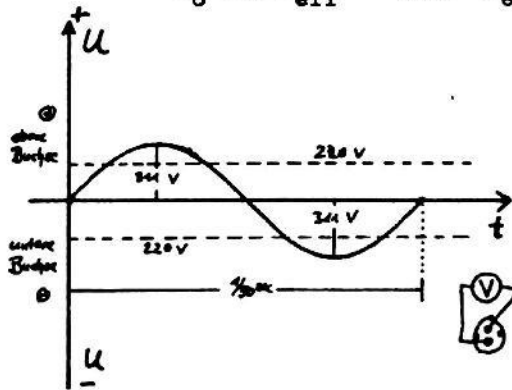
Diese mittlere Leistung \bar{P} wird durch den Wechselstrom $U(t)$ am Widerstand R erzeugt.

Am gleichen Widerstand R erzeugt eine Gleichspannung U_{eff} die Leistung $P' = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = U_{\text{eff}}^2 / R$

Da wir sagten, daß der Effektivwert einer Wechselspannung gleich der Gleichspannung ist, die im selben Widerstand die gleiche Durchschnittsleistung hervorbringt, müssen wir $\bar{P} = P'$ setzen:

$$\bar{P} = P' : \frac{U_0^2}{2R} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} \Rightarrow$$

$$U_0^2 = 2 U_{\text{eff}}^2 \quad \text{oder} \quad U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$



Nehmen wir wieder unseren

Netzstrom als Beispiel:

$$U_{\text{eff}} = 220 \text{ V} \Rightarrow U_0 = 311 \text{ V.}$$

Für die Stromstärke gilt

dann natürlich das Analoge:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

3. Arbeit des Wechselstroms

Wollen wir noch rasch die Arbeit berechnen, die ein Wechselstrom leisten kann - im Prinzip ist dies das Gleiche, wie das, was wir im Kapitel davor gemacht haben:

$$\text{Arbeit von Gleichstrom} = W_{\text{gl}} = U \cdot I \cdot t$$

$$\text{Arbeit von Wechselstrom} = W_w = ?$$

Beim Gleichstrom war die Fläche $UI \cdot t$ ein Rechteck. Deshalb haben wir diese beiden Größen einfach multipliziert. Beim Wechselstrom nun ist das viel komplizierter. $U(t)I(t)$ ist zeitabhängig. Deshalb gibt es kein Rechteck, sondern irgendwige Fläche

$$W_w = \int_0^t U_0 \cdot I_0 \cdot \sin^2 \omega t \, dt = U_0 \cdot I_0 \cdot \int_0^t \sin^2 \omega t \, dt$$

In einer Formelsammlung finden wir

$$\int \sin^2 cx \, dx = -\frac{\sin cx \cdot \cos cx}{2c} + \frac{1}{2} x$$

also hier bei uns

$$\int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \left[-\frac{\sin \omega t \cdot \cos \omega t}{2\omega} + \frac{1}{2} t \right]_0^T$$

$$= -\frac{\sin \omega T \cos \omega T}{2\omega} + \frac{1}{2} T - 0$$

$$\text{da } \omega T = \frac{2\pi}{T} \cdot T = 2\pi \quad = -\frac{\sin 2\pi \cos 2\pi}{2\omega} + \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} T$$

setzen wir dies ein so ergibt sich:

$$W_w = I_0 \cdot U_0 \cdot \frac{1}{2} T$$

Da diese Arbeit ja für alle Zeiten gilt ($W = W(t)$), setzen wir wieder das kleine t ein:

$$W_w = I_0 \cdot U_0 \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \cdot t = I_{\text{eff}} \cdot U_{\text{eff}} \cdot t$$

Es ergibt sich also ganz analog zum Gleichstrom:

Arbeit eines Wechselstroms

$$W = I_{\text{eff}} \cdot U_{\text{eff}} \cdot t$$

4. Wechselstromwiderstände

In Leitern gibt es einen Widerstand. Das haben wir beim Gleichstrom schon gesehen und warum soll es beim Wechselstrom anders sein? Diesen Widerstand, der auch beim Gleichstrom auftritt, nennen wir zur besseren Identifikation Ohmscher Widerstand R . Für ihn gilt das selbe wie beim Gleichstrom:

Momentanwert $I(t) = \frac{U(t)}{R}$, Effektivwert $I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R}$

Scheitelwert $I_0 = \frac{U_0}{R}$.

a) kapazitiver Widerstand

Für Gleichstrom ist ein Kondensator ein unüberwindliches Hindernis. Liegt an einem Kondensator eine Gleichstromquelle an, so lädt sich dieser nur auf - sonst nichts.

Der Gleichstromwiderstand eines Kondensators ist somit unendlich groß. Bei Wechselstrom ist das aber anders.

Was passiert, wenn in einem Stromkreis, in dem sich ein Kondensator befindet Wechselstrom fließt?

Der Kondensator wird dauernd auf- und wieder entladen. Und zwar vertauschen sich die Vorzeichen der Ladungen dauernd. Insgesamt wird ein fließender Strom vorgetäuscht. Für Wechselstrom ist also der Kondensator kein unüberwindliches Hindernis sondern ein endlicher Widerstand.

Betrachten wir den Vorgang genauer:

Wenn in einem ganz bestimmten Zeitpunkt die Spannung $U(t)$ ihr Maximum erreicht (U_0), dann hat der Kondensator für kurze Zeit die Ladung $Q = C \cdot U$. Zu diesem Zeitpunkt fließen keine Ladungen zu- oder ab. Deshalb ist $I(t)$ zu diesem Zeitpunkt gleich Null. Die Ladungsänderungen beim Auf- und Entladevorgang gehen dann am schnellsten vor sich, wenn die Spannung den Wert Null durchläuft. Dort liegen dann die Maxima und Minima der Stromstärke.

Wir wollen das ganze mathematisch untersuchen:

Ändert sich in der Zeit dt die Ladung des Kondensators um dQ , dann fließt der Strom $I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$.

Also: wenn an dem Kondensator die Spannung $U(t) = U_0 \sin \omega t$ anliegt, so gilt für die Ladung auf dem Kondensator

$$Q = C \cdot U = C \cdot U_0 \sin \omega t$$

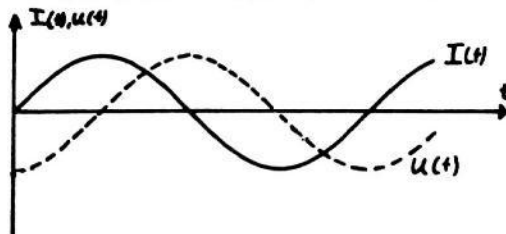
Wie groß ist dann die Stromstärke in den Zuleitungen?

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \cdot U_0 \cdot \frac{d}{dt} \sin \omega t = C \cdot U_0 \cdot \omega \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$$

Wir sehen: das Maximum der Funktion $I(t)$ tritt um $\frac{\pi}{2}$ früher ein, als das Maximum der Spannung. $\frac{\pi}{2} \hat{=} \frac{T}{4}$.

Also es ist $I_0 = \omega C U_0$

$$\frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{1}{\omega C}$$



Formal war ja der Quotient aus Spannung und Stromstärke gleich einem Widerstand.

hier

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

Dies nennt man den kapazitiven Widerstand

Verdoppelt man die Frequenz, so halbiert sich der Widerstand. Das ist einsichtig, denn er lädt sich dann doppelt so schnell auf und ab, der Stromfluß scheint also stärker zu sein.

b) induktiver Widerstand

Wir schalten in einen Stromkreis eine Spule. Beim Gleichstromkreis ändert sich dadurch der ohmsche Widerstand, die Stromstärke sinkt etwas (gegenüber dem Kreis ohne Spule). Dies ist beim Wechselstromkreis genauso. Das ist dann der ohmsche Anteil des Widerstandes. Schieben wir nun allerdings in die Spule einen Eisenkern, dann sinkt die Stromstärke im Wechselstromkreis erheblich, d.h. der Widerstand steigt rapide an. Und dies, weil in der Spule eine Gegenspannung induziert wurde (Selbstinduktion). Es ergibt sich beim Wechselstrom durch eine Spule ein sogenannter induktiver Widerstand R_L .

Die Gegenspannung ist, wie wir wissen $U_{\text{ind}} = -L \cdot \dot{I}$. Wenn an der Spule die Spannung U anliegt, gilt

$U - L \dot{I} - I R = 0$ Wenn wir nun annehmen, R sei sehr klein, vernachlässigen wir es zunächst, also

$$\Rightarrow \dot{I} = \frac{U}{L} = \frac{U_0 \sin \omega t}{L}$$

dann ist $I = \int \dot{I} dt$ Hier $I = \int \frac{U_0 \sin \omega t}{L} dt$

$$\Rightarrow I = \frac{U_0}{L} (-\cos \omega t) + \text{Const.}$$

Es handelt sich also bei I um eine Minus-Kosinus-Funktion. Das heißt: wenn man den ohmschen Widerstand vernachlässigt, hinkt der Wechselstrom der Wechselspannung um

$\frac{\pi}{2} \hat{=} \frac{\pi}{4}$ in der Phase nach. Der Scheitelwert der Stromstärke I_0 ist hier proportional zur Spannung U_0 .

also hier $\frac{I_0}{U_0} = \omega L$ und dies ist gerade der induktive Widerstand.

Es gilt also für den induktiven Widerstand

$$R_L = \omega L$$

Beim kapazitiven Widerstand eilt der Strom I der Spannung U um $\frac{\pi}{2}$ voraus, beim induktiven Widerstand läuft der Strom in der Phase der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ nach.

5. Wechselstromkreise

Zunächst einmal ein einfacher Fall : wir vernachlässigen den ohmschen Widerstand, haben es also nur mit kapazitivem und induktivem Widerstand zu tun. Diese Widerstände werden oft auch als "Blindwiderstände" bezeichnet.

Treten keine Ohmschen Widerstände auf, gilt für parallel und in Reihe geschaltete Widerstände Ähnliches wie wir es vom Gleichstromfall her kennen :

Reihenschaltung : $X = X_L - X_C$ (X=Blindwiderstände)

Parallelschaltung : $\frac{1}{X} = \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}$

Also im Fall Reihe : $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

im Fall Parallel : $\frac{1}{X} = \omega C - \frac{1}{\omega L}$

Daß sich die Widerstände nicht addieren sondern subtrahieren, liegt mit der Phasenverschiebung bei kapazitivem, bzw. induktivem Widerstand zusammen.

Dies genau zu bestimmen und auszurechnen, müßten wir die komplexe Wechselstromrechnung anwenden, die zwar sehr eindrucksvoll ist, dafür aber die Sache etwas verkomplizieren

würde.

Eine sehr klare und anschauliche Darstellung findet sich bei E. Lüscher Experimentalphysik II (Elektromagnetische Vorgänge) BI-Taschenbuch Band 115, Mannheim 1966, eine Buchreihe (3 Bände), die übrigens sehr empfehlenswert (und preiswert !!) ist.

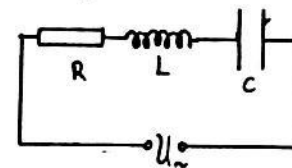
Verkomplizieren wir unsere Widerstände und lassen wir zusätzlich ohmsche Widerstände zu. Einen ohmschen Widerstand bezeichnet man oft auch als Wirkwiderstand, den Gesamtwiderstand nennt man dann "Scheinwiderstand" oder auch "Impedanz". Für die gilt :

R und X in Reihe : $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

R und X parallel : $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2}}$

(R = ohmscher, X = Blind - und Z = Scheinwiderstand).

Beispiel : ohmscher, kapazitiver und induktiver Widerstand



in Reihe : dann gilt $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

mit $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \Rightarrow$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Noch ein Wort zur Phasenverschiebung. Auch die ist nicht so einfach zu berechnen (siehe Lüscher), aber ich gebe sie kurz an : ist φ die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, so gilt für $\tan \varphi$:

R, C, L in Reihe : $\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

R, C, L parallel : $\tan \varphi = R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

Aufgrund der Tatsache, daß im Blindwiderstand für kapazitiven und induktiven Widerstand ein Minuszeichen steht, kann es passieren, daß der Blindwiderstand Null wird.

Nämlich dann, wenn $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ wird. Dies geschieht

bei einer ganz bestimmten Frequenz :

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad \text{oder} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}}$$

mit $\omega = 2\pi \nu = 2\pi \frac{1}{T}$ können wir auch Schwingungsdauer bestimmen :

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad \text{Thomson-Gleichung}$$

Wiese schreibe ich Schwingungsdauer ?

Nun - schalten wir einen kapazitiven und einen induktiven Widerstand parallel zueinander, dann wird für die bestimmte Frequenz $\omega = \sqrt{1/LC}$ der Blindwiderstand besonders klein (null) und nur der Wirkwiderstand bleibt übrig. Insgesamt nimmt also die Spannung dort ein Maximum ein, wenn sie die entsprechende Frequenz hat. Deshalb nennt man das Phänomen auch "Resonanz" wie bei den Schwingungen. Nun was hat das alles aber mit Schwingungen zu tun ? Im nächsten Kapitel wird gezeigt, wie man solch einen Aufbau (Spule und Kondensator parallel) zu elektrischen Schwingungen anregen kann : Ladung schwingt hin und her durch den Kreis und zwar mit der oben angegebenen Schwingungsdauer.

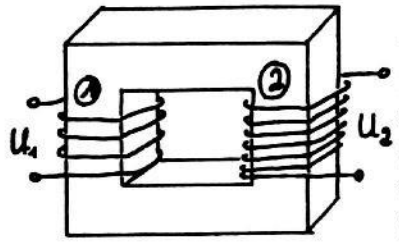
Jetzt aber zurück zum Blindwiderstand. Resonanz gibt es bei der Frequenzbedingung $\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$.

Aber nicht nur bei paralleler sondern auch bei Reihenschaltung (man spricht von Parallel-, bzw. Reihenresonanz).

Bei Reihenresonanz ergibt sich entsprechend obiger Rechnung nicht $X = 0$ sondern $1/X = 0$ d.h. bei Reihenresonanz wird der Blindwiderstand sehr groß. Das heißt : die Teilspannungen über den Blindwiderständen sind größer als die Gesamtspannung; es ergibt sich ein Strommaximum (Spannungsresonanzkreis). Bei der Parallelresonanz sind die Teilströme durch die Blindwiderstände größer als der Gesamtstrom, daher ergibt sich ein Spannungsmaximum (Stromresonanzkreis).

Solche Schaltungen verwendet man oft um ^{Ströme} bestimmter Frequenzen durchzulassen oder zu sperren. Hat man zum Beispiel ein Sammelsurium von vielen Frequenzen (zum Beispiel das Signal eines Mikrophons) kann man bestimmte ausfiltern oder auch dämpfen. Wichtig beim Bau von Klangregelkreisen, Frequenzweichen in Lautsprechern und Equalizern.

6. Der Transformator



Zwei Spulen seien auf einem gemeinsamen Eisenkern hoher Permeabilität und geringer Leitfähigkeit (um Verluste durch Wirbelströme klein zu halten) gewickelt. Eine der beiden Spulen hänge an einer Wechselspannung U. Wir nennen sie Primärspule. So lange die Spule 2 nicht über einen Stromkreis geschlossen ist, verhält

sich Spule 1 im Wechselstromkreis mit Spannung U (dem sogenannten Primärkreis) wie eine Spule mit großer Selbstinduktion, stellt also im Primärkreis einen Wechselstromwiderstand dar. In der Primärspule wird eine entgegengesetzter Induktionsspannung U_{ind} induziert:

$$U_{ind,1} = - N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

wobei N_1 die Windungszahl von Spule 1 und Φ der magnetische Fluß durch die Spule 1 (ebenso durch den Eisenkern und Spule 2) darstellen. Ja- im Idealfall (ohne irgendwelche Verluste) ist der Induktionsfluß Φ durch Spule 2 genauso groß wie durch Spule 1. Das bedeutet aber, daß in Spule 2 auch eine Spannung induziert wird. Wie groß ist die ?

$$U_{ind,2} = - N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{daraus ergibt sich aber, da}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} \text{ bei beiden gleich ist : } \quad \boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

Wir sehen : U_{ind} in Spule 2 verhält sich zur Primärspannung $U_{ind,1}$ wie N_2 zu N_1 , d.h. wie das Verhältnis der Windungszahlen.

Somit sind wir in der Lage über das Windungszahlenverhältnis = "Übersetzungsverhältnis" jede gewünschte Wechselspannung aus einer primären Wechselspannung zu "transformieren".

Und dazu werden auch die Transformatoren verwendet. In fast jedem Haushaltsgerät gibt es das, da die meisten mit kleinen Spannungen arbeiten.

F. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN - OPTIK

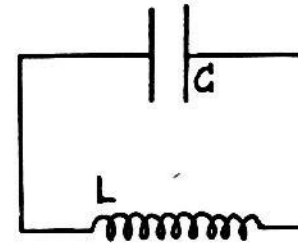
I. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

Nach gründlicher Durcharbeitung der Kapitel Schwingungen und Wellen, sowie Magnetismus sind wir nun in der Lage, uns mit elektromagnetischen Wellen zu befassen, zu denen Radiowellen, Lichtwellen, Röntgenstrahlen, Mikrowellen usw. gehören. Zunächst einmal : was sind eigentlich elektromagnetische Wellen ? Gehen wir einmal vom Wort aus : elektro und magnetisch. Was ist an diesen Wellen elektrisch, was magnetisch ? Gehen wir einmal vom Licht aus. Das kennen wir ja alle, oder ? Nun eigentlich - nicht so genau, bzw. eigentlich garnicht. Wir können Licht von anderen Sternen sehen. Also bewegen sich Wellen durch den materiefreien Raum. Wir werden später noch sehen, daß die elektromagnetischen Wellen tatsächlich kein Ausbreitungsmedium brauchen und sich dadurch von allen bisher behandelten Wellen unterscheiden. Was waren denn Wellen bisher für uns ? Bei den mechanischen Wellen breiteten sich Schwingungszustände räumlich aus, indem gekoppelte schwingungsfähige Gebilde (sogenannte Oszillatoren) die Schwingung immer weitergaben. Das heißt : ohne schwingungsfähiges Medium keine Welle ! Oder ? Nun - für die mechanischen Wellen trifft das zu. Das ist der Grund dafür, daß man z.B. im Weltall nichts hört. Selbst wenn noch so viele und schlechte Science-Fiction-Filme, bei denen bewaffnete Superraumschiffe mit wildem Getöse das All von Hyperraum zu Hyperraum (was is'n das?) durchpflügen, uns dies weiszumachen versuchen!

Nun die elektromagnetischen Wellen tragen ihren Schwingungszustand weiter, indem elektrische und magnetische Felder sich gegenseitig induzieren und fortpflanzen. Auch dies ist ein periodischer Vorgang, mithin eine Welle. Wollen wir das nun genau erkunden und beginnen mit der Bildung solcher Wellen. Dabei fangen wir mit dem sogenannten Schwingkreis an.

1. Elektrischer Schwingkreis

Im Schwingkreis sind eine Spule und ein Kondensator hintereinandergeschaltet. Betrachten wir nun nur den Kondensator : wir laden ihn auf und lassen ihn, indem wir seine Platten kurzschließen, entladen. Die Ladungen auf den Platten gleichen sich aus, nichts anderes geschieht. So, nun setzen wir noch die Spule dazu. Der Kondensator entlädt sich nun über die Spule. Ist das ein



Unterschied? Ja - denn der Stromfluß beim Entladen ist nicht konstant (das haben wir schon im Kapitel "Ein- und Ausschaltvorgänge" - Kap. E. III. 2 - beim Kondensator ist das analog-gesehen). Insofern haben wir eine Induktionswirkung in der Spule. Ein Teil der elektrischen Energie wird in der Spule in magnetische Energie verwandelt - dort baut sich ein Magnetfeld auf, solange, bis der Stromfluß konstant wird. Das ist der Fall, wenn der Kondensator vollständig entladen ist. Dann wird aber auch das Magnetfeld in der Spule nicht mehr aufrechterhalten und bricht zusammen. Dabei ändert es sich und induziert in der Spule wieder eine Spannung, die der ursprünglichen entgegengesetzt ist. Das heißt, es wird wieder Ladung transportiert, nun aber in die andere Richtung. Der Kondensator lädt sich wieder auf. Nun aber anders herum. Ist alle magnetische Energie wieder im Kondensator in Form von elektrischer Energie gespeichert, entlädt sich dieser wieder über die Spule und das Schauspiel beginnt von neuem. Wir haben es also mit einem Hin- und Herfluten von Ladung zu tun, verknüpft mit einem wechselseitigen Auf- und Abbau eines magnetischen und elektrischen Feldes. So - das geht natürlich nur solange gut, wie wir keinen ohmschen Widerstand haben, denn der wandelt elektrische Energie in nicht mehr umwandelbare Wärme um, entzieht also unserer Schwingung (das hin- und herschwappen der Ladung ist ein Schwingungsvorgang!) Energie, dämpft sie also. Vergleichen wir jetzt diesen Vorgang mit einer mechanischen gedämpften Federschwingung. Denn beide sind analog zueinander.

Bei der mechanischen Schwingung waren unsere Parameter : Auslenkung x , Trägheit (charakterisiert durch die Masse) m , Reibung k und Federkonstante D - wem das gerade schon entfallen war, möge sich in Kapitel B.II.2. nachinformieren - es lohnt sich!

Jetzt wollen wir einmal sehen, welche elektrischen Größen diesen zuzuordnen sind. Denn - wir haben ein ganz ähnliches Verhalten und können daher erwarten, daß dieses auch ganz analog zu beschreiben ist.

Fangen wir mit dem einfachsten an, der Reibung. Mit der Reibung, oder Dämpfung im elektrischen Fall war der ohmsche Widerstand verknüpft, also R . Was war die Trägheit im Schwingkreis? Nun - erst durch Zuschalten der Spule bekamen wir eine zeitliche Verzögerung des Ladungsflusses, damit eine Schwingung. Also muß mit der Trägheit die Trägheit des magnetischen Feldes zusammenhängen, also die Größe L . Was entspricht unserer Federkonstanten D ? Nun - D war die Federspannung pro Länge, deshalb sehen wir uns zuerst das Pendant zur Länge (Auslenkung) an. Was schwingte hin und her, nun die Ladung. Die ist aber im geschlossenen Stromkreis immer gleich. Ändern kann sich nur die Ladung pro Zeit, also der Strom $I = dQ/dt$. Diese Größe entspricht unserer Auslenkung, also unserer Längenänderung. Längenänderung entspricht Strom, Länge selbst also Ladung. Probieren wirs aus : D war Federspannung pro Länge, setzen wir also hier an Spannung pro Ladung und das ist die reziproke Kapazität $1/C$.

So - das alles kommt einem wie Zauberei vor. Kann man das so einfach machen - und stimmt das überhaupt?

Das wollen wir nun prüfen : wir stellen die elektrische Schwingungsgleichung auf und vergleichen mit der mechanischen - dann werden wir's ja sehen.

Am einfachsten gehen wir - wie so oft - von einer Energiebilanz aus : Kondensator hat die Energie $E_{el} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$

Spule hat die Energie $E_{mg} = \frac{1}{2} \cdot L J^2$

Nach dem Energieerhaltungssatz ist die Summe beider gleich - (wir wollen zuerst den ungedämpften Fall betrachten, also $R = 0$)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot L J^2 = \text{const.}$$

Die Gesamtenergie const. kennen wir nicht, also differenzieren

wir das ganze mal nach der Zeit (dann fliegt const. nämlich raus; tricky, was?)

$$\frac{Q}{C} \cdot \frac{dQ}{dt} + LI \cdot \frac{dI}{dt} = 0 \quad \text{wir wissen } \frac{dQ}{dt} = I \text{ also ersetzen :}$$

$$\frac{Q}{C} \cdot I + L I \cdot \frac{dI}{dt} = 0 \quad \text{wir können durch } I \text{ kürzen :}$$

$$\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad \text{. Was können wir nun damit anfangen ?}$$

Vergleichen wir einmal mit unserer mechanischen Schwingungsgleichung, die war $m\ddot{x} + Dx = 0$

Dann fehlt noch etwas : eine Ableitung des Stromes nach der Zeit haben wir schonmal - leiten wir halt nochmal ab :

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{dQ}{dt} + L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \quad \text{mit } \frac{dQ}{dt} = I \implies \frac{1}{C} \cdot I + L \cdot \ddot{I} = 0$$

Ja - und jetzt sehen wir sofort unsere Zuordnungen :

$$x \longrightarrow I, \quad m \longrightarrow L \quad \text{und} \quad D \longrightarrow 1/C \quad \text{wie versprochen!}$$

Machen wir das noch weiter : im mechanischen Fall haben wir auch geschrieben $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ wobei $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ die Frequenz

der Schwingung war. Hier also $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ (einfach "übersetzen")

Blättern wir ein paar Seiten zurück (S. 190), da fanden wir das gleiche als Resonanzbedingung bei hintereinandergeschalteten Spule und Kondensator. Stark, was!

So - schauen wir uns die Lösung der Schwingungsgleichung an (ganz analog, wie im mechanischen Fall) :

$$I(t) = I_0 \cos \omega t$$

Kommen wir nun zum gedämpften Fall. Wieder ausgehend von der Energiebilanz können wir sagen :

$$E_{el} + E_{mg} \neq \text{const.} \quad \text{Allerdings kennen wir die gesamte}$$

Elektrische Energie in einem Stromkreis, die war UIt . Somit die Leistung $UI = I^2 R$ - und das können wir in die Gleichung der ersten Ableitung einsetzen, da

$$- \left\{ \frac{d(E_{el})}{dt} + \frac{d(E_{mg})}{dt} \right\} = I^2 R$$

Das negative Vorzeichen kommt daher, daß dem Kreis Energie ent-

zogen wird. Ausrechnen :

$$-\frac{Q}{C} I - L I \frac{dI}{dt} = I^2 R \quad | :I \quad -\frac{Q}{C} - L \dot{I} = IR$$

nochmaliges Ableiten ergibt :

$$-\frac{1}{C} \cdot \frac{dQ}{dt} - L \ddot{I} = R \dot{I} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{C} I + L \ddot{I} + R \dot{I} = 0$$

vergleichen wir das wieder mit der mechanischen Schwingung, so sehen wir die direkte Korrespondenz zwischen k und R .

Lösung : $I(t) = I_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$

die Abklingkonstante im mechanischen Fall war $\delta = \frac{k}{2m}$

übersetzen wir wieder direkt $\delta = \frac{R}{2L}$

Aus der Theorie der mechanischen Schwingungen können wir auch hier wieder das Ergebnis nehmen :

$$\omega_{\text{ged}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Fassen wir noch einmal kurz unsere Ergebnisse zusammen :

Schwingungsgleichung	$\ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{1}{LC} I = 0$
Eigenfrequenz	$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
Dämpfungsglied	$\delta = \frac{R}{2L}$
Lösung	$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L} t} \cos \omega t$

Auch hier gelten bezüglich des Amplitudenabfalls die gleichen Bedingungen wie im mechanischen Fall :

$$\text{logarithmisches Dekrement} \quad p = \ln \cdot e^{\delta T} = \frac{R T}{2 L}$$

Was war das nochmal, logarithmisches Dekrement ?

Wir erinnern uns : Von Schwingungsdauer zu Schwingungsdauer ist der Amplitudenabfall immer gleich stark, sodaß die Verhältnisse zweier aufeinanderfolgender Maximalamplituden konstant = e^p ist.

So - bisher betrachteten wir die gedämpfte und die ungedämpfte elektrische Schwingung in einem Schwingkreis.

Wie erhalten wir nun im realistischen Fall eine ungedämpfte Schwingung - wir wissen nämlich, daß ein ohmscher Widerstand, also eine Dämpfung in solch einem elektrischen Kreis immer vorhanden ist.

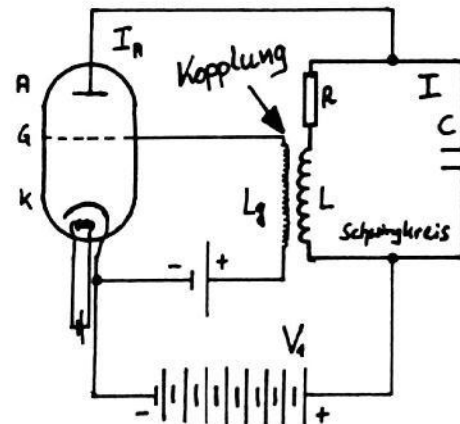
Wie hatten wir es denn im mechanischen Fall gemacht ?

Wir haben immer periodisch Energie zugeführt. Das müssen wir nun auch : periodisch Energie zuführen, aber nur soviel, daß die Schwingung gerade aufrecht erhalten bleibt.

Irgendwo müssen wir diese Energie aber einleiten. Wie geschieht das? An einer Stelle "koppeln" wir eine Schaltung an unseren Kreis an, sodaß Energie gewissermaßen "überfließen" kann. Wir können kapazitiv (das heißt am Kondensator) und induktiv (an der Spule) ankoppeln. Koppeln wir kapazitiv, so bedeutet das genau genommen : wir "pumpen" immer dann, wenn der Kondensator maximal geladen ist (wobei er allerdings durch die Dämpfung etwas weniger Ladung hat als bei der Aufladung vorher) etwas Ladung in den Kondensator ein, gerade so, daß die Energie, die durch Dämpfung verloren ging, ausgeglichen wird.

Im nebenstehenden Beispiel ist eine induktive Rückkopplungsschaltung gezeigt. Hier wird also das Magnetfeld einer "Kopplungsspule" an das unserer Schwingkreisspule "angekoppelt": Der durch die Spule L fließende Wechselstrom I (d.h.

unser Strom im Schwingkreis) erzeugt (außer in L selbst) in der nun angekoppelten (einfach danebengehaltenen Spule) Spule L_g eine Wechselspannung. Diese steuert über das Gitter G der Elektronenröhre den Anodenstrom I_A periodisch (im Rhythmus unserer Schwingung). Diese Steuerung kann so eingerichtet werden, daß dem Schwingkreis aus der Anodenbatterie V_1 im richtigen Takt die nötige Energie zugeführt wird.



So - unser Schwingkreis schwingt nun ungedämpft. Auf entsprechende Gleichungen und mathematische Beschreibungen will ich an dieser Stelle ^{verzichten} Sollte wider Erwarten doch jemand daran interessiert sein, so möge er sich die mathematische Beschreibung der ungedämpften Schwingung mit periodischer Anregung im Kap. "Schwingungen" noch einmal zu Gemüte führen.

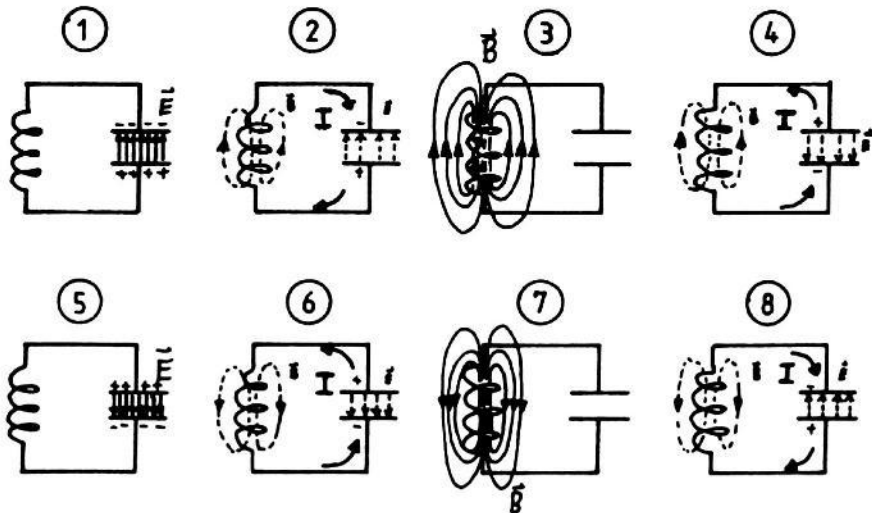
So - wie erhalten wir nun aus dieser Schwingung eine elektromagnetische Welle? Wir wissen ja: eine Welle ist die räumliche Ausdehnung eines Schwingungszustandes. Unsere Schwingung ist bislang noch räumlich auf den Schwingkreis begrenzt. Was also tun?

Betrachten wir uns einmal die Feldlinien in Kondensator und Spule unseres Schwingkreises und wenden wir unser Wissen bezüglich Feldlinien an (falls im Kopf nicht vorhanden → Kap. D I 3. S. 124 f, Kap. D I 6. S. 12B ff, Kap. E I. 2./3. S. 157 - 164).

Beginnen wir mit der Annahme, der Kondensator sei aufgeladen. Er entlädt sich nun direkt über die Spule, nach nebenstehendem Diagramm.

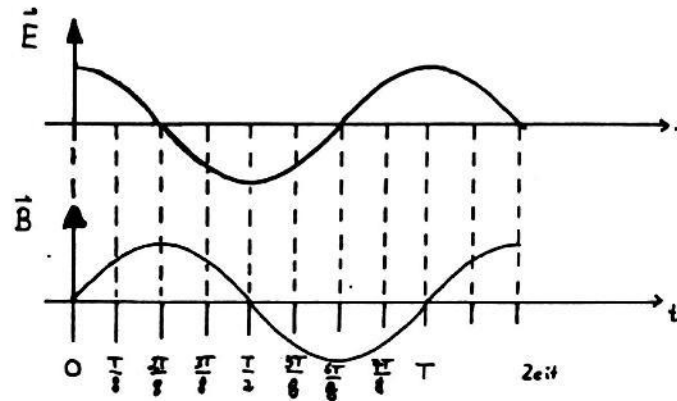


Die einzelnen Phasen sehen wie folgt aus:



1. Kondensator aufgeladen
2. er entlädt sich über die Spule
3. dort induziert die anliegende Spannung ein magnetisches Feld.
4. Dieses klingt wieder ab und (da es sich dabei ändert) induziert es am Kondensator eine Spannung, die nach der Lenz'schen Regel (Kap. E II. 2.b) der Spannung von Fig. 2. entgegengerichtet ist.
5. Also lädt sich der Kondensator nun genau wie bei Fig. 1. nur mit umgekehrtem Vorzeichen auf.
Nun beginnt das Spielchen von neuem:
6. Der Kondensator entlädt sich wieder (mit anderer Stromrichtung und baut in der Spule wieder ein Magnetfeld auf (das natürlich auch in die andere Richtung zeigt)
7. Dieses Magnetfeld klingt wieder ab ... und so fort.

Unten ist der Verlauf des elektrischen und des magnetischen Feldes nach der Zeit aufgetragen. Man erhält zwei phasenverschobene Sinus-Kurven.



① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧

Nr. der Phase

2. Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

Bisher erfüllten unsere theoretischen Spulen und Kondensatoren immer bestimmte Bedingungen:

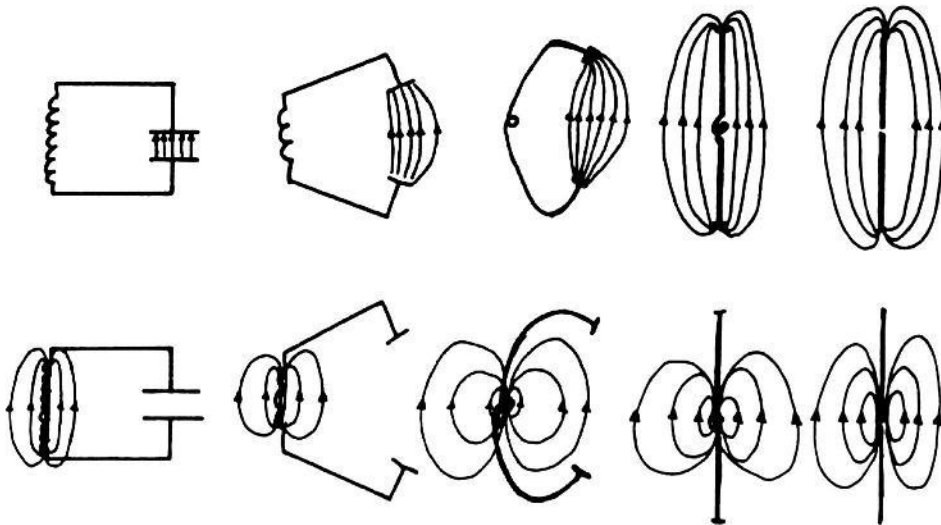
1. Spule sehr lang (damit in der Spule ein homogenes Magnetfeld aufgebaut werden kann, das nur auf das Innere der Spule beschränkt ist).
2. Kondensator (aus dem für das elektrische Feld analogen Grund) ebenfalls sehr groß.

Also ist beiden gemein, daß keine Feldenergie nach außen dringen kann.

Wenn wir also eine Spule und ein Kondensator so verändern, daß Energie des magnetischen und des elektrischen Feldes nach außen dringen können, so können wir durch die erzeugte Energiestrahlung einen entfernt aufgestellten Schwingkreis zu elektrischen Schwingungen anregen.

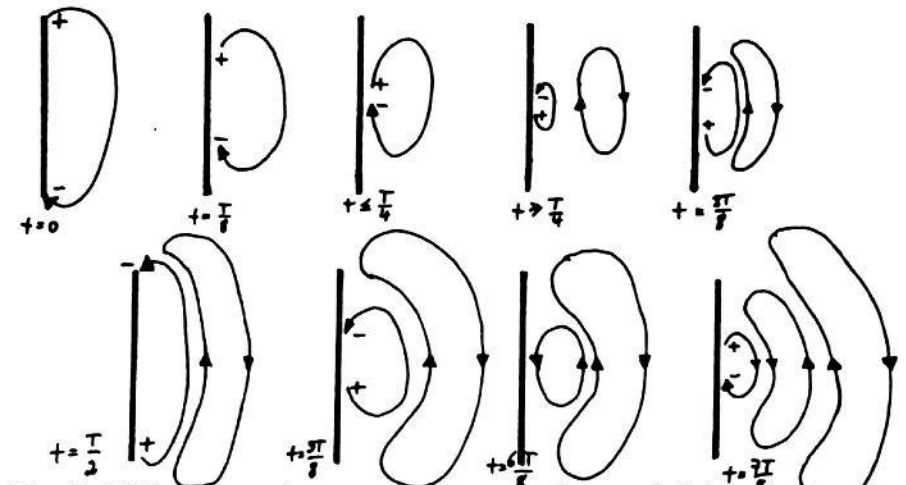
Wie verändern wir aber Spule und Kondensator ?

Einfach nach untenstehendem Schema :

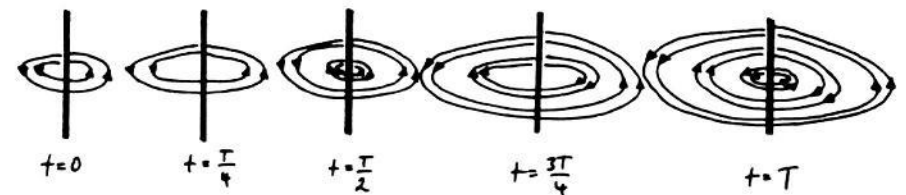


Die Kondensatorplatten reduzieren wir auf einen Punkt (und nutzen so zusätzlich die Spitzenwirkung - Blitzableiter ! - aus), die Spule reduzieren wir auf einen Leiter. Durch solches Aufbiegen des elektrischen Schwingkreises erhalten wir den sogenannten Hertz'schen Dipol, gemeinhin auch als Antenne bekannt. Ein solcher Hertz'scher Dipol unterscheidet sich vom normalen Dipol dadurch, daß nicht nur die Ladungen getrennt sind, sondern daß sich zusätzlich die Ladungsverteilung periodisch ändert.

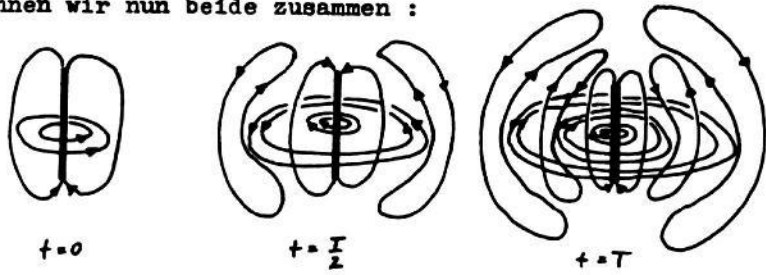
Die Schwingungen eines solchen Hertz'schen Dipols sind stärker gedämpft, als die des entsprechenden Schwingkreises. Da allerdings der ohmsche Widerstand erhalten bleibt, bedeutet das, daß Energie abgestrahlt wird. Dieses nennt man auch Strahlungsdämpfung. Dadurch daß wir Spule und Kondensator geändert haben, haben wir nun eine kleinere Kapazität und Induktivität, d.h. nach der Thomson'schen Schwingungsformel erhalten wir eine sehr hohe Frequenz. Das elektrische (bzw. das magnetische) Feld ändert sehr schnell seine Richtung. Da sich die Feldänderungen nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten, kann das gesamte elektrische Feld in größeren Entfernungen nicht momentan seine Richtung wechseln, gerade dann, wenn die Richtung im Dipol wechselt. Nur direkt am Dipol wechselt das Feld mit der Polung mit, weiter entfernt schnüren sich die Feldlinien zu geschlossenen Feldlinien zusammen (Feldlinien versuchen stets sich zu verkürzen).



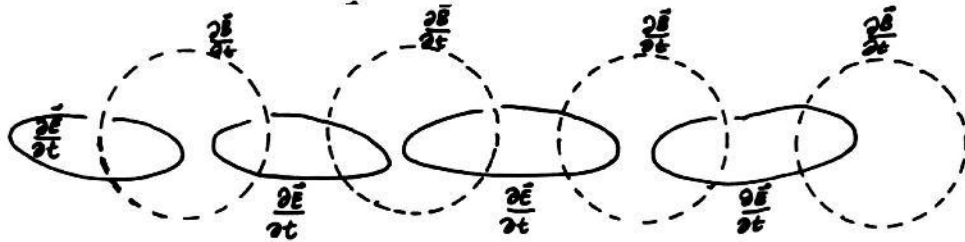
Die Feldlinien werden sozusagen von den nachfolgenden nach außen hin abgestoßen. Für die magnetischen Feldlinien gilt das Analoge :



Zeichnen wir nun beide zusammen :



oder schematisch



so sehen wir, daß sich die elektrischen und magnetischen Felder jeweils nacheinander induzieren.

Das ganze nun noch einmal etwas genauer :

- wir nehmen einen Schwingkreis, dessen Induktivität lediglich aus einer Leiterschleife besteht.
- wir entfernen die Kondensatorplatten bis nur noch ein gerades Leiterstück vorhanden ist.
- Kapazität und Induktivität sind beim elektrischen Dipol längs des Dipols kontinuierlich verteilt.
- Das elektrische Dipolmoment ($\vec{p} = q \cdot \vec{l}$) ist nicht konstant sondern ändert sich mit der Periode der angelegten (d.h. angekoppelten) Wechselspannung. (Hier eine Bemerkung : über eine Rückkopplungsschaltung - wie gezeigt - wird eine Schwingung erzeugt, die induktiv direkt an die Antenne angekoppelt wird. Nachbar der Spule L_g ist also nicht mehr der Schwingkreis, sondern der Hertz'sche Dipol selbst).
- Das elektrische Dipolfeld (also das Feld, daß durch den Dipol erzeugt wird) kann man in eine Nah- und eine Fernzone

einteilen :

In der Nahzone erfüllt das Dipolfeld wie bei einem statischen Feld den Raum und pulsiert mit der Frequenz des Dipols.

In der Fernzone kann die Feldstörung wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit c mit der Änderung des Dipolfeldes nicht mehr Schritt halten. Die Feldlinien kehren nicht wieder zum Dipol zurück, sondern schnüren sich von diesem ab.

- f) Die in sich geschlossenen Feldlinien bilden elektrische Wirbelfelder ($\text{rot } \vec{E}$).

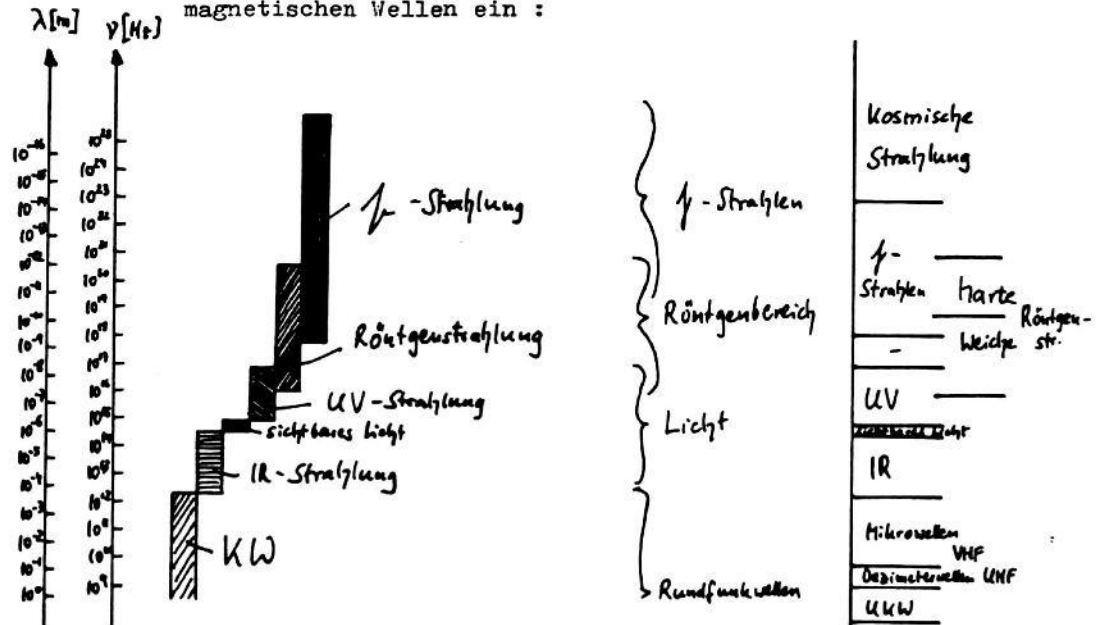
nach Maxwell : ein sich zeitlich änderndes E-Feld erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld $\text{rot } \vec{B}$:

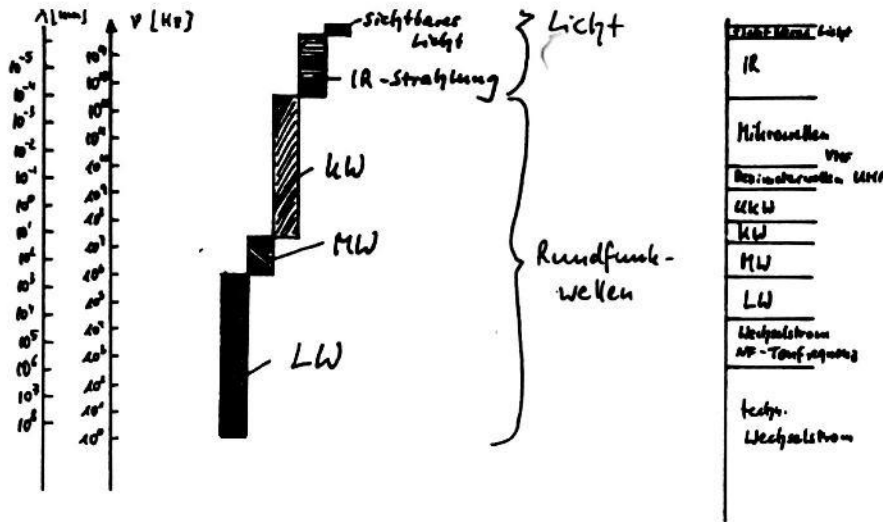
$$c^2 \cdot \text{rot } \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0}$$

Eine Änderung dieses \vec{B} ergibt wieder ein $\text{rot } \vec{E}$:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} \quad \text{und so weiter !}$$

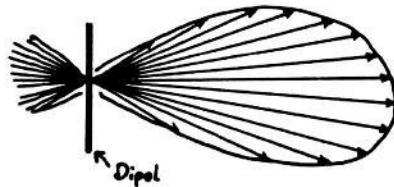
Je nach Frequenz, bzw. Wellenlänge (die sich wie bei allen Wellen aus der Beziehung $c = \lambda \cdot \nu$ ergibt, wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit darstellt) teilt man die elektromagnetischen Wellen ein :





Noch kurz ein Wort zur Abstrahlung vom Dipol :

Die stärkste Abstrahlung liegt in einer Ebene senkrecht zum Dipol. Die Abstrahlung parallel zum Dipol ist null. Ein Abstrahlungsdiagramm ist hier dargestellt.



Ein ganz besonderer Bereich des elektromagnetischen Spektrums bildet das sichtbare Licht.

Es ist natürlich als erstes "entdeckt" worden, da wir eben ein Sinnesorgan für elektromagnetische Wellen dieses Wellenlängenbereichs haben. Natürlich dauerte es lange, bis man erkannte, daß Licht, Wärmestrahlung (Infrarot = IR), Röntgenstrahlung oder Radiowellen alle zur Gesamtheit der elektromagnetischen Wellen zählen, daß sie also im Prinzip das gleiche Phänomen waren, nur mit unterschiedlichen Wellenlängen.

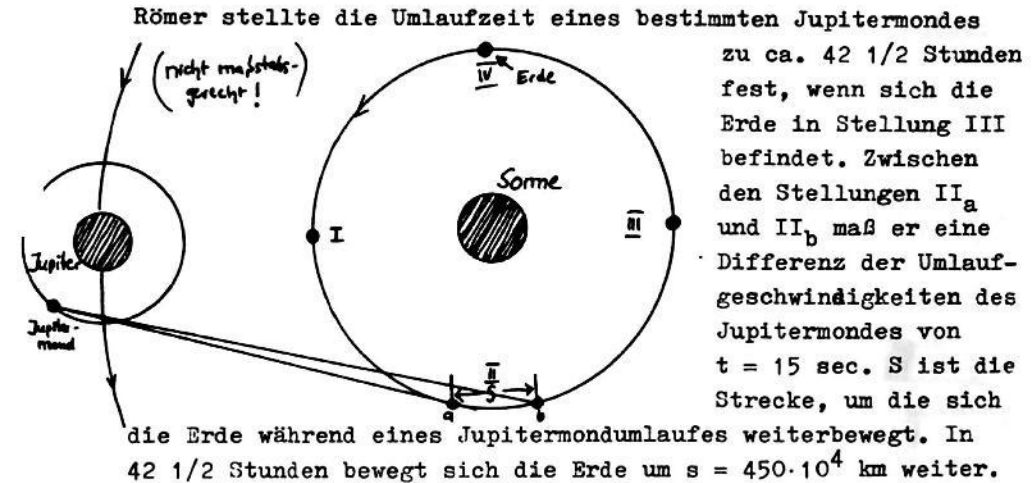
3. Licht

Betrachten wir kurz die Bereiche :

Infrarot (IR)	$80\ 000\ \text{nm} \leq \lambda \leq$	$800\ \text{nm}$
sichtbares Licht	$800\ \text{nm} \leq \lambda \leq$	$400\ \text{nm}$
Ultraviolett (UV)	$400\ \text{nm} \leq \lambda \leq$	$10\ \text{nm}$

a) Messung der Lichtgeschwindigkeit

α) Methode nach Olaf Römer (1676)



$$\Rightarrow c = \frac{s}{t} = \frac{450 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{15} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Dies wäre die bereits 1676 gemessene Vakuum-Lichtgeschwindigkeit.

Noch etwas lernen wir aus dieser Messung : Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist unabhängig von der Lichtwellenlänge, sonst müßte der Mond erst rot oder blau erscheinen, sobald er hinter dem Jupiter hervortritt. Das aber ist nicht der Fall.

β) Zahnradmethode nach Fizeau (1849)



rad unterbrochen. Wenn das durch eine Zahnücke gegangene Licht bei der Rückkehr gerade einen Zahn vorfindet, sieht der Beobachter das Licht der Lichtquelle nicht mehr. Bei doppelter Frequenz des Zahnrades ist das Bild wieder maximal sichtbar, da nun die reflektierten Strahlen durch die Nachbarücke zurückkommen. Es dauert eine Zeit $t = \frac{1}{v \cdot z}$ bis eine Lücke an der Stelle der vorigen ist, wenn das Zahnrad v Umdrehungen pro Sekunde macht und z Zähne hat.

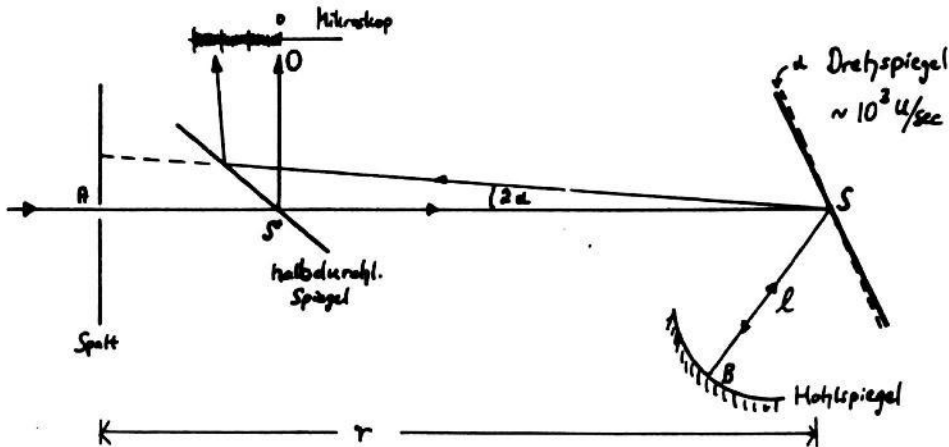
$$\Rightarrow c = \frac{2s}{t} = 2v s z$$

α können wir bestimmen: $\sin(2\alpha) = \frac{d}{r}$. Da α sehr klein ist, können wir auch setzen: $2\alpha \approx d/r$, also mit $t = \frac{2l}{c} = \frac{\alpha}{2\pi n} \Rightarrow c = \frac{8\pi l r n}{d}$

Mit dieser Methode kann man die Lichtgeschwindigkeit in Luft ($c_{\text{Luft}} = 2.997 \cdot 10^8$ m/sec), sowie in diversen Flüssigkeiten und Gasen (dabei wird nur eine Küvette der Länge l , die mit dem entsprechenden Medium gefüllt ist, zwischen die Punkte S und B gestellt) bestimmen; z.B.

$$c_{\text{H}_2\text{O}} = 2.25 \cdot 10^8 \text{ m/sec}, \quad c_{\text{Glas}} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$$

4) Drehspiegelmethode nach Foucault (1850)



Beim ruhenden Drehspiegel ist der Weg des von Punkt A herkommenden Lichtstrahles $A \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow S' \rightarrow O$. Dabei ist die Anlage so aufgebaut, daß $\overline{AS} = \overline{OS} = r$ ist. Dreht sich nun der Spiegel, so wird der reflektierte Strahl nicht mehr in sich selbst zurückreflektiert: während das Licht die Strecke $S \rightarrow B \rightarrow S$ durchläuft ($= 2l$), dreht sich der Spiegel um α , der Strahl wird somit um 2α abgelenkt. Für die Strecke $S \rightarrow B \rightarrow S$ braucht das Licht die Zeit

$t = \frac{2l}{c}$. Ist n die Drehzahl des Spiegels, so dreht er sich in einer Sekunde um den Winkel $2\pi n$; also für den Winkel α braucht er die Zeit $t = \frac{\alpha}{2\pi n}$

II. OPTIK

1. Wellenoptik

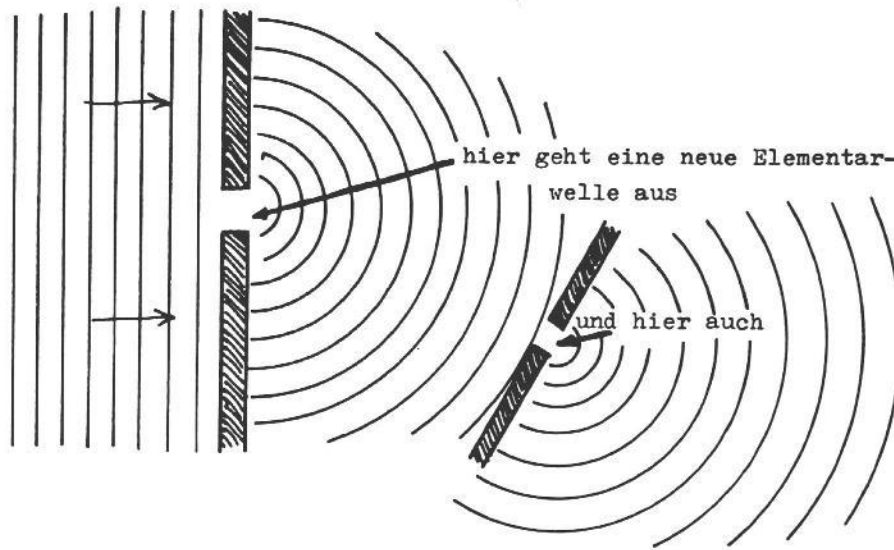
a) Huygens - Fresnel'sches Prinzip

Im Gegensatz zur geometrischen Optik, wo man einen Lichtstrahl makroskopisch als Gerade idealisiert, befaßt sich die Wellenoptik mit den optischen Eigenschaften des Lichtes, die auf die Welleneigenschaften zurückgehen.

Eine große Beschreibungshilfe ist dabei das Prinzip von Huygens und Fresnel:

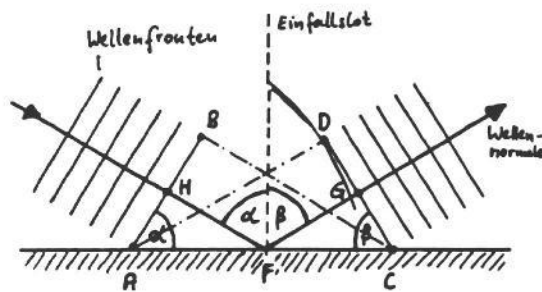
Man kann den Ausbreitungsvorgang einer Welle so deuten, daß man von jedem Punkt einer bestehenden Wellenfläche eine neue kugelförmige "Elementarwelle" ausgehen läßt. Die Einhüllende der Elementarwelle mit allen Punkten der alten Wellenfläche als Zentren, ergibt die Wellenfläche für einen späteren Zeitpunkt.

Eine Skizze mag dies etwas verdeutlichen: Licht soll als ebene Welle ankommen, zweimal durch einen schmalen Spalt treten:



Mit diesem Prinzip kann man sehr gut die Reflexion und die Brechung von Lichtwellen verstehen.

a) Reflexion



Die Wellenfront \overline{AB} (d.h. die Front der Punkte gleicher Phase, also Wellenberge oder -täler) berührt bei A den Spiegel. Während die Erregung noch von $B \rightarrow C$ fortschreitet, geht von A eine Elementarwelle aus, die in derselben Zeit eine kreisförmige Welle mit Radius $\overline{AD} = \overline{BC}$ gebildet hat.

Die von H weiterlaufende Erregung braucht nur die halbe Zeit bis zu F. D.h. die von F ausgehende Elementarwelle erreicht nur den Radius $\overline{FG} = \overline{BC}/2$. Entsprechendes gilt für alle Punkte der Wellenfront \overline{AB} . Da das Dreieck ABC gleich dem Dreieck ADC ist, gilt das Reflexionsgesetz:

$$\alpha = \beta \quad \text{oder} \quad \text{Einfallswinkel} = \text{Reflexionswinkel.}$$

b) Brechung

Brechung tritt immer dann auf, wenn ein Lichtstrahl von

einem Medium (z.B. Luft) durch eine Grenzfläche (z.B. Luft/Glas) in ein Medium (z.B. Glas) trifft, dem eine andere Lichtgeschwindigkeit eigen ist.

Eine Welle (hier wieder durch die Wellenfronten dargestellt) legt im ersten Medium in der Zeit t_1 die Strecke $\overline{BC} = c_1 t_1$ zurück. Während dieser Zeit bewegt sie sich im zweiten Medium um $\overline{AD} = c_2 t_1$ weiter.

$$\text{Mit } \sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

ergibt sich:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{c_1 t_1}{c_2 t_1} = \frac{c_1}{c_2} := n. \quad \text{Die Brechzahl } n \text{ ist per}$$

definitionem das Verhältnis der beiden Lichtgeschwindigkeiten zueinander. Genau hat man es aber anders definiert:

Man definiert:

$$\text{Brechzahl } n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}}$$

So lautet das Brechungsgesetz:

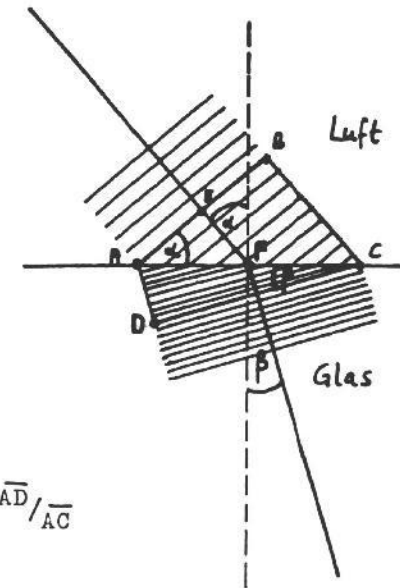
(Strahl geht von Medium 1 nach Medium 2):

$$\frac{\sin(\text{Einfallswinkel})}{\sin(\text{Brechungswinkel})} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

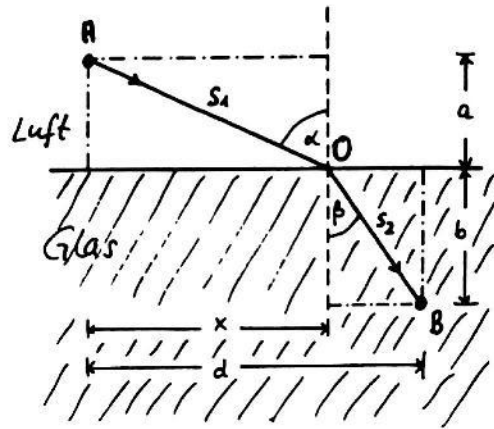
b) Fermat'sches Prinzip

Dieses Prinzip wird auch oft als "Prinzip der kürzesten Zeit" bezeichnet:

"Von allen möglichen Wegen zwischen zwei Punkten A und B, wählen die Lichtstrahlen denjenigen aus, für den sie am wenigsten Zeit brauchen!"



Beispiel : Brechung :



Wir wollen das nebenstehende Beispiel einmal als Minimierungsaufgabe (Schule : Extremwerte !!) ansetzen :

Die Geschwindigkeit, mit der sich das Licht ausbreitet ist c . $C = \text{Lichtweg}/\text{Zeit}$. Oder $t = S/c$
 Hier also $t = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2}$

Mit Hilfe des alten Pythagoras können wir das etwas anders ausdrücken : $t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}$

Warum tun wir das ?

Nun - wir wollen ja den Weg bestimmen, bei dem das Licht die wenigste Laufzeit braucht. Also brauchen wir eine Relation zwischen Weg und Zeit. Am einfachsten machen wir die Grenzfläche zur x -Achse (hier im zweidimensionalen Bild), denn die Abstände a und b sind sowieso festgelegt. So erhalten wir eine Funktion $t = t(x)$. Wenn nun t minimal werden soll, dann muß die erste Ableitung von t nach x gleich null werden :

$$\frac{d}{dx} t(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad - \quad \text{rechnen wir das aus :}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{c_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

oder mehr geometrisch ausgedrückt : $\frac{x}{c_1 AO} = \frac{d-x}{c_2 OB}$

bzw. $\frac{1}{c_1} \sin \alpha = \frac{1}{c_2} \sin \beta \implies \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$

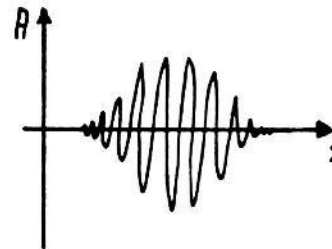
c) Interferenz

Interferenz nennt man die Überlagerung von kohärenten Wellen. Was sind nun kohärente Wellen schon wieder ?

Zwei zueinander kohärente Wellen haben eine konstante Phasendifferenz zueinander. Man könnte meinen, daß wenn man zwei Wellen von genau der gleichen Frequenz erzeugt, daß sie dann notgedrungen kohärent sein müßten. Das ist nicht der Fall. Wieso ?

Wie wir im späteren Kapitel Atomphysik noch erfahren werden, besteht ein Lichtstrahl nicht aus einer unendlich langen Welle mit jeweils gleicher Amplitude. Wenn dem so wäre, wären zwei Wellen gleicher Frequenz immer kohärent.

In den meisten uns bekannten Lichterzeugern (z.B. Glühbirne) werden durch atomare Übergänge kurzzeitig Lichtblitze erzeugt.



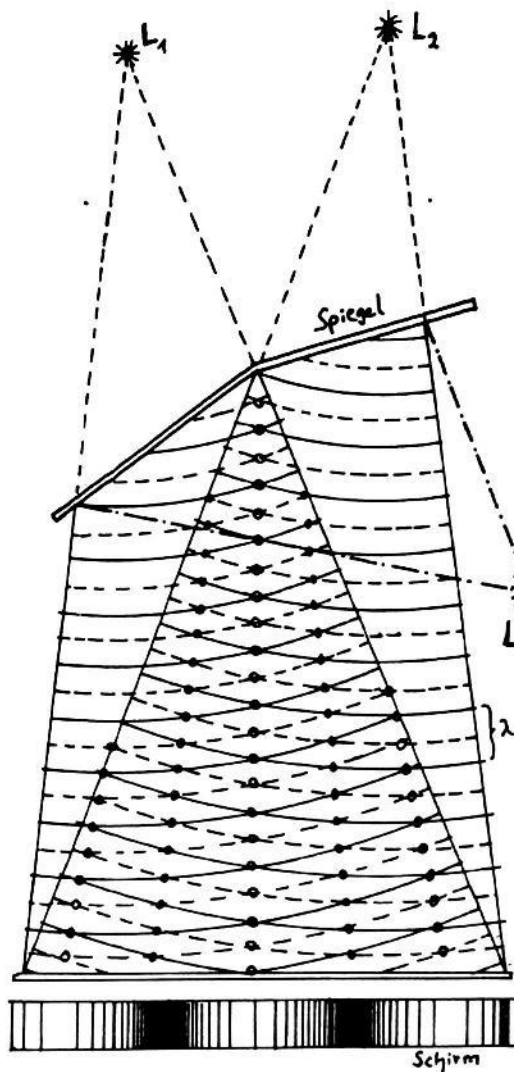
Diese sind zwar so zahlreich, daß wir sie niemals einzeln sehen könnten, aber alle diese "Wellenpakete" (siehe Skizze) haben verschiedene Phasenbeziehung zu den anderen, je nachdem, wann sie ausgesandt wurden. Nehmen wir nun zwei Glühlampen, so können wir nicht erwarten, daß bei

beiden jeweils gleiche Wellenpakete emittiert werden; dann nämlich wären beide Lichtstrahlen zueinander kohärent. Interferenzerscheinungen kann man nur mit kohärentem Licht beobachten. Was also tun ?

Wir nehmen eine Lichtquelle und zerlegen das Licht durch Reflexion oder Brechung. So wird zum Beispiel ein Wellenpaket "verdoppelt" (natürlich unter Reduzierung der Energie für jedes Paketteil) und kann dann, wenn sich beide Teile wieder treffen, mit sich selbst interferieren.

Nun ist es sehr kompliziert, die einzelnen Wellenpakete zu betrachten. Nehmen wir den idealisierten Fall an, die Wellenpakete seien unendlich lang. Das strapaziert nämlich das Vorstellungsvermögen nicht so stark. Außerdem ist so etwas, zumindest skizzenhaft noch irgendwie zu zeichnen.

Wir gehen also jetzt davon aus, daß die Wellenpakete unserer Lichtwelle unendlich lang seien (das heißt also : das Wellenpaket !). Dieses spalten wir durch Reflexion auf, lassen es nach Durchlaufen verschieden langer Wege (so erhalten wir verschiedene, ganz bestimmte Phasendifferenzen) mit sich selbst interferieren und sehen dann, was dabei herauskommt.



(α) Fresnel'scher Spiegelversuch

Die durchgezogenen Linien sollen Punkte mit Wellenbergen (die gestrichelten solche mit Wellentälern) darstellen.

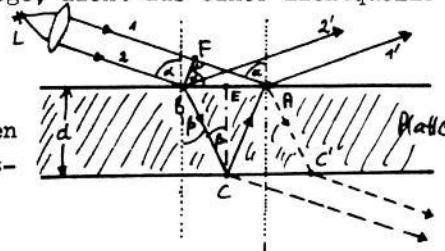
Von L (der Lichtquelle) trifft das Licht (sich rundum ausbreitende Kugelwellen) auf den abgelenkten Spiegel. Durch den Knick entstehen zwei scheinbare (sogenannte "virtuelle") Lichtquellen L_1 und L_2 , die zueinander kohärent sind - alles das, was aus L_1 ausgeht, geht genauso auch von L_2 aus.

Addieren wir nun in jedem Punkt, wo Licht aus beiden scheinbaren Lichtquellen zusammentrifft, deren Amplituden, so gibt es (wie damals im Kap. C III. 1.) Verstärkung und Auslöschung. Stellen wir irgendwo einen Schirm auf, so sehen wir darauf helle und dunkle Streifen.

- Auslöschung: Wellental + Wellenberg
- Verstärkung: Wellenberg + Berg od. -tal + -tal

β) Interferenz an planparallelen Platten

Es gibt nun verschiedene Wege, Licht aus einer Lichtquelle zu "verdoppeln". Hier ein Aufbau, bei dem durch Brechung und Zweifachreflexion an einer planparallelen Platte zwei kohärente Lichtbündel erzeugt werden:



Aus den zwei gleichen Wellenzügen 1 und 2 erhält man zwei kohärente Wellenzüge 1' und 2' mit einer Phasendifferenz (genauer gesagt "Gangunterschied") von

$$\Delta = n(\overline{BC} + \overline{CA}) - \overline{FA}$$

$$\overline{BC} = \frac{d}{\cos \beta} = \frac{d}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}}$$

da nach dem Brechungsgesetz $\sin \beta = \sin \alpha / n$ ist.

Erweitern mit $1/n^2$, ausklammern und kürzen führt zu

$$\overline{BC} = \frac{d \cdot n}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

Aus der Zeichnung folgt noch $\overline{CA} = \overline{BC}$ $\overline{FA} = \overline{BA} \cdot \sin \alpha$

$$\text{und } \overline{BA} = 2 \cdot \overline{BE} = 2 \overline{BC} \cdot \sin \beta$$

Setzen wir dies alles in die oben angegebene Gleichung für den Gangunterschied Δ ein, ergibt sich

$$\Delta = 2d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

Jetzt fehlt aber noch etwas:

Wir lassen unsere Welle an einem dichteren Medium reflektieren. Dann erfährt sie dort einen Phasensprung um π . Dieses haben wir schon bei der Behandlung der stehenden Welle erörtert (Bei der Reflexion am festen Ende macht eine Welle ein Phasensprung um π , bei der am losen Ende nicht!).

Also gilt hier für unser Problem exakt:

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}$$

Verstärkung tritt immer dann auf, wenn Δ ein geradzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ ist:

$$\Delta = z \lambda = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \lambda/2 \implies$$

$$\lambda = \frac{4}{2z-1} d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \quad : \text{ Verstärkung}$$

Ebenso erfolgt Auslöschung wenn Δ ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ ist. Dort gilt die Bedingung:

$$\lambda = \frac{2d}{z} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

$n = \text{ganze Zahl}$

Diese beiden Bedingungen bedeuten :

Wenn wir **monochromatisches Licht** (also Licht nur einer Farbe, d.h. genau einer bestimmten Wellenlänge) der Wellenlänge λ durch solch eine planparallele Platte schicken, erhalten wir Verstärkung (also helle Streifen), bzw. Auslöschung (dunkle Streifen) immer in die Richtungen α , die die Bedingung angibt, wenn z eine ganze Zahl bedeutet.

Das heißt also, daß diese Bedingungen bei gegebener Wellenlänge und Schichtdicke d immer nur für bestimmte Einfallswinkel α erfüllt sind.

Speziell für senkrechten Lichteinfall ($\alpha = 0$) gelten die Bedingungen

$$\lambda_V = \frac{4 \cdot d \cdot n}{2z - 1} \quad \text{Verstärkung}$$

$$\lambda_A = \frac{2 \cdot d \cdot n}{z} \quad \text{Auslöschung}$$

Für das erste Maximum (Minimum), d.h. für $z = 1$ gilt also

$$\lambda_V = 4 \cdot n \cdot d \quad \text{und} \quad \lambda_A = 2 \cdot d \cdot n$$

die Maxima wiederholen sich bei $d = \frac{\lambda}{4n}, \frac{3\lambda}{4n}, \frac{5\lambda}{4n}, \frac{7\lambda}{4n}$ usw.

die Minima bei $d = 0, \frac{\lambda}{2n}, \frac{2\lambda}{2n}, \frac{3\lambda}{2n}, \frac{4\lambda}{2n}$ usw.

Die Maxima und Minima numeriert man (je nach z) : z.B. $z=0$ ergibt das **Minimum nullter Ordnung** usw.

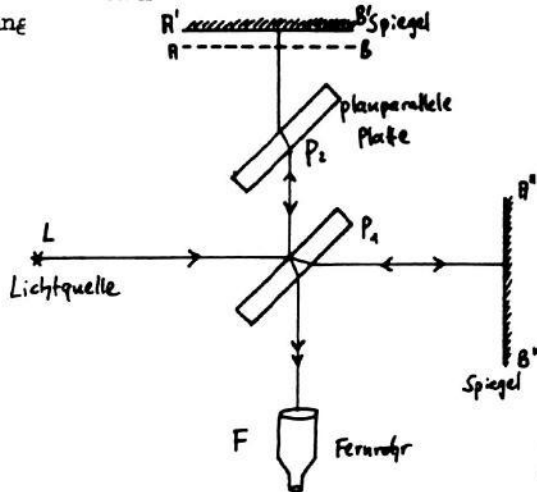
Wie schon angedeutet, gilt das streng genommen nur für monochromatisches Licht. Gibt man z.B. weißes Licht vor, das ja ein Gemisch von allen Farben (also verschiedenster Wellenlängen) ist, ergeben sich Minima und Maxima für alle Farben gesondert. Es sind dann keine hellen und dunklen Streifen zu erkennen, sondern man erkennt bei dünnen Schichten in der Drauf- und der Durchsicht eine Menge verschiedenfarbiger Ringe.

Bestes Beispiel davon sind die Farberscheinungen einer dünnen Benzinschicht (Öllache !).

Wir sahen, daß die Bedingung für Minimum und Maximum von der Schichtdicke abhängt. Nimmt man statt einer planparallelen eine keilförmige Platte, erkennt man mehrere Maxima und Minima nebeneinander. Beispiel : eine winzige Luftblase zwischen Glas und Film beim Dia führt oft zu bunten Ringen an den Rändern der Blase (bekannt als Newton'sche Ringe).

1) Michelson - Interferometer

Man kann das Phänomen der Interferenz vielfach ausnutzen.



Hier z.B. ein Aufbau, der eine ganz genaue Längenmessung (im Nanometerbereich) zuläßt. Das von L kommende Licht wird auf zwei verschiedenen Wege zum Fernrohr F geführt, wo beide Teilbündel miteinander interferieren :

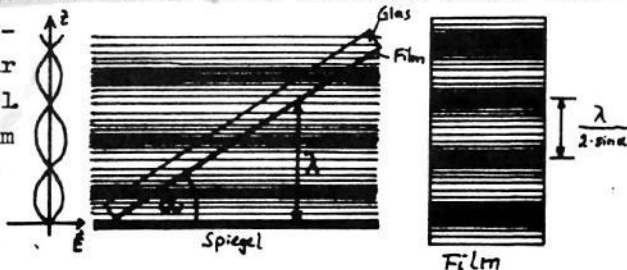
- 1) L - P₁ - P₂ - A'B' - P₂ - P₁ - F
- 2) L - P₁ - A"B" - P₁ - F

Zwischen P₁ und der Brennebene des Fernrohres überlagern sich beide Teilstrahlen (eben die von A'B', bzw. A"B" kommen).

Die Gangunterschiede zwischen beiden sind so, als ob das von A"B" kommende Licht von der gestrichelten Spiegelebene AB herkäme. Damit für beide Bündel die Weglänge im Glas die gleiche ist, wurde die Platte P₂ eingefügt. Den Spiegel A'B' kann man mit einer Mikrometerschraube verschieben und so den Gangunterschied ändern. Durch Abzählen der im Fernrohr sichtbaren Newton-Ringe kann man die Verschiebung von A'B' in halben Wellenlängen messen.

8) stehende Lichtwellen

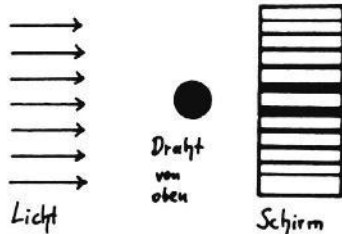
Man erzeugt **stehende Lichtwellen** durch Reflexion ebener monochromatischer Lichtwellen an einem sehr planen Metallspiegel. Ein sehr dünner Film (Dicke $\lambda/30$) liegt im Winkel α schräg dazu. Nach dem Ent-



wickeln findet man an den Stellen, wo die Bäuche des elektrischen Feldes waren eine Schwärzung des Films. Damit kann man Wellenlängen direkt messen.

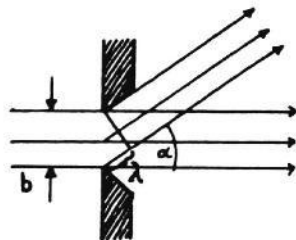
d) Beugung

Aufgrund der Wellennatur des Lichtes wirft ein Gegenstand keine scharfen Schatten. An den Kanten des Gegenstandes gehen Elementarwellen aus, die miteinander interferieren. Daher gibt es meistens streifenförmige Schattenumrisse. Hier ein kleines Beispiel :



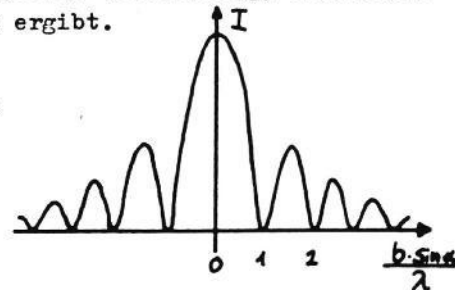
Ein Draht wird von parallelem Licht beleuchtet. Der Schatten auf dem Schirm zeigt abwechselnd dunkle und helle Streifen. Eine genauere Erklärung soll unten für einige wichtige Hindernisse (Spalt, Doppelspalt, Gitter) erfolgen.

α) Beugung am Spalt

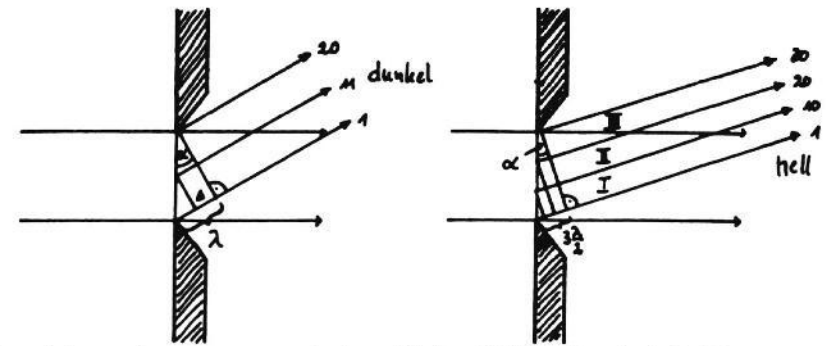


Rechts sieht man die Intensitätsverteilung auf dem Schirm in Abhängigkeit vom Ablenkwinkel.

-203-



An den Kanten eines engen Spaltes bilden sich Elementarwellen aus. Je nach Richtung besteht zwischen diesen ein bestimmter Gangunterschied der bei der Überlagerung Verstärkung, bzw. Auslöschung ergibt.



Betrachten wir uns zuerst das linke Bild. Dort ist die Auslöschung dargestellt : wir zerteilen unser Lichtbündel in 20 Einzelbündel. Zwischen Bündel 1 und 11 besteht (bei diesem bestimmten Winkel α) der Gangunterschied $\Delta = \lambda/2$. Das bedeutet : Bündel 1 und 11 löschen einander aus. Ebenso Bündel 2 und 12, 3 und 13, ... , 10 und 20. Somit löschen sich alle Teilbündel gegenseitig aus, in Richtung α herrscht also Dunkelheit.

Anders ist dies, wenn zwischen den Randbündeln kein Gangunterschied von λ besteht. Im rechten Bild haben wir den Lichtstrahl willkürlich in 30 Einzelbündel unterteilt. Hier besteht zwischen Bündel 1 und 10 (2 und 11, 3 und 12 usw.) ein Gangunterschied von $\lambda/2$ somit Auslöschung. Die Streifen I und II löschen sich gegenseitig aus. Streifen III bleibt übrig. In diese Richtung wird also ein heller Streifen abgebildet.

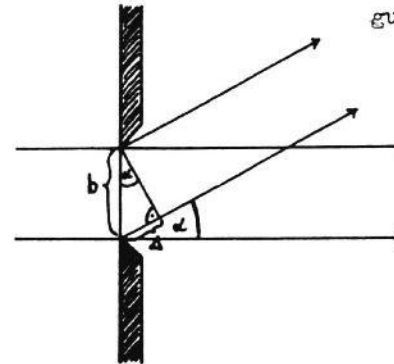
Quantitativ ergeben sich Minima bei

$$\Delta = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \text{ usw. also bei } \Delta = k \cdot \lambda \quad (k \text{ ganz})$$

$$\text{Maxima } \Delta = \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \frac{7\lambda}{2}, \text{ usw. bei } \Delta = (k + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$$

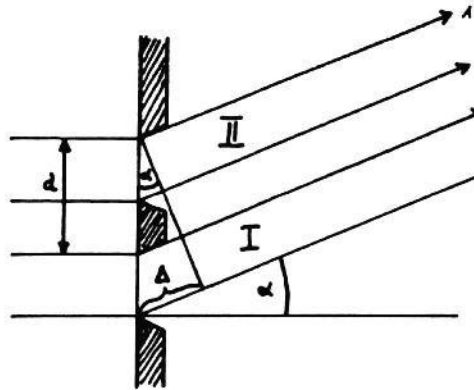
$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\Delta}{b} \text{ somit lauten die Bedingungen}$$

Minimum	$\sin \alpha = k \cdot \frac{\lambda}{b}$	$k = 1, 2, 3, \dots$
Maximum	$\sin \alpha = (k + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{b}$	$k = 1, 2, 3, \dots$



β) Beugung am Doppelspalt

Die Verhältnisse sind ganz ähnlich als beim Einfachspalt. Zur Interferenz gelangen jeweils entsprechende Strahlen beider Spalte.

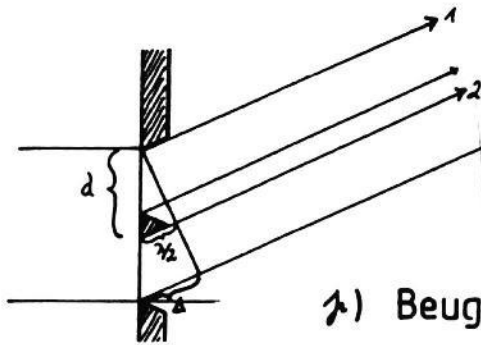


Hier interferieren die beiden Bündel I und II miteinander. Besteht zwischen Strahl 1 und 2 ein Gangunterschied von $\lambda/2$ erfolgt Auslöschung. Also $\sin \alpha = \frac{\lambda}{2d}, \frac{3\lambda}{2d}, \frac{5\lambda}{2d}, \text{ usw}$

Maxima entstehen beim Gangunterschied λ , also bei $\sin \alpha = \frac{\lambda}{d} k$

Die Bedingungen lauten also für den Doppelspalt :

$\sin \alpha_{\text{Min.}} = (k + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{d}$	$k=0,1,2$
$\sin \alpha_{\text{Max.}} = k \cdot \frac{\lambda}{d}$	$k=0,1,2$



γ) Beugung am Gitter

Hier gilt genau das gleiche wie für den Doppelspalt. Allerdings sind (durch die hohe Zahl der parallel nebeneinanderliegenden Spalte) die Maxima wesentlich heller und alle Maxima haben die gleiche Intensität.

Als Bedingung gilt :

$\sin \alpha_{\text{Max.}} = k \cdot \frac{\lambda}{g}$	$k = 0,1,2 \dots$
---	-------------------

g ist die sogenannte Gitterkonstante : $g =$ Länge zwischen der Mitte eines Spaltes zur Mitte des Nachbarspaltes.

δ) Auflösungsvermögen opt. Instrumente

Die Beugung kann auch negativ in Erscheinung treten. Zum Beispiel in optischen Instrumenten.

Jedes optische Instrument hat eine maximal mögliche Auflösung (das bedeutet : zwei benachbarte Bildpunkte in einem optischen Instrument, die man gerade noch als getrennt wahrnehmen kann sind ein Maß für die Auflösung - diese ist gerade der Abstand zwischen beiden Punkten). Der Grund für die Begrenzung der Auflösung liegt darin, daß bei starken Vergrößerungen die Beugung zu sehr in Erscheinung tritt.

Mit den Abkürzungen :

δ = kleinstmöglicher Sehwinkel

r = Radius der wirksamen Öffnung (Blende)

λ = Wellenlänge des benutzten Lichtes

d = kleinster Abstand zweier Punkte, die gerade noch als getrennt wahrgenommen werden können

n = Brechzahl des Mediums zwischen Objekt und Objektiv

α = halber Öffnungswinkel des Objektives (sog. Aperturwinkel)

A = numerische Apertur, $A = n \sin \alpha$

gilt : Auflösung für das Auge und das Fernrohr

$$\delta = 0.61 \frac{\lambda}{r} ,$$

für das Mikroskop $d = 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \sin \alpha} = 0.61 \frac{\lambda}{A}$

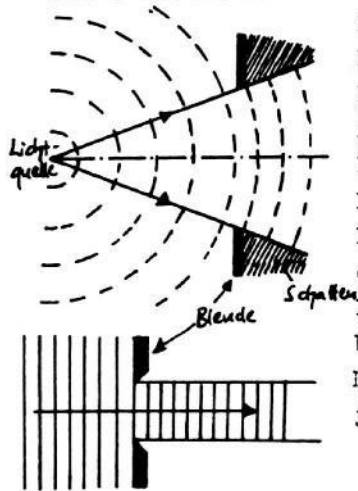
Das Auflösungsvermögen eines Fernrohres beispielsweise wird durch Wahl größerer Objektivdurchmesser verbessert.

Die Auflösungsgrenze des menschlichen Auges liegt bei etwa 1'. Das bedeutet : In einer Entfernung von 25 cm können wir zwei Punkte, die ein Zehntel mm voneinander getrennt sind noch deutlich trennen. Auf eine Entfernung von 1 km können wir noch zwei Punkte trennen, die 30 cm voneinander entfernt sind. Anders ausgedrückt : in einem km Abstand können wir noch Objekte von der Größe 30 cm erkennen.

2. Geometrische Optik

a) Ausbreitung von Licht

Wie wir wissen, ist die Ausbreitung von Licht eine Wellenerscheinung. Von einer punktförmigen Lichtquelle geht das Licht nach allen Seiten gleichmäßig aus. Die Wellenfronten sind kugelförmig. Weit von der Lichtquelle entfernt nehmen die Wellenfronten fast ebene Flächen ein. Dort kann man einzelne Lichtstrahlen durch Blenden ausblenden.



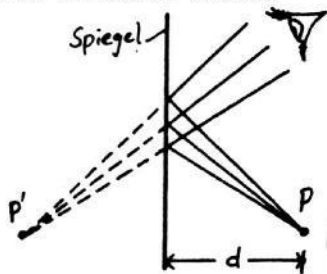
Der halbe Öffnungswinkel durch eine Blende nennt man numerische Apertur. Durch viele Blenden kann man in weitem Abstand von der Lichtquelle paralleles Licht (mithin ein "Lichtstrahl") erzeugen. Das obere Bild zeigt ein divergentes Lichtbündel, die numerische Apertur ist eingezeichnet.

Im unteren Bild erkennt man ein ausgeblendetes paralleles Lichtbündel. Mit solchen Lichtstrahlen wollen wir uns jetzt beschäftigen.

b) Reflexion

Wie wir im Kapitel über Wellenoptik gesehen haben, gilt für die Reflexion das Reflexionsgesetz (Einfallswinkel = Reflexionswinkel).

Dabei sind einfallender, reflektierter Strahl und das sogenannte Einfallslot immer in einer Ebene.

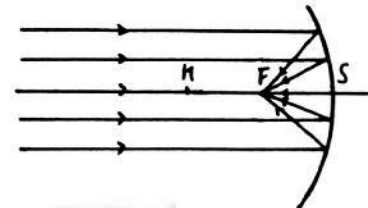


Ein von einem Punkt P (im Abstand d vom Spiegel entfernt) divergent ausgehendes Lichtbündel wird so reflektiert, als käme es von einem Punkt P' hinter dem Spiegel. Dieses Bild P' ist ein sogenanntes virtuelles Bild. Es kann mit einem Schirm nicht aufgefangen werden.

Strahlengänge bei konkaven Spiegeln

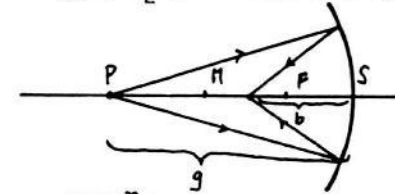
1. Gegenstandsweite $g = \infty$

z.B. das Licht von der Sonne. Da die Sonne sehr weit entfernt ist, kann man ihre Strahlen als parallel annehmen. \rightarrow reelles Bild im Brennpunkt.



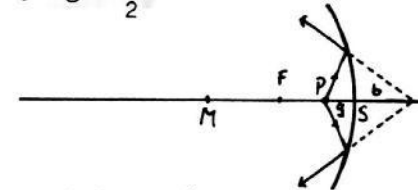
2. $g > \frac{r}{2}$, wobei r der Radius des Kugelausschnittes ist, den der Spiegel darstellt.

Man erhält einen reellen Bildpunkt in der Bildweite b, wobei b zwischen $r/2$ und g liegt.



3. $g < \frac{r}{2}$

Hier gibt es hinter dem Konkavspiegel ein virtuelles Bild. Die Bildweite b wird dabei negativ gerechnet.



Wendet man das Reflexionsgesetz in jedem Punkt des Konkavspiegels an, kann man aus dem Schnittpunkt der reflektierten Strahlen den Bildpunkt ermitteln. Vorausgesetzt, der Gegenstandspunkt P liegt nicht weit von der optischen Achse MS entfernt, gilt das Abbildungsgesetz:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} := \frac{1}{f}$$

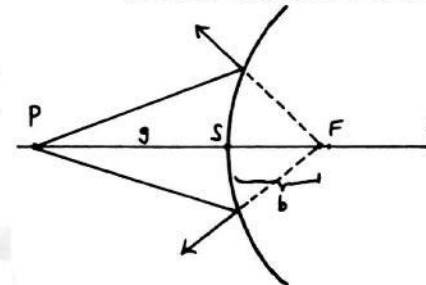
g = Gegenstandsweite

b = Bildweite

$f = \frac{r}{2}$ = Brennweite

g positiv (falls konkav), g negativ einsetzen (falls konvex)

Strahlengänge bei konvexen Spiegeln






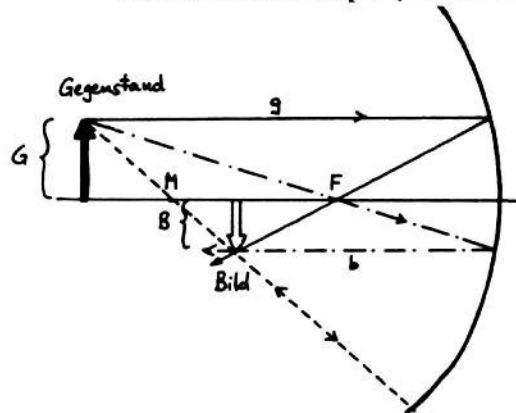
Konvexe Spiegel liefern nur virtuelle Bilder. Auch hier gilt die Abbildungsgleichung - nur ist die Gegenstandsweite negativ einzusetzen.

Strahlengang bei achsenfernen Gegenstandspunkten

Bisher haben wir immer nur Gegenstandspunkte betrachtet, die auf der optischen Achse lagen. Nun wollen wir uns mit achsenfernen Gegenstandspunkten beschäftigen. Diese stellen wir durch die Spitze von lotrecht auf der optischen Achse stehenden Pfeilen dar. Damit sollen auch zugleich alle möglichen Gegenstände - die abgebildet werden sollen - dargestellt werden.

Zur Bestimmung des Bildpunktes eines solchen achsenfernen Gegenstandspunktes wählen wir Strahlen aus, deren geometrische Verlauf leicht zu überschauen ist :

1. Ein achsenparalleler Strahl wird zum Brennpunkt hin reflektiert (bei konkaven Spiegeln) oder so, als käme er von einem virtuellen Brennpunkt (bei konvexen Spiegeln) - (in der Zeichnung )
2. Ein Strahl durch den Brennpunkt wird parallel zur optischen Achse zurückreflektiert ()
3. Ein Strahl durch den Mittelpunkt M wird in sich selbst zurückreflektiert ()



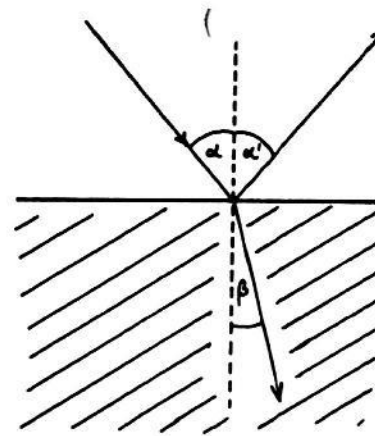
Gegenstandsgröße G und Bildgröße B sind je nach Gegenstandsweite g verschieden.

Man nennt $V = \frac{B}{G}$ die Vergrößerung der Abbildung.

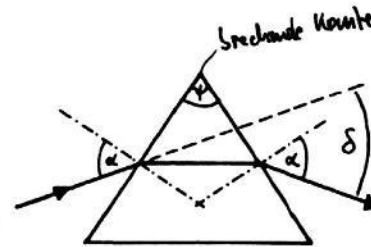
Aus der Abbildung ergibt sich auch $V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$.

c) Brechung

Trifft ein Lichtstrahl aus einem durchsichtigen Medium auf die Trennfläche zu einem anderen ebenfalls durchsichtigen Medium, so wird ein Teil des Lichtstrahls reflektiert, ein anderer Teil dringt in das zweite Medium ein und erfährt dort eine Richtungsänderung (Brechung).



Brechung beim Prisma



Es gilt das Snellius'sche Brechungsgesetz :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

α, β sind Einfallswinkel und Brechungswinkel
 n_1, n_2 Brechungsindizes der beiden Medien gegenüber Vakuum.

Prismen sind Körper mit zwei ebenen, sich schneidenden Begrenzungsflächen. Die Schnittgerade heißt brechende Kante, der von den Flächen eingeschlossene Winkel heißt brechender Winkel ψ .

Eine Ebene senkrecht zur brechenden Kante heißt Hauptschnitt.

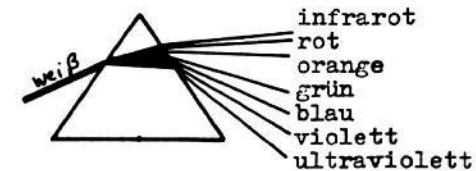
Trifft ein im Hauptschnitt verlaufender Lichtstrahl auf ein Prisma, so wird er als Folge der beim Eintritt und beim Austritt erfolgenden Brechung um einen Winkel δ

abgelenkt. Für den symmetrischen Strahlengang (wie oben in der Figur gezeigt) gilt

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2} (\psi + \delta)}{\sin \frac{1}{2} \psi}$$

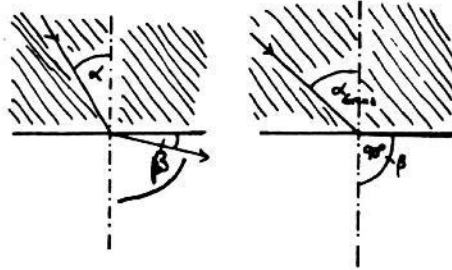
n ist der Brechungsindex des Prismenmaterials. Für die Umgebung wurde der Brechungsindex $n = 1$ angesetzt, was für Luft in etwa stimmt.

Lässt man weißes Licht durch ein Prisma laufen, so werden die verschiedenen Farbanteile verschieden stark gebrochen. Somit ergibt sich eine Aufspaltung des weißen Lichts in seine Spektralfarben (Dispersion). Der Brechungsindex ist wellenlängenabhängig. Diese Abhängigkeit $\frac{dn}{d\lambda}$, genauer $\frac{dn}{d\lambda}$ nennt man "Dispersion"



d) Totalreflexion

Trifft ein Strahl von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium wird er ja vom Einfallslot weg gebrochen.



Daher kann es passieren, daß bei einem bestimmten "Grenz-winkel", also bei einem bestimmten Einfallswinkel der Brechungswinkel 90° wird, der Strahl also garnicht mehr gebrochen wird, nicht mehr im optisch dünneren Medium verläuft. Er wird an der Grenzfläche "totalreflektiert".

Der Grenzwinkel ist leicht zu errechnen :

Nach dem Brechungsgesetz ergibt sich :

$$n_1 \cdot \sin \alpha_{\text{grenz}} = n_2 \cdot \sin 90^\circ \quad \text{oder} \quad \sin \alpha_{\text{grenz}} = \frac{n_2}{n_1} \cdot 1.$$

Läßt man einen Lichtstrahl von Glas ($n = 1.5$) an der Grenzfläche zu Luft ($n = 1$) totalreflektieren, ergibt sich ein Grenzwinkel von $\alpha = 41.8^\circ$.

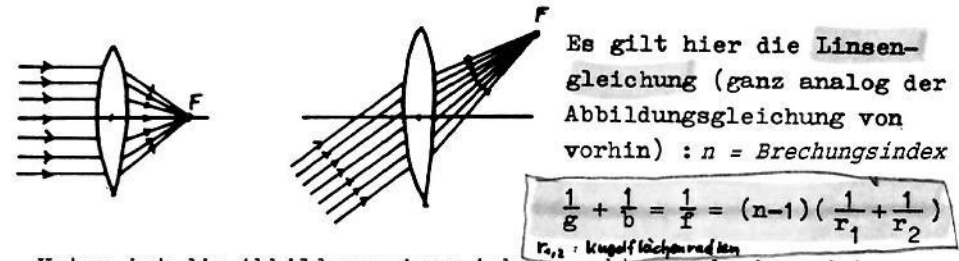
Man erkennt das Phänomen der Totalreflexion, wenn man von unten gegen eine Wasserfläche blickt (beim Tauchen, oder - für die wasserscheuen unter uns - wenn man den Wasserspiegel eines Aquariums von unten betrachtet. Man sieht dann nur das reflektierte Bild des inneren Beckens. Was außen ist, kann man so nicht erkennen).

e) Abbildung durch Linsen

Ein Körper aus optisch durchsichtigem Material, der von zwei Kugelflächen begrenzt wird, nennt man eine optische Linse. Wenn die Dicke einer solchen Linse klein gegen die Radien der Kugelflächen ist, spricht man von einer dünnen Linse.

Eine dünne bikonvexe Linse sammelt paralleles Licht in einem Brennpunkt. Deshalb nennt man sie auch Sammellinse. Die Brennweiten auf beiden Linsenseiten sind gleich.

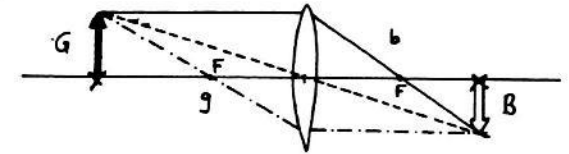
α) Jünne Linsen



$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

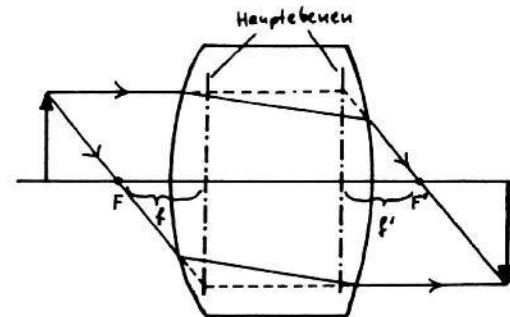
$r_{1,2}$: Kugelflächenradien

Unten ist die Abbildung eines Achsenpunktes und eines Achsenentfernten Gegenstandspunktes dargestellt. Auch hier wurde von der Konstruktion mit den drei charakteristischen Strahlen Gebrauch gemacht.



β) Dicke Linsen

Wenn die Bedingung: Linsendicke klein gegen Kugelflächenradien nicht mehr gilt, sprechen wir von dicken Linsen. Man kann dabei die einfallenden Strahlen nicht mehr bis zur Linsenmitte hin als ungebrochen approximieren. Die Brechung an den beiden Randflächen muß berücksichtigt werden. Man führt Hauptebenen ein

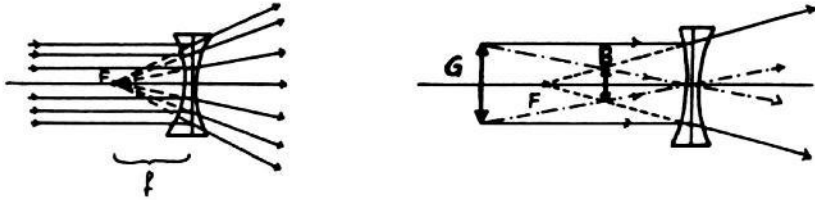


Die achsenparallel von der einen oder der anderen Seite her einfallenden Strahlen legen zunächst (unter Berücksichtigung der wirklichen Brechungsverhältnisse) ihre jeweiligen Brennpunkte fest. Schließlich verlängert man die Strahlen bis zu ihrem Schnittpunkt. Die Schnittpunkte gehen die Lage der Hauptebenen an. Die Abstände der Brennpunkte von den jeweiligen Hauptebenen sind die Brennweiten. Die Linsengleichung gilt auch hier !

Die Abstände der Brennpunkte von den jeweiligen Hauptebenen sind die Brennweiten. Die Linsengleichung gilt auch hier !

7) Zerstreulinse

Eine Zerstreulinse wird oft auch als **bikonkave Linse** bezeichnet. Die Abbildung mit Hilfe bikonkaver Linsen ergibt



nur virtuelle Bilder, die zwischen Brennpunkt und Linse liegen.

8) Kombination mehrerer Linsen

Die gesamte Brechkraft ($= \frac{1}{f}$) eines Systems von Linsen errechnet sich aus den Abständen der Linsen voneinander und den Brechkraften der einzelnen Linsen. Die Brechkraften von konkaven Linsen werden negativ gerechnet:

2 konvexe Linsen dicht beieinander $\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

1 konvexe, 1 konkave Linse " $\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}$

Sind zwei konvexe Linsen im Abstand d voneinander aufgestellt,

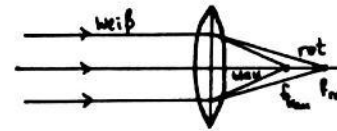
so gilt $\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$

9) Linsenfehler

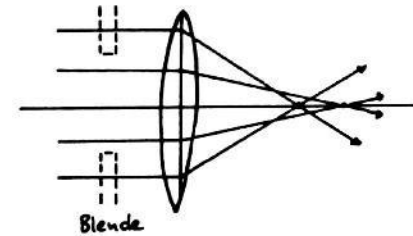
Linsenfehler können durch Kombinationen von mehreren Linsen teilweise aufgehoben werden. Die Fehler im einzelnen:

chromatische Fehler: da verschiedene Farben verschieden

stark gebrochen werden, besteht der Brennpunkt eines weißen Strahles aus mehreren Brennpunkten der einzelnen Farben, insgesamt also aus einer kontinuierlich farbigen Brenn"streife:



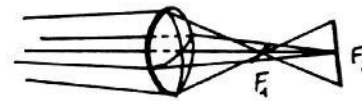
sphärische Aberration: die von einer monochromatischen Lichtquelle ausgehenden achsenparallel einfallenden Strahlen liefern keinen Brennpunkt, sondern ein Kreisscheibchen. Randstrahlen werden nämlich mit geringerer Brennweite fokussiert als achsnah.



Der Grund liegt darin, daß Linsen im Normalfall aus Kugelflächen konstruiert sein sollten, obwohl sie praktisch eher eine paraboloidale Form haben. Verbesserung dieses Linsenfehlers wird bei großen Linsen durch Einfügen von Blenden erreicht, was allerdings auf Kosten der Lichtintensität geschieht.

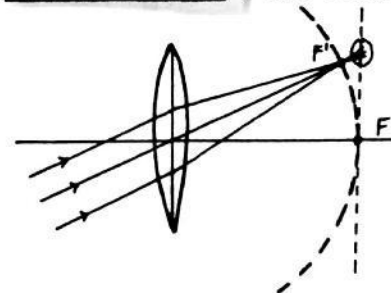
Der Grund liegt darin, daß Linsen im Normalfall aus Kugelflächen konstruiert sein sollten, obwohl sie praktisch eher eine paraboloidale Form haben. Verbesserung dieses Linsenfehlers wird bei großen Linsen durch Einfügen von Blenden erreicht, was allerdings auf Kosten der Lichtintensität geschieht.

Astigmatismus: Lichtstrahlen, die von einem achsfernen Gegenstandspunkt ausgehen, liefern nicht einen Bildpunkt, sondern zwei senkrecht zueinanderstehende Bildlinien in etwas verschiedenen Abständen. Dieser Fehler kommt hauptsächlich bei Linsen vor, die etwas zylindrisch geschliffen wurden.



Dieser Fehler kommt hauptsächlich bei Linsen vor, die etwas zylindrisch geschliffen wurden.

Bildfeldwölbung: Das Bild eines ebenen Gegenstandes ist nicht eben, sondern - wie die Linse - kugelförmig. Meist verwendet man aber ebene Schirme, Leinwände, Filme. Nur bei großen Kinoprojektionen (Breitwand) werden auch gekrümmte Leinwände verwendet, was allerdings noch einen anderen Grund hat (Negativbild ist in



waagrechter Richtung gestaucht. Dies wird durch die in eben dieser Richtung gewölbte Leinwand wieder ausgeglichen.)

f) Optische Geräte

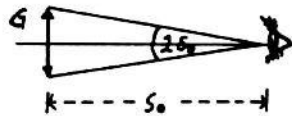
Optische Geräte dienen meist dazu, den Sehinkel unter dem das Auge einen Gegenstand sieht, zu vergrößern.

Dabei ist die Vergrößerung das Verhältnis der Sehinkel

mit und ohne Hilfsgerät $V = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$.

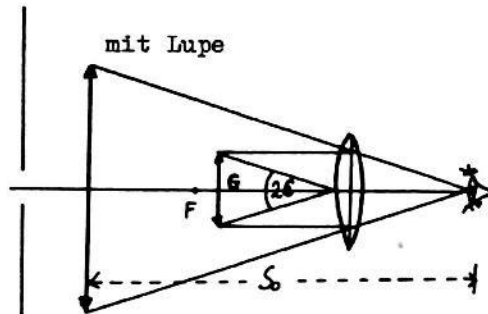
1. Lupe = flache bikonvexe Linse von einigen cm Brennweite

ohne Lupe :



das Auge sieht den Gegenstand in der Entfernung der deutlichen Sehweite (25 cm) unter dem Winkel $2\epsilon_0$

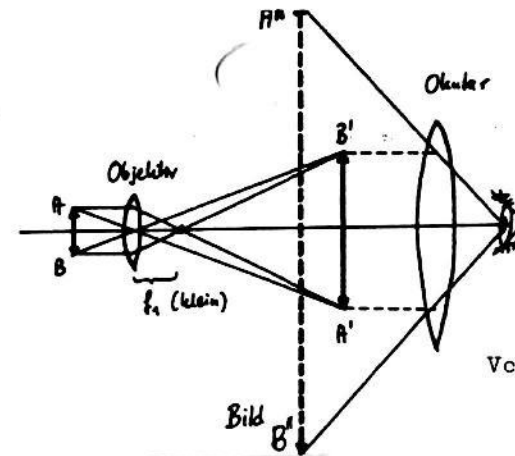
mit Lupe



Das Auge hinter der Lupe sieht das virtuelle Bild in der Entfernung s_0 unter dem Winkel 2ϵ . V ist 5 bis 10 fach

2. Mikroskop : besteht aus einem Objektiv wählbarer Vergrößerung und einem Okular. Der Gegenstand wird etwas außerhalb der einfachen Brennweite des Objektivs aufgestellt, um eine hohe Vergrößerung zu erzielen.

Das Objektiv entwirft ein reelles Zwischenbild hoher Vergrößerung ($A'B'$) innerhalb der Brennweite des Okulars. Dieses wirkt nun als Lupe und vergrößert nach.



Die Vergrößerung berechnet sich aus dem Produkt der Vergrößerungen von Objektiv und Okular :

$$V \approx \underbrace{\frac{1}{f_1}} \cdot \underbrace{\frac{s_0}{f_2}} \quad l \approx f_1 + f_2$$

Vergrößerung von Objektiv, Okular
(l = Tubuslänge)

3. Fernrohr : (= astronomisches Fernrohr)

Besteht wie das Mikroskop aus zwei Sammellinsen (Objektiv und Okular). Nur besitzt hier die Objektivlinse eine große (die Okularlinse eine kleine) Brennweite. Sie entwirft vom entfernten

Gegenstand in der Brennebene ein reelles Bild, welches auch hier mit dem Okular als Lupe betrachtet wird.

g) Beleuchtungsarten

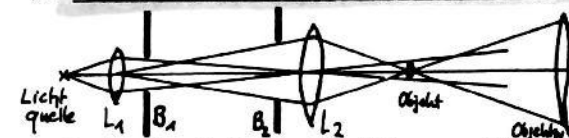
1. Hellfeldbeleuchtung

Ein Kondensator (Anordnung, die das Licht einer Lichtquelle parallel macht) bildet die Lichtquelle auf das Objekt ab. Dieses erscheint (wegen der gegenüber der Umgebung verschiedenen Brechzahlen und Absorptionseigenschaften) dunkel im hellen Feld.

2. Dunkelfeldbeleuchtung

Das Objekt wird nur von Randstrahlen eines Lichtbündels bestrahlt : das Objekt erscheint hell im dunklen Bild (wird beim Mikroskopieren häufig verwendet).

3. Köhler'sches Beleuchtungsverfahren



Durch Blenden kann man das Sichtfeld scharf begrenzen. Blende B_1 begrenzt das Sichtfeld. Dadurch wird die Abbildung schärfer. Durch die Blende B_2 lässt sich die Helligkeit regeln.

G. WÄRME

In diesem Kapitel werden wir uns mit den Wärmephänomenen befassen. Wir werden sehen, wie makroskopische Größen (Temperatur, Wärmemenge, Druck usw.) auf mikroskopische zurückgeführt werden – und wir werden so diese makroskopischen Phänomene, die mit der Wärme zu tun haben, sehr viel besser verstehen.

Ein Körper, sei er fest, flüssig oder gasförmig, besteht aus einer Vielzahl von Teilchen. Diese betrachten wir in der Wärmelehre oft als kleine Kugeln, als Massenpunkte, die den Gesetzen der klassischen Mechanik gehorchen. Wir werden sehen, daß die Eigenschaften der Wärme zurückgeführt werden können auf mechanisches Verhalten von einer großen Menge von Teilchen. Vielfach müssen wir Elemente aus der Statistik verwenden, da es sich bei diesen Teilchen um unvorstellbar große Zahlen handelt.

I. TEMPERATUR, WÄRME

1. Temperatur

Den Begriff Temperatur kennen wir alle aus dem Alltag. Es sagt uns etwas, wenn wir hören: die Luft hat eine Temperatur von 27°C . Was bedeutet das aber? Was ist das – Temperatur? Bevor wir aber ins Detail gehen, zunächst grundsätzliches über den Temperaturbegriff. Wie wir wissen gibt es verschiedene Temperaturskalen. Unsere Celsius-Skala wird durch die Fixpunkte 0°C (dort gefriert das Wasser) und 100°C (dort siedet es) festgelegt. Man hat früher einfach den Bereich, zwischen der Temperatur des siedenden und der des gefrierenden Wassers in 100 Teilschritte zerlegt – fertig war die Celsius-Temperatur-Skala. Diese Skala wird nach unten durch negative Zahlenwerte fortgesetzt. Man hat nun außerdem eine neue Temperaturskala eingeführt, die thermodynamische Skala. Dort hat das gefrierende Wasser die Temperatur $273,15$ Kelvin (so die Ein-

heit) und das siedende eine Temperatur von $373,15$ Kelvin (K). Man sieht: die Unterteilung ist gleich geblieben. Die Größe 1 Grad Celsius ist mit der 1 Grad Kelvin identisch. Nur ist die Kelvin-Skala gegenüber der Celsius-Skala um $273,15$ Grad versetzt:

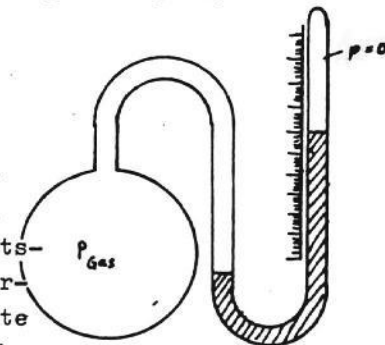
$$t = T - 273,15 \text{ K}$$

(t : Temperatur in Celsius, T : absolute Temperatur in Kelvin). Wie wir noch sehen werden, gibt es keine negativen Kelvin-Temperaturen. Der absolute Nullpunkt (= Null Kelvin) ist eine Temperatur, der man zwar beliebig nahe kommen, die man aber nie erreichen kann. Dies sagt der dritte Hauptsatz aus – mit dem wir uns noch befassen werden.

Um Temperaturen zu messen bedient man sich den Thermometern. hier sind einige dargestellt. Sie beruhen in der Hauptsache auf dem Effekt, daß sich Körper, wenn sie heißer werden, ausdehnen, und wenn sie kälter werden verkürzen sie sich. Die Längen- bzw. Volumenausdehnung ist dabei wohldefiniert und kann daher zur Temperaturmessung herangezogen werden.

1. Gasthermometer

In einer geschwungenen Röhre befindet sich eine Flüssigkeitssäule, über der ein Vakuum steht. Ändert sich der Gasdruck in dem kugelförmigen Hohlraum, wird die Flüssigkeitssäule nach oben oder unten verschoben. Dort ist eine geeichte Skala angebracht. Wie wir noch sehen werden, ist der Gasdruck direkt der Temperatur proportional. Daher können wir über den Druck die Temperatur messen.



2. Flüssigkeitsthermometer

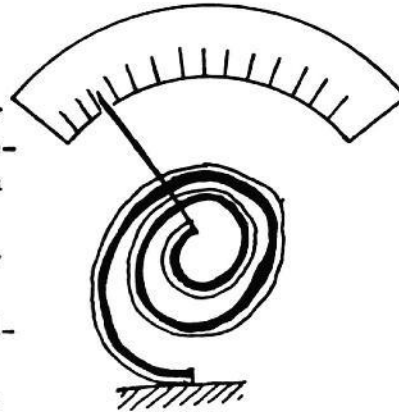
Die Ausdehnung einer Flüssigkeit, vornehmlich Quecksilber in einer Kapillare, über der ein Vakuum steht, gibt direkt über die Temperatur der Flüssigkeit Auskunft. Man eicht sie an den beiden Fixpunkten 0° und 100°C und teilt die Skala in 100 Teilschritte ein.



3. Bi-Metall-Thermometer

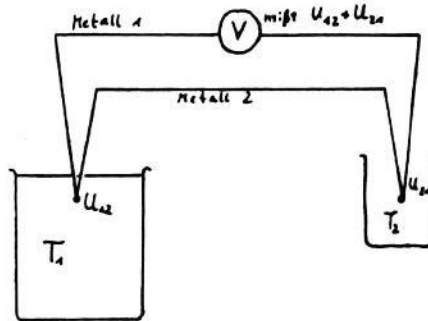
Hier wird die Ausdehnung fester Stoffe zur Temperaturmessung herangezogen. Zwei Metallstreifen (Stahl und Messing) werden zusammengebracht. Die Zeigerdrehung resultiert aus der unterschiedlichen Ausdehnung der beiden verschiedenen Materialien.

Solche Thermometer werden auch als Thermo-Schalter verwendet. Durch die Ausdehnung wird ein elektrischer Kontakt geschlossen oder geöffnet. Verwendung finden solche Thermostate in Heizungen, Waschmaschinen, Bügeleisen usw.



4. Thermo-Element

Wenn sich zwei verschiedene Metalle berühren, entsteht eine Kontaktspannung. Schaltet man einen Stromkreis wie in der



Skizze, so entstehen an der linken Kontaktstelle die Spannung U_{12} ($\hat{=}$ Temperatur der linken Kontaktstelle, da die Kontaktspannung proportional zur Temperatur ist), an der rechten U_{21} ($\hat{=}$ Temperatur des rechten Kontaktes). Hält man eine der Lötstellen in einem Gefäß mit schmelzendem Eis fest ($= 0^\circ\text{C}$), so kann man mit der

anderen Lötstelle Temperaturen messen, indem man die Spannung $U_{12} + U_{21}$ misst, die proportional zur Temperatur ist.

5. Widerstandsthermometer

Wie wir wissen, ist der elektrische Widerstand temperaturabhängig. Damit kann man auch Temperaturen messen, indem man den Widerstand misst, nachdem man über zwei Fixpunkte die Widerstands-Temperatur-Skala geeicht hat.

2. Warmemenge

a) Wärmeenergie

Wir besprechen die Temperatur. Temperatur ist eine Größe, die wir messen können. Wir ordnen jeder Materie eine sogenannte Warmemenge zu. Man nennt diese Größe auch Wärmeenergie, denn die Warmemenge oder einfach Wärme ist nichts anderes als eine Energieform. Um die Warmemenge, die in einem Stoff steckt, zu verändern, muß man die Temperatur verändern. Bringen wir einen Stoff mit der Wärmeenergie Q_1 und der Temperatur T_1 in Berührung mit einem zweiten Stoff, der die größere Temperatur T_2 hat, so geht Wärmeenergie vom wärmeren zum kälteren Stoff über, solange, bis sie das thermische Gleichgewicht (eine Mischtemperatur, die dann beide Körper haben) eingestellt hat. Es floß dann Warmemenge, Wärmeenergie vom heißeren zum kälteren Stoff!

Ändert sich die Warmemenge in einem Stoff, so sagt man, daß die Wärmeenergie positiv ist, wenn ein Körper Wärme aufnimmt, und negativ ist sie, wenn ein Körper Wärme abgibt.

$Q > 0$: Körper (System) nimmt Wärme auf
$Q < 0$: Körper (System) gibt Wärme ab.

Die Einheit der Wärmeenergie ist das Joule (J), die Einheit der Energie.

b) Wärmekapazität

Erwärmen wir einen Stoff um eine Temperatur ΔT , so müssen wir ihm eine Warmemenge Q geben. Es gilt, daß beide Größen proportional sind. Erwärmung eines Stoffes um die doppelte Temperatur $2 \cdot \Delta T$, erfordert demnach eine Wärmezufuhr von $2 \cdot Q$. Klar! - Wir können also sagen:

$Q = C (T_2 - T_1)$	wobei T_1 Temperatur vorher
	T_2 Temperatur nachher

Man nennt den Proportionalitätsfaktor C Wärmekapazität. Brauchen wir viel Warmemenge (großes Q) um eine bestimmte Temperaturdifferenz zu erzeugen, so ist auch das C groß. Dann steckt in diesem Körper ziemlich viel Wärmeenergie drin. Seine Wärmekapazität ist groß - er nimmt viel Wärme auf.

Wenn wir nun diese Wärmekapazität auf die Masse beziehen, so erhalten wir die spezifische Wärmekapazität, eine Größe, die uns angibt, wieviel Wärmeenergie pro Masse man in einen Körper hineinstecken muß, um eine bestimmte Temperaturänderung ΔT zu erreichen.

$$Q = m C (T_2 - T_1) \quad c = \frac{C}{m}$$

C ist die spezifische Wärmekapazität. ($C = \frac{Q}{m \Delta T}$)

Wir sehen und die Einheiten an :

$$[c = \frac{Q}{\Delta T}] = \frac{\text{Joule}}{\text{Kelvin}} = \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad \text{also} \quad [C] = \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Wir können aber auch die Wärmekapazität statt auf ein Kilogramm auf ein Mol eines Stoffes beziehen. Dann sprechen wir von der Molwärme mit der Einheit $\frac{\text{J}}{\text{Mol} \cdot \text{K}}$ ($c_{m,1}$)

(1 Mol ist die Stoffmenge irgendeines Stoffes, der aus genau so vielen Teilchen besteht, wie 12 g des Kohlenstoffatoms ^{12}C . Insgesamt gilt : ein Mol eines Stoffes ist die Menge des Stoffes, die $N_L = 6,0225 \cdot 10^{23}$ Teilchen (Atome, Ionen, Moleküle) enthält. N_L heißt die Loschmidtzahl oder Avogadro-Konstante. Das Mol gehört mit zu den Basiseinheiten (m, kg, sec, A, mol).

Wir haben bisher über die Wärmeenergie gesprochen. Es gibt auch hier einen Energieerhaltungssatz :

Geht in einem abgeschlossenen System Wärme von einem Körper auf einen anderen über, so gibt der eine Körper genau soviel Wärme ab, wie der andere aufnimmt.

Außerdem kann man die Wärmeenergie mit zu den mechanischen und elektrischen Energien zu einem übergeordneten Energiesatz vereinigen :

In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Energien konstant.

Dazu gehören also kinetische, potentielle, Schwingungs-, Rotations-, elektrische, magnetische und die Wärmeenergie.

Man kann das gesamte Universum als abgeschlossenes System betrachten und sagen : Im gesamten Universum geht keine Energie verloren. Es wird keine Energie erzeugt und es verschwindet auch keine.

Nutzen wir dies und unsere Definition der Wärmekapazität aus, so können wir errechnen, welche Mischungstemperatur sich einstellt, wenn wir zwei Massen unterschiedlicher Temperatur miteinander mischen (v.a. Flüssigkeiten).

Nach dem Energieerhaltungssatz muß die Wärmemenge vor der Mischung und die nach der Mischung übereinstimmen. Das heißt aber auch : die Wärmemenge des einen Körpers der von t_1 auf die Mischungstemperatur t_m erwärmt wurde ist gleich der Wärmemenge des Körpers, der von t_2 auf t_m abgekühlt wurde :

$$C_1 m_1 (t_1 - t_m) = C_2 m_2 (t_m - t_2)$$

$$\Rightarrow t_m = \frac{C_1 m_1 t_1 + C_2 m_2 t_2}{C_1 m_1 + C_2 m_2}$$

wobei C_1, C_2 die spezifischen Wärmekapazitäten und m_1, m_2 die Massen der beiden zu mischenden Körper sind.

Noch kurz etwas zu den Energieeinheiten der Wärmeenergie. Heute verwendet man (als Energieeinheit überhaupt) das Joule (J). Früher hatte man für die Wärmeenergie eine spezielle Einheit die Kalorie (cal) verwendet. Dies kam noch aus einer Zeit, wo man noch keinen so übergeordneten Energiebegriff wie heute hatte.

Es gilt die Umrechnung $1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$ und $1 \text{ J} = 0,239 \text{ cal}$

Wie aus nachfolgender Tabelle zu entnehmen ist, sind die spezifischen Wärmekapazitäten für die verschiedenen Stoffen ziemlich verschieden. Allerdings gibt es für Festkörper eine Besonderheit : die molare Wärmekapazität, also die Molwärme, ist für alle festen Stoffe nahezu gleich, nämlich $25 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$. Dies ist die Regel von Dulong-Petit.

Wir werden später sehen, womit diese Besonderheit zusammenhängt.

spezifische Wärmekapazitäten : (bei 20°C)

Wasser	$4,18 \cdot 10^3$ [J/K]	Die spezifische
Eis (-30°C)	$1,884 \cdot 10^3$	Wärmekapazität ist in
Glas	$0,837 \cdot 10^3$	gewissen Grenzen von
Stahl	$0,461 \cdot 10^3$	der herrschenden Tem-
Kupfer	$0,377 \cdot 10^3$	peratur abhängig.

II. IDEALES GAS

1. Zustandsgrößen

Man kann viele Phänomene innerhalb der Wärmelehre mit dem Modell des idealen Gases beschreiben. Als ideales Gas definieren wir ein Gas, bei dem

1. Die Gasteilchen (Moleküle, Atome) vernachlässigbar kleines Volumen haben (Massenpunkte), und
2. bei dem die Teilchen untereinander keinerlei Wechselwirkungen aufeinander ausüben (außer beim Zusammenstoß der Teilchen).

Bei hohen Temperaturen und kleinen Drücken wird von Gasen dieser ideale Zustand fast erreicht. Normalerweise sprechen wir von den Gasen, mit denen wir es in der Praxis zu tun haben von realen Gasen. Das sind also die, bei denen die Teilchen eine Ausdehnung haben und bei denen es Wechselwirkungen gibt.

Um eine große Anzahl von Teilchen zu beschreiben, brauchen wir sogenannte Zustandsgrößen. Man beschreibt also den Zustand einer Menge von Gasteilchen eines idealen Gases durch Zustandsgrößen oder Zustandsvariablen. Das sind bei uns hier

Druck (p),
Volumen (V) und
Temperatur (T)

Diese drei Zustandsgrößen sind nicht unabhängig voneinander. Würden wir den Zustand einer Gasmenge (d.h. einer großen Zahl von Teilchen) atomistisch beschreiben, bräuchten wir eine Vielzahl von Größen (für jedes einzelne Teilchen müßten wir eine Bewegungsgleichung aufstellen). So können wir mit Hilfe unserer Zustandsgrößen ein makroskopisches System einfach handhaben.

Die Abhängigkeit der einzelnen Größen voneinander sieht so aus :

$$f(p, V, T) = 0$$

Wir können aber auch jede der drei Größen durch die anderen beiden ausdrücken :

$$T = T(p, V) \quad p = p(T, V) \quad V = V(T, p)$$

Solche Gleichungen nennt man Zustandsgleichungen, sie beschreiben den Zustand eines makroskopischen thermodynamischen Systems. Und die des idealen Gases wollen wir nun explizit

berechnen. Durch die Zustandsgleichung oder auch Zustandsfunktion ist der Zustand eines Systems eindeutig festgelegt.

$V = V(p, T)$ heißt : Zu jedem bestimmten Druck und zu jeder bestimmten Temperatur gibt es nur ein ganz bestimmtes Volumen.

Diese Funktion ist unabhängig vom Weg, auf dem dieser Zustand realisiert wird. Es spielt also keine Rolle, ob nur der Druck, nur die Temperatur oder beides geändert wird, um ein bestimmtes Volumen zu erhalten. Und bei Funktionen, die unabhängig vom beschrittenen Weg sind, spricht man eben von Zustandsfunktionen. Eine Zustandsfunktion ist die Funktion von Zustandsgrößen. Wann ist nun eine Funktion eine Zustandsfunktion ? Denn nicht jeder Funktion, die einen Zustand beschreibt, handelt es sich um eine Zustandsfunktion. Eine solche muß wegunabhängig sein.

Eine Zustandsfunktion ist durch den Schwarz'schen Satz gegeben. Eine Funktion $X = X(x, y)$ ist dann eine Zustandsfunktion, wenn dX ein totales Differential ist, d.h. also, wenn gilt :

$$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_y \cdot dx + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)_x \cdot dy$$

Und wann ist das der Fall ?

Gerade dann, wenn sich die Reihenfolge der Bildung der zweiten Differentialquotienten vertauschen läßt, ist dX ein totales Differential und vom Weg unabhängig integrierbar !

Also

$X = X(x, y)$ ist eine Zustandsfunktion, wenn gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)_x$$

Das werden wir gleich am Beispiel der Zustandsgleichung des idealen Gases überprüfen.

2. Zustandsgleichung des idealen Gases

Wir haben es schon einmal gehört, das Boyle-Mariotte'sche Gesetz. Liegt eine konstante Temperatur vor, so ist das Produkt aus Druck und Volumen auch konstant. Also

$$\text{bei } T = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad p \cdot V = \text{const.}$$

Dann gibt es die beiden Gay-Lussac'schen Gesetze :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ Wenn } p = \text{const.} \Rightarrow \frac{V}{T} = \text{const.} \text{ oder } V \sim T \\ 2) \text{ Wenn } V = \text{const.} \Rightarrow \frac{p}{T} = \text{const.} \text{ oder } p \sim T \end{array} \right\}$$

Wenn man Boyle-Mariotte und Gay-Lussac miteinander verknüpft, so gilt

$$pV \sim T \text{ oder auch}$$

$pV = \text{const.} \cdot T$. In dieser Konstante steckt noch die Gasmenge drin. Schreiben wir diese explizit heraus, so gilt dann mit n = Zahl der Mole :

$$pV = nRT$$

R nennt man die Gaskonstante. Wir können die Beziehung auch umschreiben und als Zahl der Mole n die Zahl der Teilchen N einführen. Als Proportionalitätskonstante schreiben wir dann die sogenannte Boltzmann-Konstante k :

$$pV = NkT$$

Das heißt also dann :

für ein Mol idealen Gases gilt $pV = RT$ und

$$pV = N_L k T$$

Daraus erkennen wir auch eine Beziehung zwischen Gaskonstante R und Boltzmann-Konstante k :

$$k = \frac{R}{N_L}$$

Wir erinnern uns: N_L war die Loschmidt-Zahl, die Zahl der Teilchen pro Mol.

Wir merken uns vornehmlich

$$pV = nRT$$

Diese Beziehung nennt man das Gesetz der idealen Gase. Es ist dies die Zustandsfunktion für ideale Gase. Da es in der Realität gar keine idealen Gase gibt, handelt es sich also hier nur um eine Näherung. Dieses Gesetz gilt nur näherungsweise.

Noch kurz zu den Konstanten :

$$R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \quad \text{und} \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Nun wollen wir rasch überprüfen, ob es sich bei der Funktion

$$V(p,T) = \frac{nRT}{p} \text{ um eine Zustandsfunktion handelt.}$$

Betrachten wir die Funktion für ein Mol, also $n = 1$:

$$V = \frac{R \cdot T}{p} \text{ . Die Bedingung für eine Zustandsfunktion war}$$

$$\text{mit } X = X(x,y) \mapsto \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)_x$$

also hier
 $x=T; y=p$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \text{ Gilt das ?}$$

$$a) \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{RT}{p} \right] \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{R}{p} \right) = -\frac{R}{p^2}$$

$$b) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{RT}{p} \right] \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{R \cdot T}{p^2} \right) = -\frac{R}{p^2}$$

Beide Ausdrücke sind gleich, d.h. bei $V = V(p,T) = \frac{RT}{p}$ handelt es sich um eine Zustandsfunktion. Das heißt, daß es keine Rolle spielt, wie wir ein bestimmtes Volumen erreichen, indem wir Druck/Volumen oder beides ändern.

Wenn wir unter Normalbedingungen arbeiten; d.h. wir haben Normaldruck ($p_0 = 101325 \text{ Pa}$, früher 1 atm) und Normaltemperatur ($t_0 = 0^\circ\text{C}$, bzw. $T_0 = 273,15 \text{ K}$) so erhalten wir für $n = 1$ das sogenannte Molvolumen, also das Volumen, was ein ideales Gas bei Normalbedingungen einnimmt. Es stimmt ziemlich genau mit dem praktisch ermittelten Wert überein. Dieser beträgt ungefähr $22,4 \text{ l}$ und zwar unabhängig davon, was für ein Gas wir verwenden:

$$V_0 = \frac{R \cdot T_0}{p_0} = \frac{8,314 \cdot 273,15 \left[\frac{\text{J K m}^2}{\text{K N}} \right]}{101325} = 22,412 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{Nm m}^2}{\text{N}} \right] = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Dies ist auch das Avogadro'sche Gesetz :

1 Mol eines Gases nimmt bei Normalbedingungen etwa $22,4 \text{ l}$ Volumen ein.
1 Mol eines Stoffes enthält $N_L = 6,0225 \cdot 10^{23}$ Moleküle.

III. KINETISCHE GASTHEORIE

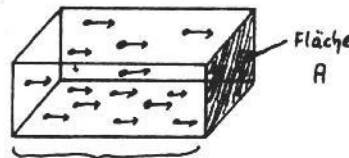
In der kinetischen Gastheorie leiten wir einige Beziehungen zwischen makroskopischen (Druck, Wärmemenge, Energie) Größen und mikroskopischen, atomistischen Größen (Masse, mittlere Geschwindigkeit, Freiheitsgrade, Anzahl einzelner Teilchen) ab.

1. Grundgleichung

In der Grundgleichung der kinetischen Gastheorie führen wir die makroskopische Größe Druck auf mikroskopische Größen zurück. Wir müssen aber zunächst noch etwas voraussetzen: Es handele sich bei uns um ein ideales Gas. Die Gasatome befinden sich in ungeordneter translatorischer Bewegung, also in Wärmebewegung. Sie haben eine mittlere Geschwindigkeit \bar{v} . Wenn Gasteilchen zusammenstoßen, sollen diese Stöße elastisch sein und Impuls- und Energieerhaltungssatz des elastischen Stoßes befolgen.

Wir nehmen nun wiederum vereinfachend an, alle Teilchen bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit. Und zwar bewegen sich jeweils ein Drittel der Teilchen parallel zu den drei Raumrichtungen x, y und z . Und davon jeweils die Hälfte in positiver und die andere Hälfte in negativer Richtung. Deshalb bewegen sich auf eine Gefäßwand, die senkrecht zur x -Richtung steht, ein Sechstel aller Teilchen zu.

Pro sec erreichen von den Teilchen, die sich auf diese Wand zubewegen nur diejenigen diese Wand, die in einem Volumen der Länge $x = v \cdot (1 \text{ sec}) = v \text{ (m)}$ enthalten sind, Unser Gasvolumen V soll N Teilchen enthalten, also pro Volumen $n = \frac{N}{V}$ Teilchen. \implies Pro Zeit wird die Wand von z Teilchen getroffen:



$$x = v \cdot t, \quad t = 1 \text{ sec}$$

$$z = n \cdot \frac{v}{6}$$

Bei jedem Stoß nun wird der doppelte Impuls an die Wand übertragen (wir erinnern uns: bei Stoß eines leichten auf ein sehr schweres Teilchen - was ist denn die Wand anderes? - wird von der leichten auf die schwere Masse der doppelte Impuls übertragen). Hier also: Durch die z Teilchen wird auf die Wand der Impuls $P = z \cdot (2 m v) = \frac{n m v^2}{3}$ übertragen.

Doch halt - woher kam denn dieses $z = n \cdot \frac{v}{6}$. Noch einmal ganz ausführlich:

Wieviele Teilchen haben wir in unserem Volumen, die stoßen können? Unser Volumen ist gerade:

$$V = \text{gestoßene Fläche mal } x = A \cdot v \cdot t$$

$1/6$ aller vorhandenen Teilchen fliegen Richtung Fläche A .

Es stoßen z Teilchen auf die Wand. Diese Teilchen können nur aus dem Volumen $V = A v t$ kommen.

Deren Zahl ist $N = n \cdot V = n \cdot A \cdot v \cdot t$. Davon stößt ein Sechstel:

$$z = \frac{N}{6} = \frac{n \cdot A \cdot v \cdot t}{6}$$

Wieviel stoßen nun pro Zeit t - $\frac{z}{t} = \frac{n \cdot A \cdot v}{6}$

Und wieviele stoßen auf die Fläche, also Zahl Z pro Zeit und pro Fläche A -

$$z = \frac{Z}{A \cdot t} = \frac{n \cdot v}{6}$$

Dies ist die Zahl pro Fläche und pro Zeit, der auf die Fläche stoßenden Teilchen. Der übertragene Impuls ist daher

$$P = \frac{n \cdot m \cdot v^2}{3}$$

Vielleicht wissen wir noch, daß Kraft gleich der zeitlichen Änderung des Impulses war

$$F = \frac{dp}{dt}$$

Unsere Größe P (das war der Impuls pro Zeit und pro Fläche) ist daher das Gleiche wie Kraft pro Fläche.

Was ist aber Kraft pro Fläche noch? Es ist noch Druck! Die im Volumen vorhandenen Teilchen üben auf die Gefäßwand einen Druck aus. Für diesen gilt

$$p = \frac{n m v^2}{3}$$

Dies können wir auch allgemein sagen. In einem abgeschlossenen Gefäß ist der Druck überall gleich. Das heißt dann, daß diese Beziehung ganz allgemein gilt.

Haben wir Teilchen vorliegen (und zwar n Stück pro Volumeneinheit), die die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} und die Masse m haben, so erzeugen diese einen Druck von

$$p = \frac{n m \bar{v}^2}{3}$$

Diese nennt man auch die Grundgleichung der kinetischen Gas-

theorie. Jetzt wollen wir uns ansehen, wie man die Temperatur

auch auf mechanische Eigenschaften der Gasmoleküle zurückführen kann.

2. Temperatur

Wir gehen von der Grundgleichung aus :

$$p = \frac{n m \bar{v}^2}{3} . \text{ Wir sagten, } n \text{ sei die Teilchenzahl pro Volumen}$$

also $n = \frac{N}{V}$. Daher gilt natürlich auch

$$p V = \frac{N m \bar{v}^2}{3}$$

Da wir unsere Betrachtung der kinetischen Gastheorie auf ideale Gase beschränkt haben, und da für ideale Gase gilt $p V = n R T$ so folgt natürlich auch

$$n R T = \frac{N m \bar{v}^2}{3}$$

Was können wir damit anfangen ? Betrachten wir uns diese Beziehung einmal etwas genauer. Darin steht $m \bar{v}^2$. Irgendwoher kennen wir das aber. Teilen wir dieses nämlich durch 2, erhalten wir eine kinetische Energie :

$$\frac{m \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n R T}{N} \text{ also - die mittlere kinetische Energie}$$

der ungeordneten Bewegung der Gasteilchen ist proportional zur Temperatur. Das heißt: höhere Temperatur entspricht größerer kinetischer Energie. Wenn man ein Gas erwärmt, also die Temperatur erhöht, so enthält das Gas danach eine größere Wärmeenergie, die sich in kinetische Energie der Teilchen verwandelt. Da sich die Masse der Teilchen nicht ändert, heißt das, daß sie sich nun schneller bewegen. Eine höhere Temperatur entspricht somit einer schnelleren Molekularbewegung.

$$\text{Zurück } \frac{m \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n R T}{N}$$

Wenn wir nur ein Mol betrachten, wenn also $n = 1$ ist, dann ist logischerweise die Zahl der vorhandenen Teilchen (hier N) natürlich gerade der Loschmidt-Zahl N_L . Setzen wir ein

$$\frac{m \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R T}{N_L} \quad \text{und da } \frac{R}{N_L} = k \implies \frac{m \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} k T .$$

$$\text{Damit gilt aber dann auch } p V = \frac{2}{3} N \frac{m \bar{v}^2}{2}$$

also

$$p V = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^N \overline{E_{kin,i}}$$

es hat somit ein Molekül die kinetische Energie

$$\overline{E_{kin}} = \frac{3}{2} k T . \text{ Warum ? Nocheinmal}$$

$$\text{für 1 Mol : } p V = R T = \frac{2}{3} N_L \overline{E_{kin}}$$

$$\implies N_L \cdot \overline{E_{kin}} = \frac{3}{2} R T$$

Die kinetische Energie der Translationsbewegung aller Moleküle in einem Mol beträgt $3/2 R T$. Für ein einzelnes Molekül folgt daher

$$\overline{E_{kin}} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_L} T = \frac{3}{2} k T$$

Daher können wir auch die Grundgleichung anders schreiben, nämlich

$$p = n k T$$

3. Wärmekapazität

Nun müssen wir uns etwas mit der Wärmekapazität befassen. Wir haben ja schon gehört, was darunter zu verstehen ist.

Wenn wir ein Stoff erwärmen, gibt uns die spezifische Wärmekapazität an, um wieviel sich dabei die Temperatur ändert.

Nun kommt es aber bei der Erwärmung darauf an, wie wir erwärmen.

Allerdings ist dies nur bei den Gasen so. Wenn wir bei der Erwärmung das Volumen konstant halten, so ist die spezifische Wärme (bei konstantem Volumen) c_v (das v steht für konstantes Volumen) kleiner, als wenn wir unter konstantem Druck erwärmen.

Es gilt daher

$$c_v < c_p$$

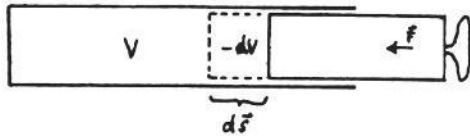
Warum ist das so ?

Wenn wir den Druck festhalten, so steigt durch die zugeführte Wärmemenge nicht nur die Temperatur an, sondern auch das Volumen wird vergrößert. Das erfordert mehr Arbeit, als wenn wir unter Konstanthaltung des Volumens die Temperatur (damit automatisch) den Druck) erhöhen.

Berechnen wir daher zunächst einmal die Arbeit, die aufgewendet werden muß, um ein Gas zu expandieren oder zu komprimieren :

Wir betrachten uns dafür einen Kolben. Er hat innen das Volumen V , der Kolben selbst hat eine Fläche A . Im Innern

Ist ein Gas unter dem Druck p eingeschlossen. Nun soll durch



Druck auf dem Kolben das Volumen verkleinert werden. Der Druck vergrößert den Innendruck sodaß das Volumen kleiner wird. Wie groß ist nun die Arbeit, die wir dafür aufwenden müssen? Was war noch die Definition

der Arbeit? Es war dies

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad , \quad \vec{F} \parallel d\vec{s}$$

Wenn wir auf den Kolben drücken, verschieben wir ihn um eine bestimmte Strecke. Wir leisten gegen eine Kraft eine Arbeit und diese Kraft ist gerade $F = p \cdot A$. Da wir gegen den Innendruck p eine Arbeit aufwenden.

Es gilt daher

$$W = \int F \cdot ds = \int p \cdot A \cdot ds = \int p \, dV$$

Die Arbeit, an einem Gas oder einer Flüssigkeit eine Volumenänderung vorzunehmen ist daher

$$W = \int p \, dV$$

Wenn wir dies so machen, daß keine Wärmeenergie umgesetzt wird, d.h. wenn wir von außen keine Wärme zuführen, aber auch keine Wärme entweichen lassen (einen solchen Vorgang nennt man adiabatisch), so steigt bei Volumenverkleinerung die Temperatur an. Warum das?

Wenn wir den Stempel hineindrücken, um das Volumen zu verkleinern, so übertragen wir kinetische Energie auf die Gasmoleküle, die in der Nähe des Kolbens sind. Diese Mehrenergie überträgt sich auf alle Moleküle gleichmäßig, sodaß das Gas insgesamt eine größere kinetische Energie in seiner Translationsbewegung hat. Größere E_{kin} bedeutet aber höhere Temperatur!

Umgekehrt gilt aber auch folgendes. Haben wir ein eingeschlossenes Gas in einem Gefäß mit frei verschiebbarem Kolben und ist der Innendruck p_1 gleich dem Außendruck p_a , so herrscht Gleichgewicht. Führen wir nun Wärmemenge zu, so ist das Gas imstande, Volumenarbeit zu leisten. Durch die zugeführte Wärmeenergie erhöht sich die Translationsenergie der Moleküle und damit der Innendruck. Innen ist der Druck größer als außen, der Kolben verschiebt sich - und zwar so lange, bis sich Innen- und Außendruck (durch die Volumenveränderung) wie-

der ausgeglichen haben.

So - kommen wir zurück zu den Wärmekapazitäten c_p und c_v .

Wir erwärmen ein Gas:

Wenn $V = \text{const.} \implies Q_1 = c_v \cdot \Delta T$. Wir führen also die Wärme Q_1 zu, die hier ganz in kinetische Molekularenergie umgesetzt wird.

$p = \text{const.} \implies Q_2 = c_p \cdot \Delta T$. Die zugeführte Wärme Q_2 wird hier in E_{kin} verwandelt, aber auch in Arbeit, die das Volumen vergrößert.

Um zur gleichen Temperaturerhöhung zu kommen, müssen wir Q_2 größer als Q_1 machen - oder $c_p > c_v$.

Berechnen wir den Unterschied. Wir erwärmen also ein Gas. Wir führen die Wärmemenge Q zu. Falls $p = \text{const.}$ wird Q verwendet um die Temperatur zu erhöhen und um Volumenarbeit zu leisten. Falls aber $V = \text{const.}$ ist, verbraucht sich Q nur in Temperaturerhöhung.

$$Q_1 = Q_2 - \int p \cdot dV \quad !$$

auf der rechten Seite ($p = \text{const.}$) können wir das p vor's Integral ziehen und statt $\int dV = \Delta V$ schreiben.

$$\text{also } Q_1 = Q_2 - p \cdot \Delta V.$$

Wir haben ein ideales Gas also gilt (bei konstantem p)

$$p \cdot \Delta V = R \cdot \Delta T$$

\implies

$$Q_1 = Q_2 - R \cdot \Delta T \quad \text{oder auch } c_v \cdot \Delta T = c_p \cdot \Delta T - R \cdot \Delta T$$

woraus aber sofort folgt: $c_v = c_p - R$ oder $c_p - c_v = R$

Der Unterschied zwischen den Wärmekapazitäten c_p und c_v eines idealen Gases ist gerade R . Diese ist gerade $8,314 \frac{J}{\text{mol K}}$

Auch bei den normalen Gasen (also den realen) gilt dies fast

$$\rightarrow c_p - c_v \approx 8,3 \frac{J}{\text{mol K}}$$

4. Äquipartitionsprinzip

Wir hatten herausgefunden, daß pro Molekül eine kinetische Energie von $\frac{3}{2} k T$ in der Wärmebewegung steckt.

Diese kinetische Energie $\frac{1}{2} m \bar{v}^2$ können wir in die drei Vektorkomponenten zerlegen (da der Vektor v den Betrag $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ hat)

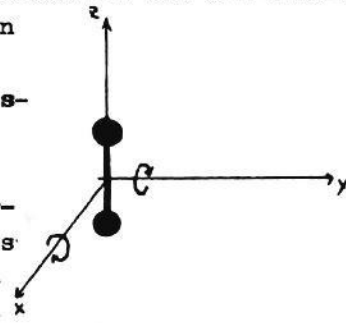
$$\frac{1}{2} m \cdot \bar{v}^2 = \frac{1}{2} m \cdot \bar{v}_x^2 + \frac{1}{2} m \cdot \bar{v}_y^2 + \frac{1}{2} m \cdot \bar{v}_z^2$$

Nun sind natürlich keine Richtungen in der Wärmebewegung bevorzugt. Das heißt aber, daß jede Richtung den gleichen Energieanteil hat. Es ist also dann logisch, daß von der kinetischen Energie $\frac{3}{2} \cdot k T$ auf jede Raumrichtung $\frac{1}{2} \cdot k T$ entfällt.

Wir ordnen nun jeder der drei Koordinatenrichtung einen sogenannten Freiheitsgrad zu. Dann kann die mittlere kinetische Energie auf die drei Freiheitsgrade aufgeteilt werden, pro Freiheitsgrad entfällt somit auf jedes mol $\frac{1}{2} R T$, bzw. pro Molekül $\frac{1}{2} k T$.

Für einatomige Atome (wie die der Edelgase) trifft dies auch zu, nur bei zweiatomigen stimmt die Sache nicht mehr.

Dort kann nämlich die zugeführte Wärmeenergie nicht nur zur translatorischen Bewegung (3 Freiheitsgrade) anregen, sondern auch zur Rotation der Moleküle. Betrachten wir uns ein Modell eines zweiatomigen Moleküls - es sei in z-Richtung orientiert. Für eine Rotation um die z-Achse wird das Trägheitsmoment sehr klein (wir können es vernachlässigen). Für Rotationen um die x- und die y-Achse wird Rotationsenergie benötigt. Auf die Rotationen eines zweiatomigen Moleküls entfallen somit noch zwei Freiheitsgrade, so daß zweiatomige Moleküle fünf Freiheitsgrade haben. Bei drei- und mehratomigen Molekülen wird auch für die Rotation um die dritte Achse Energie verbraucht, sodaß solche Moleküle sechs Freiheitsgrade haben.



Nun sagt der Gleichverteilungssatz oder auch das Äquipartitionsprinzip:

Der Wärmeinhalt eines Stoffes beträgt pro Freiheitsgrad und pro mol $\frac{1}{2} R T$ und pro Freiheitsgrad und pro Molekül $\frac{1}{2} k T$.

Also erhalten wir für ein

einatomiges Gas pro mol $\frac{3}{2} R T$, pro Molekül $\frac{3}{2} k T$
 zweiatomiges Gas pro mol $\frac{5}{2} R T$, pro Molekül $\frac{5}{2} k T$
 dreiatomiges Gas pro mol $\frac{6}{2} R T$, pro Molekül $\frac{6}{2} k T = 3 k T$.

Man bezeichnet als Innere Energie U eines Stoffes die Summe der Molekülenergien.

Also gilt dann

$$U = N \cdot \frac{r}{2} \cdot k \cdot T$$

wobei r = Zahl der Freiheitsgrade und N Zahl der insgesamt vorhandenen Moleküle.

Wenn wir ein Gas bei konstantem Volumen erwärmen (wir stecken Wärmemenge Q hinein), so wird diese ganze Änderung der Wärmemenge verwendet, um die Temperatur zu ändern. Mikroskopisch heißt das, Q wird ganz in Innere Energie verwandelt, Q wird also zur schon vorhandenen inneren Energie hinzugebracht.

Wir können also für die innere Energie, die mit der Temperatur T verknüpft ist, auch sagen

$$U = c_{v, \text{mol}} n T$$

$c_{v, \text{mol}}$ = Molwärme, also Wärmekapazität pro Mol bei festem Volumen und n = mol-Zahl.

Da aber auch gilt $U = N \frac{r}{2} k T = \frac{N}{N_L} \frac{r}{2} R T = n \frac{r}{2} R T$

folgt durch gleichsetzen:

$$c_{v, \text{mol}} = \frac{r}{2} R$$

Wir wissen auch $c_{p, \text{mol}} - c_{v, \text{mol}} = R$ also

$$c_{p, \text{mol}} = c_{v, \text{mol}} + R = \left(\frac{r}{2} + 1\right) R = \left(\frac{r+2}{2}\right) R$$

$$\Rightarrow \frac{c_{p, \text{mol}}}{c_{v, \text{mol}}} = \chi \text{ (Adiabatexponent)} = \frac{r+2}{r}$$

$$\chi = \frac{r+2}{r}$$

Dieser Adiabatexponent ist für Experimente leicht zugänglich und man findet auch $\chi_{\text{einatomig}} = 1,667$, für $\chi_{\text{zweiat}} = 1,4$ und für $\chi_{\text{dreiat}} = 1,33$.

Es folgt eine Übersicht für die theoretischen Werte von innerer Energie U , Freiheitsgraden r , $c_{v,mol}$ und $c_{p,mol}$ und dem Adiabatenexponent $\gamma = c_{p,mol} / c_{v,mol}$ in Abhängigkeit vom Stoff und von der Atomzahl:

Stoff	Atomzahl	Freiheitsgrad	innere Energie pro mol	$c_{v,mol}$ [J/(mol K)]	$c_{p,mol}$	γ
Gas	1	3	$\frac{3}{2} R T$	12,471	20,785	1,6667
Gas	2	5	$\frac{5}{2} R T$	20,785	29,1	1,4
Gas	3 u.m.	6	$3 R T$	24,942	33,256	1,3333
Festkörper		6	$\sim 3 R T$	24,942	$\sim 3 R$	~ 1

Diese Zahlen haben allerdings nur theoretische Bedeutung. Für praktische Beispiele und Berechnungen sind die Tabellenwerke heranzuziehen.

In der Tabelle steht für den Festkörper - 6 Freiheitsgrade. Wieso das? Wir wissen, im Festkörper ist das einzelne Atom fest eingebaut. Es kann nicht rotieren! Im festen Körper schwingen die Atome um eine feste Gleichgewichtslage. Sonst tun sie nichts. Da eine solche Schwingung kinetische und potentielle Energie hat, und beides größenordnungsmäßig gleich groß ist, und die Atome in drei Koordinatenrichtungen schwingen können hat ein fester Körper $2 \cdot 3 = 6$ Freiheitsgrade.

Kühlt man einen ^{festen} Körper hinreichend tief ab, so strebt die Molwärme für alle Stoffe gegen Null. Dies deshalb, da die Bewegungsenergien abnehmen. Genau kann dieses Verhalten mit klassischen Mitteln nicht erklärt werden. Dies kann nur die Quantenmechanik!

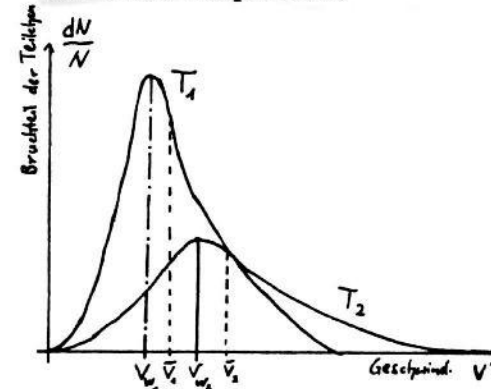
5. Boltzmann-Verteilung

Bislang gingen wir von der Annahme aus, daß alle Moleküle in einem Gas eine ziemlich einheitliche Geschwindigkeit \bar{v} haben. Dies trifft allerdings nicht zu. Wenn nämlich ein Teilchen auf ein anderes stößt, ändert es Geschwindigkeitsrichtung und

-betrag. Die Zeit zwischen zwei Stößen eines Teilchen nennen wir freie Flugzeit und die zurückgelegte Strecke freie Weglänge. Da diese aber auch verschieden ist, gibt man eine mittlere freie Flugzeit und eine mittlere freie Weglänge an. Die ist bei N_2 beispielsweise (bei 1 atm) $\lambda = 6,5 \mu m$. Da die Geschwindigkeit aller Moleküle verschieden ist, und sich dauernd ändert, gibt man öfter nur an, wieviel Teilchen eine Geschwindigkeit haben, die in einem bestimmten Geschwindigkeitsintervall liegt. Bei einer großen Teilchenzahl ist diese Angabe zeitunabhängig. Diese Angabe wird gemacht durch die Boltzmann'sche Geschwindigkeitsverteilung:

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot kT}} v^2 dv$$

Diese gibt an, wie groß der Bruchteil ($\frac{dN}{N}$) der Teilchen der Masse m ist, die eine Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ haben. Dabei ist N die Gesamtzahl der vorhandenen Teilchen und T die Temperatur.



Hier ist die Geschwindigkeitsverteilung für zwei verschiedene Temperaturen aufgezeichnet. Man sieht, daß es in jeder Kurve ein Maximum gibt. Diese Geschwindigkeit bezeichnet man als wahrscheinlichste Geschwindigkeit. Diese ist aber nicht gleich der bisher verwendete mittleren Geschwindigkeit \bar{v} .

Und zwar deshalb, da die Kurve unsymmetrisch ist. Die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} liegt um ca. 22% höher als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit: $\bar{v} = 1,22 v_w$.

Allgemein lautet der Verteilungssatz von Boltzmann:

Kann ein System eine Reihe von Zuständen mit den Energien E_1, E_2, E_3 usw. annehmen (wobei dieses E die Summe von kinetischer und potentieller Energie ist), so ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System im Zustand i befindet proportional zu $e^{-E_i/kT}$ also $W_i = g_i \cdot e^{-E/kT}$

g_i ist das "statistische Gewicht" des Zustandes i . Verschieden Zustände haben meist verschiedene statistischen Gewichte.

IV. 1. HAUPTSATZ DER WÄRMELEHRE

1. Energiebilanz

Wie wir gesehen haben, kann man mit Hilfe der Wärmeenergie den Energiesatz der Mechanik zu einem allgemeineren Energieerhaltungssatz erweitern, das auch die Wärmeverluste durch Reibung mitberücksichtigt. Man kann durch Arbeit Wärme erzeugen (durch Reibung beispielsweise), man kann aber auch umgekehrt mit Wärme Arbeit erzeugen (z.B. Wärmekraftmaschine). Erzeugt man Arbeit aus Wärme, so ist es klar, daß die innere Energie in dem Maße abnimmt, wie Wärme für die Arbeitsleistung verbraucht wird. Oder andersherum gesagt: Wenn wir einem System von außen Arbeit und Wärme zuführen, steigt seine innere Energie dementsprechend. Im ersten Hauptsatz der Wärmelehre, wird nun die Bilanz der Energien eines thermodynamischen Systems (das sind zugeführte oder geleistete Arbeit, Wärme und innere Energie) dargestellt.

Er lautet:

Die Summe der einem System von außen zugeführten Wärme und der von außen zugeführten Arbeit ist gleich der Zunahme der inneren Energie

oder

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

Die von außen einem System zugeführte Wärmemenge ΔQ dient zur Erhöhung seiner inneren Energie (beispielsweise seiner Temperatur) und zu einer Arbeitsleistung $-\Delta W$

Also
$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

Das Vorzeichen der Arbeit ist bei uns so definiert:

Verrichtet man an einem System Arbeit (steckt man sie also hinein) so ist sie positiv: $W > 0$.
Verrichtet das System Arbeit (kommt also Arbeit heraus) so ist sie negativ: $W < 0$.

Der erste Hauptsatz noch etwas anders formuliert:

$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$: Die einem System zugeführte Arbeit (Wärme ΔQ) kann als innere Energie gespeichert werden (ΔU) oder aber auch Arbeit leisten ($-\Delta W$) oder beides

2. Zustandsänderungen

Im folgenden wollen wir uns mit Arbeit beschäftigen, die verbraucht wird, um den Zustand eines Systems zu verändern. Unter einem solchen System verstehen wir hauptsächlich ein ideales Gas. Dabei hatten wir ja gesehen, daß der Zustand eines idealen Gases beschrieben wird durch die drei Größen Druck (p), Temperatur (T) und Volumen (V), jetzt kommt noch die Wärmemenge (Q) hinzu. Wie kann man ein System verändern? Zum Beispiel, wenn man das Volumen verändert. Was passiert dann? Das Gas kühlt ab (wenn V kleiner wird), der Druck ändert sich - aber wie? Um die Sache besser in den Griff zu bekommen, führen wir diese Zustandsänderungen so durch, daß wir eine der Zustandsgrößen festhalten, während wir sehen was mit den anderen passiert.

Es gibt also vier Zustandsänderungen (eigentlich gibt es noch mehr, aber die festzuhaltenen Zustandsgrößen kennen wir noch garnicht.):

Adiabatische Zustandsänderung - davon haben wir schon gehört - die Wärmemenge Q bleibt konstant.

Isotherme Zustandsänderung - hier halten wir die Temperatur ^{fest}

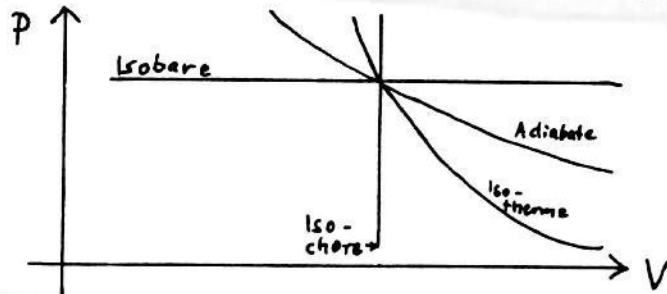
Isobare Zustandsänderung - der Druck p bleibt konstant

Isochore Zustandsänderung - das Gas ist in einer Kammer mit konstantem Volumen eingesperrt.

Auf den nächsten Seiten ist eine Tabelle aufgeführt, aus der man alles bei den Zustandsänderungen ersehen kann. Dort ist für jede Zustandsänderung berechnet, wie der erste Hauptsatz aussieht, wie die Beziehungen für die anderen (nicht konstant gehaltenen) Größen aussehen (aus dem Gesetz des idealen Gases folgend). Des Weiteren ist zu sehen, wie groß die umgesetzte Wärmemenge jeweils ist, bei der Zustandsänderung. Man sieht, ob Arbeit hineingesteckt wurde oder herauskam, und wie sich die innere Energie verändert hat. Schließlich ist noch das pV -Diagramm gezeichnet - für jede der einzelnen Zustandsänderungen. Zu beachten ist, daß einmal die Größen selbst (Q, U, V, p, T, W) ein andermal Änderungen dieser Größen ($\Delta Q, \Delta U, \Delta V, \Delta p, \Delta T, \Delta W$) oder sogar infinitesimal kleine Änderungen (dQ, dU, dV, dp, dT, dW) verwendet sind.

	ISOCHOR	ISOBAR	ISOTHERM	ADIABATISC
<u>BEDINGUNG</u> Was wird konstant gehalten ?	$V = \text{konstant}$ $pV^\gamma = \text{konstant}$ $\Delta V = 0$	$p = \text{konstant}$ $pV^\gamma = \text{konstant}$ $\Delta p = 0$	$T = \text{konstant}$ $pV^\gamma = \text{konstant}$ $\Delta T = 0$	$Q = \text{konstant}$ $pV^\gamma = \text{konstant}$ $\Delta Q = 0 \quad \alpha = \frac{c_p}{c_v}$
<u>1. HAUPTSATZ</u> $\Delta Q = \Delta U - \Delta W$	$\Delta Q = \Delta U$ (siehe ↓ Arbeit)	$\Delta Q = \Delta U - \Delta W$	$\Delta Q = -\Delta W$ (denn $\Delta U = N \cdot \frac{f}{2} k \cdot \Delta T$)	$0 = \Delta U - \Delta W \implies$ $\Delta U = \Delta W$
<u>GASGESETZ</u> $pV = nRT$	$\frac{p}{T} = \text{konstant}$ oder $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}$	$\frac{V}{T} = \text{konstant}$ oder $\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2}$	$pV = \text{konstant}$ oder $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$	$pV^\alpha = \text{const (Poisson)}$ $\rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\alpha$ $T \cdot V^{\alpha-1} = \text{const.}$ $\rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\alpha-1}$ $T^\alpha p^{-(\alpha-1)} = \text{const.}$ $\rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$
<u>WÄRMEMENGE Q</u> (jeweils pro Mol)	$dQ = c_v dT$ oder $\Delta Q = c_v (T_2 - T_1)$	$dQ = c_p dT$ $\Delta Q = c_p (T_2 - T_1)$	$dQ = -dW$ $\Delta Q = -\Delta W$	$dQ = 0$ $\Delta Q = \text{konstant}$
<u>ARBEIT W</u> $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ (Vergrößert man das Volumen von V_1 auf V_2 , wird W positiv, wir müssen also für diesen Vorgang Arbeit aufwenden)	$\Delta W = 0$ $dW = 0$	$dW = p dV$ $\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV =$ $= p (V_2 - V_1) =$ $= nR(T_2 - T_1)$	$dW = p dV$ $\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV$ $= nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{p_1}{p_2}$ $= p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ $= p_2 V_2 \ln \frac{p_1}{p_2}$	$dW = dU = c_v dT$ $\Delta W = \Delta U = c_v (T_2 - T_1)$ $= \frac{nR}{\alpha - 1} (T_2 - T_1)$
<u>INNERE ENERGIE</u> Wie ändert sich die Innere Energie U ?	$dU = dQ = c_v dT$ $\Delta U = \Delta Q = c_v (T_2 - T_1)$	$dU = c_p dT - p dV$ $\Delta U = c_p (T_2 - T_1) - p(V_2 - V_1)$ $= (c_p - nR) \cdot (T_2 - T_1)$	$dU = 0$ $\Delta U = 0$	$dU = c_v dT$ $\Delta U = c_v (T_2 - T_1)$ $= \frac{nR}{\alpha - 1} (T_2 - T_1)$

Hier die Diagramme für die Zustandsänderungen :



3. Umkehrbarkeit von Prozessen

Wir machen eine Energiebetrachtung.

Wir sehen einen Blumentopf von einem Balkon auf die Straße fallen. Wir wollen nicht so gehässig sein, als Ziel einen Passanten zu wählen. Also auf die Straße - der Blumentopf zerbricht. Scheinbar eine ganz alltägliche Sache. Irgendjemand auf dem Balkon ist wohl an den Blumentopf gestoßen und er fiel zur Erde.

Was geschah energetisch ?

Ursprünglich hatte der Topf eine bestimmte potentielle Energie. Als er angestoßen wurde, begann sich diese Energie in kinetische und Wärmeenergie (bzw. Verformungsenergie) umzuwandeln. Gut und schön. Wie wir wissen, gilt der Energieerhaltungssatz, den wir um die innere Energie und die Wärmeenergie erweitert haben.

Wir stecken in den am Boden liegenden zerbrochenen Topf Wärmeenergie und kinetische Energie. Der Topf fliegt hoch auf den Balkon, da seine potentielle Energie wächst. Quatsch ? Ist das wirklich so unsinnig ? Vom energetischen Standpunkt ist es wohl egal, ob der Körper hinauf- oder hinunterfliegt.

Es ist alles eine Sache des Erhaltungssatzes. Keine Energie geht verloren. Theoretisch müßte die Umkehrung des stürzenden Topfes möglich sein. Aber so etwas haben wir noch nie gesehen.

Ein anderes Beispiel : Wir erhitzen einen Stab. An dieser Stelle ist der Stab heißer als am gegenüberliegenden Ende. Was geschieht ? Die Wärme verteilt sich über den ganzen Stab.

Es fließt sozusagen Wärme von der heißen zur kalten Stelle.

Warum eigentlich ?

Warum fließt Wärme immer vom heißen zum kalten hin ?

Warum wird eine heiße Tasse Kaffee nicht noch heißer unter Abkühlung der Umgebung ?

Wir wissen es nicht ! Wir können nur sagen, daß so etwas noch nie beobachtet wurde. Wir können nicht sagen, daß sich ein Stein nicht doch unter Abkühlung in die Lüfte erhebt.

Wir können nur sagen : so etwas haben wir noch nie beobachtet.

Wir können physikalische Prozesse somit in zwei Gruppen unterteilen :

Irreversible Prozesse sind solche, die sich nicht umkehren lassen. (wie die eben besprochenen). Solche Prozesse, die sich umkehren lassen nennt man reversibel. Ein Beispiel ist ein Pendel, bei dem die Energie immer zwischen kinetischer und potentieller hin- und herschwingt.

Betrachtet man sich die Sache genauer, stellt man fest, daß meist solche Prozesse irreversibel sind, bei denen die Wärme als Energieform irgendwie auftaucht.

Unter den Energieformen nimmt - wie wir noch sehen werden - die Wärme eine ganz besondere Stellung ein. Man kann nicht Wärme vollständig in Arbeit, damit in eine andere Energieform umwandeln. Warum das so ist, darüber werden wir uns noch unterhalten müssen.

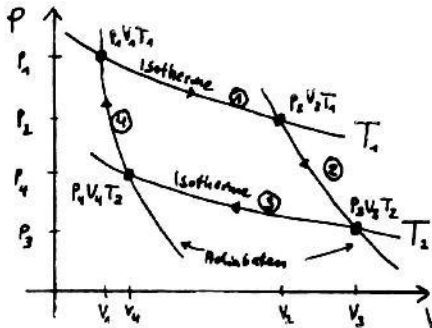
Wir werden nun im folgenden einen reversiblen Prozess thermodynamisch behandeln. Es handelt sich um den sogenannten

a) Carnot - Prozeß

Der Carnot'sche Kreisprozeß ist ein Modell für die Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit. Und zwar ist dieses Modell idealisiert. In Wirklichkeit gibt es solche Wärmeprozesse schon, aber ihr Wirkungsgrad ist kleiner. Was ein Wirkungsgrad ist, werden wir am Ende dieses Kapitels erfahren. Beispiele für solche Kreisprozesse sind alle Arten von Verbrennungsmotoren - ob das nun Otto- oder Dieselmotoren sind. Auch die Dampfmaschine gehorcht einem solchen Prozeß.

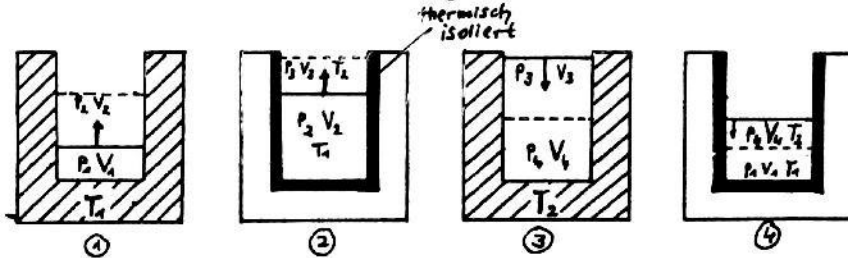
Bei unserem Carnot-Prozeß liegen Zustandsänderungen eines

idealen Gases (1. Idealisierung) vor, die allerdings unendlich langsam ablaufen sollen (2. Idealisierung), damit das Gas sich immer im Gleichgewicht befindet. Hier das p-V-Diagramm für diesen Prozeß. Es handelt sich um zwei adiabatische und zwei isotherme Zustandsänderungen, die so ablaufen, daß der Anfangs- und der Endzustand gleich sind - denn das ist das Wesen eines Kreisprozesses.



Wir teilen diesen Prozeß in 4 Schritte ein und betrachten jeden einzeln:

Wir betrachten jetzt die einzelnen Schritte genauer - und setzen uns die Wärmeenergiebilanz und die aufgewendete, bzw. freige-wordene Arbeit an.



1. Isotherme Expansion: T bleibt konstant, so dann auch die innere Energie (vgl. Übersicht).
 \Rightarrow sämtliche nach außen abgegebene Arbeit ($-\Delta A_1$) wird in Form von Wärmeenergie Q_1 dem äußeren Wärmebad entnommen. Für diese Arbeit gilt dann:
2. Das Gas (Zustand jetzt: p_2, V_2, T_1) wird nun weiter expandiert, und zwar adiabatisch. Auch hier wird Arbeit frei.
3. Jetzt komprimieren wir das Gas (p_3, V_3, T_2) isotherm. Hierfür müssen wir Arbeit aufwenden - genauso für den letzten Schritt
4. Adiabatische Kompression des Gases (letzter Zustand: p_4, V_4, T_2).

Wir betrachten jetzt die einzelnen Schritte genauer - und setzen uns die Wärmeenergiebilanz und die aufgewendete, bzw. freige-wordene Arbeit an.

1. Isotherme Expansion: T bleibt konstant, so dann auch die innere Energie (vgl. Übersicht).
 \Rightarrow sämtliche nach außen abgegebene Arbeit ($-\Delta A_1$) wird in Form von Wärmeenergie Q_1 dem äußeren Wärmebad entnommen. Für diese Arbeit gilt dann:

$$-\Delta W_1 = Q_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} nRT_1 \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

2. Adiabatische Expansion: Dieser Schritt findet ohne Wärmeaustausch statt. Daher ist die freiwerdende Arbeit gerade gleich der Abnahme der inneren Energie. Das Gas kühlt sich von T_1 auf T_2 ab

$$-\Delta W_2 = -\Delta U = n \cdot c_v (T_1 - T_2) \quad (\text{wobei } c_v = c_{\text{mol},v})$$

3. Isotherme Kompression: Dem Gas wird nun Wärme zugeführt. Die entsprechende Wärmemenge $-Q_2$ wird an das Wärmebad abgegeben. Die innere Energie U bleibt konst.

$$\Delta W_3 = -Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (\text{analog zu 1.})$$

4. Adiabatische Kompression: Umkehrung des Schrittes 2.

$$\Delta W_4 = n c_v (T_2 - T_1)$$

Summiert man nun alle vier Arbeiten, so kann man sehen, was unser Gas an Arbeit geleistet hat (die im Endeffekt aus der Wärmemenge kommt):

$$\begin{aligned} -\Delta W &= -\Delta W_1 - \Delta W_2 + \Delta W_3 + \Delta W_4 \\ -\Delta W &= nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + n c_v (T_1 - T_2) + nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} + n c_v (T_2 - T_1) \\ &= nR \left(T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} \right) \end{aligned}$$

Aus der Übersicht entnehmen wir, daß für adiabatische Vorgänge gilt:

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.}$$

Die vier Volumina sind durch die beiden Schritte 2. und 4. miteinander verknüpft. Wir können also diese Beziehung anwenden:

$$T_1 V_2^{\kappa-1} = T_2 V_3^{\kappa-1}$$

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_4^{\kappa-1}$$

Dividieren wir beide Gleichungen durcheinander, so erhalten wir

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\kappa-1} \quad \text{oder}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad \text{also}$$

$$-\Delta W = n R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Dies ist die Arbeit, die von der Maschine beim Durchlaufen des Carnot'schen Kreisprozesses abgegeben wird.

Die Wärme Q_1 wird dem Wärmereservoir mit der Temperatur T_1 entnommen, die Wärme $-Q_2$ wird an das Wärmebad mit der Temperatur T_2 gegeben.

Wir bezeichnen den Quotienten aus abgegebener Arbeit $-W$ und aufgenommener Wärme Q_1 als Wirkungsgrad der Maschine.

Jede Maschine hat einen Wirkungsgrad. Erreicht er die Zahl 1, d.h. also 100 %, dann geht überhaupt keine Energie in Form von Wärmeverlusten, Reibung etc. verloren. Deshalb ist dies auch nicht möglich.

Für den Carnot-Prozess gilt :

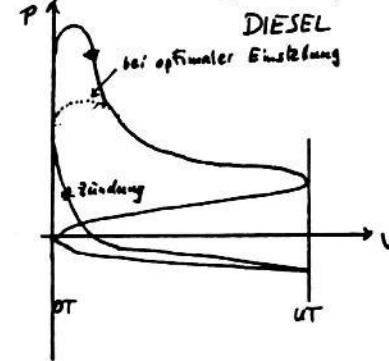
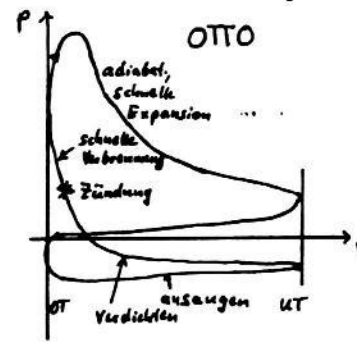
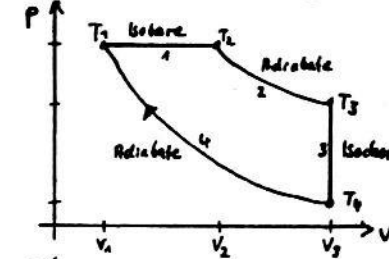
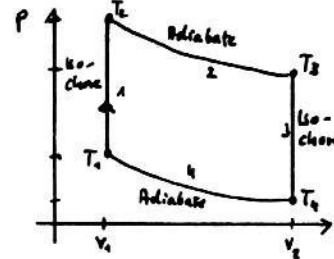
$$\eta = -\frac{\Delta W}{Q_1} = \frac{n R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}}{n R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Das heißt aber, daß der Wirkungsgrad unserer Maschine umso größer ist, je größer die Temperaturdifferenz der Wärmebäder ist. Wenn wir (wie wir es im dritten Hauptsatz sehen werden) voraussetzen, daß die Temperatur 0 Kelvin nie erreicht werden kann, kann daher auch der Wirkungsgrad $\eta = 1$ nie erreicht werden, da sonst die Temperatur $T_2 = 0$ Kelvin werden müßte. Mit dieser Maschine kann niemals Wärme vollständig im Arbeit überführt werden. Ein Rest Wärme wird immer ungenutzt vom warmen zum kalten Wärmebad übergehen (bei uns $-Q_2$).

Ein Zahlenbeispiel für den Wirkungsgrad :
eine Dampfturbine mit einer Eingangsdampf Temperatur von $T_1 = 500$ Kelvin und der Austrittstemperatur von $T_2 = 350$ K hat einen Wirkungsgrad von $\eta = \frac{500 - 350}{500} = 0,3$ oder 30 %.

Ich will hier noch ganz kurz zwei andere Kreisprozesse skizzieren. Diese braucht man überhaupt nicht zu kennen, nur ist es interessant, wie beispielsweise die Wirkungsgrade von Otto- und Dieselmotor thermodynamisch behandelt werden.

Hier die beiden p-V-Diagramme, darunter die realen Diagramme. Natürlich ist auch hier der Prozeß mehr modellmäßig erfaßt.



Zunächst zum Otto-Prozeß :

Wir nennen die Größe $\rho = V_2/V_1$ relative Kompression.

κ ist der Adiabatenexponent unseres Arbeitsgases (der Einfachheit halber benutzen wir ein ideales Gas).

Wir sehen aus dem Diagramm, daß wir zwei isochore und zwei adiabatische Schritte haben :

1. Isochore Erwärmung $+Q_1 = c_V (T_2 - T_1) > 0$
2. Adiabatische Expansion $Q_2 = 0$
3. Isochore Abkühlung $-Q_3 = c_V (T_4 - T_3) < 0$
4. Adiabatische Kompression $Q_4 = 0$

$$\eta = \frac{\text{aufgenommene Wärme}}{\text{abgegebene Wärme}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1}$$

Da $T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.} \Rightarrow$

$$\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \rho^{\kappa-1} \quad \text{und} \quad \frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \rho^{\kappa-1} \quad \Rightarrow$$

$$T_3 = T_2 \rho^{-(\kappa-1)} \quad \text{und} \quad T_4 = T_1 \rho^{-(\kappa-1)} \quad \text{und} \quad \Rightarrow$$

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \rho^{1-\kappa} \quad \text{Man versucht also, das Verdich-}$$

tungsverhältnis $\xi = \frac{V_2}{V_1}$ möglichst groß zu machen, um einen möglichst hohen Wirkungsgrad zu erhalten.

Nun noch kurz zum Dieselprozeß. Aus dem Diagramm kann man sehen, daß die vier Schritte aus Isobaren, Adiabaten und Isochoren besteht. Man nennt hier das Verhältnis $\xi = V_3/V_1$ die relative Kompression und $\xi' = V_2/V_1$ die relative Vorexpansion.

Nach der Aufstellung der Wärmegleichung für die einzelnen Schritte und diverser Umrechnungen erhält man hier für den Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{Diesel}} = 1 - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1 - \xi'^{\kappa}}{\xi^{\kappa} - 1} \cdot \frac{1}{(1 - \xi')} \right)$$

Man kann nachweisen, daß keine Maschine einen größeren Wirkungsgrad haben kann als die Carnot-Maschine.

b) Entropie

Wir haben nun ein Beispiel für reversible Prozesse gehabt. Ein irreversibler Prozeß hat eine ausgezeichnete Richtung, wie wir schon gesehen haben. Wärme fließt ausgleichend vom wärmeren zum Kälteren hin. Nicht umgekehrt. Die Entropie legt die Richtung solcher Vorgänge fest. Man ordnet jedem System einen gewissen Entropie-Inhalt S zu. Eine Zustandsänderung des Systems verläuft dann immer in Richtung wachsender Entropie. Nie wird die Entropie kleiner. Ist der Vorgang reversibel, muß die Entropie notgedrungen konstant bleiben.

Sehen wir uns einen solchen Vorgang an:

Eine reversible Änderung vom Zustand 1 zum Zustand 2 ergibt die Entropieänderung

$$S_{\text{rev}} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

Vom Zustand 1 zum Zustand 2 führen wir eine Wärmemenge dQ zu. Führen wir dann den Prozeß auf irgendeine Weise zum Zustand 1 zurück, so bleibt die Entropieänderung 0:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} = 0$$

Wir prüfen dies am Beispiel des Carnot-Prozesses. Dieser ist ja reversibel.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{T_1} \xrightarrow{\text{abgeg. Arbeit (S. 214)}} 1 + \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

aufgen. Wärme

$$\text{oder } \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = 0 \quad \text{infinitesimal: } \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} = \Delta S = 0$$

Aha - wir sehen sofort, bei diesem Kreisprozeß bleibt die Entropie konstant.

Bei irreversiblen Zustandsänderungen ist das schon ein wenig anders:

Bei einem irreversiblen Prozeß ist die Entropiezunahme von Zustand 1 zum Zustand 2 immer größer als eine reversible Entropiezunahme für den gleichen Schritt (Zustand 1 \rightarrow Zustand 2). Also es gilt:

$$\frac{dQ}{T}|_{\text{irrev}} > \frac{dQ}{T}|_{\text{rev}} \quad \text{oder} \\ \Delta S_{\text{irrev}} > \Delta S_{\text{rev}}$$

Wie schon gesagt, nimmt die Entropie bei einem Vorgang nie ab. Sie nimmt immer zu, oder sie bleibt bei reversiblen Prozessen konstant.

Wir betrachten ein Beispiel für einen irreversiblen Prozeß und wir berechnen dafür die Entropiebilanz:

Wir mischen 1 kg H_2O der Temperatur $0^\circ C$ mit 1 kg H_2O der Temperatur $40^\circ C$! Was erhalten wir?

2 kg H_2O der Temperatur $20^\circ C$. Nun betrachten wir noch die Temperaturen absolut - wie es sich bei all diesen Berechnungen gehört:

273 K wird mit Wasser von 313 K gemischt, man erhält Wasser mit $T = 293$ K.

Wie groß ist nun die Entropieänderung?

Die zu Erwärmung bzw. Abkühlung benötigte Wärmemenge beträgt $Q = m \cdot C \cdot (T_2 - T_1)$ C ist hier die spez. Wärmekapazität des Wassers

$$C = 4,182 \cdot 10^3 \frac{J}{kg \cdot K}$$

T_1 ist die jeweilige Ausgangstemperatur (273, bzw. 313 K), T_2 ist die Mischungstemperatur (293 K).

Nun gilt:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{m \cdot C \cdot dT}{T} = m \cdot C \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}; \text{ insgesamt}$$

$$\Delta S = 1 \cdot 4,182 \cdot 10^3 \cdot \left(\ln \frac{293}{273} + \ln \frac{293}{313} \right) = 19,53 \frac{J}{K}$$

Es gibt noch eine andere Art, die Entropie zu definieren.

Wir sagen: die Entropie S ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein ganz bestimmter Zustand realisieren läßt.

Ein Zustand hat eine umso größere Wahrscheinlichkeit, realisiert zu werden, je geringer seine Ordnung ist.

Daraus folgt aber auch, daß die Entropie ein Maß für den Ordnungsgrad eines Systems ist. Je geringer die Ordnung, desto größer die Entropie.

Wir betrachten dies an vorangegangenen Beispiel.

Es leuchtet ein, daß die Wahrscheinlichkeit, daß sich eine Menge Wasser gleicher Temperatur in zwei Hälften teilt, die verschiedene Temperaturen haben, viel kleiner ist, als die, daß sich zwei verschieden temperierte Wassermengen mischen. Das bedeutet aber, daß die Entropie der Wassermenge, die sich teilt, viel kleiner ist, als die, daß sie sich mischt. Demzufolge ist die Entropiedifferenz, wenn man von verschiedenen temperierten Mengen ausgeht, größer wird, wenn die Mengen gemischt sind.

Merken wir uns folgendes:

In einem abgeschlossenen System nimmt die Entropie nie ab. Entweder sie nimmt zu (bei irreversiblen Vorgängen), oder sie bleibt konstant (bei reversiblen Vorgängen).

Die Entropie ist überdies ein Maß für den Ordnungsgrad eines Systems. Je größer diese Ordnung, desto kleiner die Entropie.

4. Enthalpie

In der Chemie verwendet man häufig als Energiegröße die Enthalpie (H). Man definiert

$$H = U + pV$$

Warum das? In der Chemie gibt es hauptsächlich Vorgänge, die bei konstantem Druck ablaufen (normale chemische Reaktionen im Reagenzglas), seltener wird bei konstantem Volumen gearbeitet. H ist als Summe von Zustandsfunktionen selbst eine Zustandsfunktion. Wir wollen noch prüfen, ob unsere Definition sinnvoll war: Ändert sich bei einem Prozeß die Enthalpie, dann gilt

$$\Delta H = \Delta U + p \Delta V + V \Delta p \quad (\text{genau wie bei infinitesimal}$$

kleinen Elementen müssen wir hier die Produktregel befolgen!) -226-

Läuft der Prozeß unter konstantem Druck ab, fällt der Term $V \Delta p$ weg. Und für $\Delta U + p \Delta V$ können wir den ersten Hauptsatz einsetzen:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \quad (\Delta W = p \Delta V) \text{ also:}$$

$$H = \Delta Q \quad !$$

Bei Prozessen unter konstantem Druck führt demnach die vom System aus der Umgebung aufgenommene oder die an das System abgegebene Wärme ausschließlich zu einer Enthalpieänderung.

Die Enthalpie ist genau wie die innere Energie ein Maß für die Energie des Systems. Bei konstantem Druck ist sie nur eine Funktion der Temperatur des Systems.

Es gilt thermodynamisch exakt:

$$c_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_v \quad \text{und} \quad c_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_p$$

V. 2. UND 3. HAUPTSATZ

1. Zweiter Hauptsatz

Der erste Hauptsatz war eine Erweiterung des mechanischen Energieerhaltungssatzes auf die Wärmelehre.

Wir sahen beim Carnot'schen Kreisprozeß, daß immer Wärme ungenutzt vom wärmeren zum kälteren Wärmebad übergeht. Man erhält einen großen Wirkungsgrad, wenn man diesen Wärmeanteil möglichst klein macht. Verschwindend kann dieser Anteil nie. Man kann nicht Wärme vollständig in Arbeit umwandeln.

Zunächst will ich hier die Definitionen des zweiten Hauptsatzes niederschreiben. Man kann den zweiten Hauptsatz verschieden formulieren. Eine Aussage kristallisiert sich aus allen Formulierungen heraus: Man kann nicht Wärme vollständig in Arbeit umwandeln.

Man kann es auch anders sagen: es gibt keine Maschine, die nichts anderes tut, als Wärme vollständig in Arbeit zu verwandeln (so etwas wäre ein Perpetuum mobile, 2. Art).

Man kann ebensogut sagen: es gibt keine periodische Maschine, deren Wirkungsgrad gleich 1 ist.

Oder: Die Entropie kann in einem abgeschlossenen System nie abnehmen.

Insgesamt betrachtet können wir sagen :

Der zweite Hauptsatz macht eine Aussage über die Richtung des Wärme­flusses :

Wärme fließt nicht ohne äußere Arbeit vom kälteren zum wärmeren Ort, sondern stets umgekehrt.

Wärme kann nicht vollständig in Arbeit umgewandelt werden.

Durch einen Blick auf unsere Übersicht der Zustandsänderungen können wir sehen, daß der erste Hauptsatz bei der Isothermen­änderung die innere Energie nicht mehr enthält. Dort ist also Wärme vollständig in Arbeit umwandelbar ?! Wie ist das nun mit dem zweiten Hauptsatz in Einklang zu bringen ?

Nun auf einer Isothermen kann Wärmemenge bei Ausdehnung schon restlos in Arbeit verwandelt werden. Dies ist in zwei Schritten beim Carnot-Prozeß ja auch der Fall. Aber eine solche Maschine, die nur auf Isothermen verläuft kann nicht periodisch sein. Und das bedeutet : Wenn wir vom Punkt 1 auf einer Isothermen zum Punkt 2 auf dieser Isothermen gehen, indem wir das Gas ausdehnen, wird Arbeit frei. Aber genau diese Arbeit müssen wir beim umgekehrten Vorgang wieder hineinstecken, um zum Punkt 1 zurückzukommen. Wir haben also gar nichts gewonnen. Arbeit können wir höchstens in einem Kreisprozeß gewinnen; der kann aber nicht nur aus Isothermen bestehen, da diese parallel verlaufen.

2. Dritter Hauptsatz

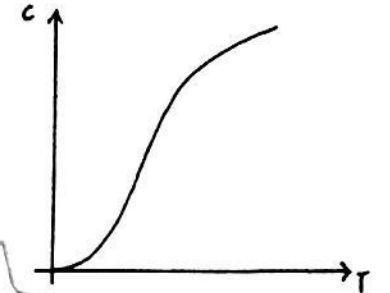
Man hat beobachtet, daß die Wärmekapazität mit sinkender Temperatur kleiner wird. Da man heute Temperaturen bis unterhalb von Millikelvin erreichen kann, kann man feststellen, daß aller Wahrscheinlichkeit nach für $T \rightarrow 0$ auch die Wärmekapazität $c \rightarrow 0$ geht. Was heißt das aber $\rightarrow c = 0$. Das heißt: ein Stoff hat keinen Wärmehalt mehr. Wenn ein Stoff aber nicht seine Wärme restlos in Arbeit verwandelt (was der zweite Hauptsatz fordert), dann kann er nicht all seine Wärme verlieren. -227-

Somit kann die Wärmekapazität nie Null werden.

Könnte der absolute Nullpunkt erreicht werden, so gäbe es auch Wirkungsgrade von 1, da die Temperatur T_2 null werden könnte.

Wenn man sich einmal die Kurve der Wärmekapazität in Abhängigkeit der Temperatur ansieht, so sieht man, daß nicht nur $c \rightarrow 0$ strebt, wenn T abnimmt, sondern auch die Tangente an die Kurve $\frac{dc}{dT} \rightarrow 0$.

Man kann der Temperatur $T = 0$ K beliebig nahe kommen, aber man kann sie nie erreichen. Dies ist die Aussage des dritten Hauptsatzes



3. Freie Energie und Enthalpie

Der zweite Hauptsatz und der Entropiebegriff gestatten es, die Energie darzustellen, die ein System tatsächlich abzugeben in der Lage ist. Man nennt sie die freie Energie. Sie ist definiert als

$$F = U - T S$$

Genauso kann man eine Größe definieren, die die Enthalpie darstellt, die ein System tatsächlich abgeben kann. Diese Größe nennt man freie Enthalpie :

$$G = H - T S$$

Der Anteil $T \cdot S$ stellt dar, welche Energie im System selbst verbraucht wird, wenn es bei der betrachteten Umsetzung seinen Zustand ändert.

Somit ist klar, daß F und G die Größen der Energie und der Enthalpie sind, die tatsächlich frei werden können, denn sie sind eben um $T \cdot S$ vermindert.

VI. THERMODYNAMISCHE EIGENSCHAFTEN VON MATERIE

1. Thermische Ausdehnung

Erwärmt man einen Körper so dehnt er sich aus. Warum? Durch die Erwärmung gibt man ihm Energie, die in Form kinetischer Energie als Wärmebewegung gespeichert wird. Je größer die thermische Bewegung der einzelnen Moleküle wird, desto stärker schwingen sie um ihre Ruhelage (beim Festkörper) und desto größer werden ihre Amplituden. Daher vergrößert sich das Kristallgitter. Der Körper dehnt sich aus.

Man kann jetzt eine einfache Beziehung zwischen Länge (bzw. Volumen) vor und nach der Erwärmung aufstellen. Als Temperatur gibt man die Temperatur in Celsius an, auf den der Körper (oder die Flüssigkeit) erwärmt wurde. l_0 oder auch V_0 ist die Länge, bzw. das Volumen bei 0°C .

|| Längenausdehnung $l(t) = l_0 (1 + \alpha t)$ ||

α nennt man den linearen Ausdehnungskoeffizienten (Einheit $\frac{1}{\text{Grad}}$). Einige Beispiele zu sehen in untenstehender Tabelle.

|| Volumenausdehnung $V(t) = V_0 (1 + \beta t)$ ||
 β ist der kubische Ausdehnungskoeffizient.

Näherungsweise gilt $\beta \approx 3\alpha$.

Tabelle

Festkörper	(in $10^{-6} \frac{1}{\text{Grad}}$)	Flüssigkeiten und Gase	(in $10^{-5} \frac{1}{\text{Grad}}$)
Stahl	10	Benzin	106
Kupfer	16,8	H ₂ SO ₄	57
Magnesium	26	Terpentinöl	97
NaCl	40	Wasser	20,7
Harz	212	Helium	366
Polyamid	100 - 140	Luft	367
PVC	150 - 200	Sauerstoff	367
Porzellan	3 - 4	Wasserstoff	366
Silber	19,7	Wasserdampf	394

2. Wärmetransport

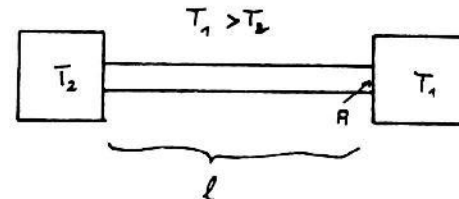
Wärmetransport kann in drei verschiedenen Arten erfolgen. Durch Wärmeleitung, Konvektion oder Wärmestrahlung

a) Wärmeleitung

Wärmeleitung erfolgt nur in Materie. Sie setzt ein Temperaturgefälle voraus. Es wird Energie durch einen Stoff geleitet, indem die thermische Molekularbewegung von Molekül zu Molekül durch Stöße weitergegeben wird. Es wird keine Materie transportiert.

Wärmeleitung gibt es nur vom heißen zum kälteren Bereich. Der Vorgang der Wärmeleitung erfolgt irreversibel und daher ist er mit Entropiezunahme verbunden.

Wir lassen Wärme durch einen Stab der Länge l und des Querschnitts A leiten. Auf beide Seiten des Stabes befinden sich irgendwelche Wärmereservoirs mit den Temperaturen T_1 und T_2



T_1 soll größer als T_2 sein. Wenn man lange genug wartet, dann entsteht in diesem Stab ein Temperaturgefälle $\frac{(T_1 - T_2)}{l}$. Die pro Zeit t durch den Querschnitt A hindurchströmende Wärme-

menge (das ist dann Q/t) ist dem Temperaturgefälle und dem Querschnitt A proportional. Der Proportionalitätsfaktor λ gibt uns die Wärmeleitfähigkeit des Materials an, aus dem der Stab besteht. Man nennt λ auch Wärmeleitzahl. Ihre Einheit ist $\frac{\text{J}}{\text{m sec K}}$.

Metalle sind sehr gute Wärmeleiter, wie man aus

Tabellensieht, schlechte Wärmeleiter sind z.B. Luft, Holz, Styropor. Bei den Gasen ist die Wärmeleitfähigkeit vom Druck unabhängig, wenn er nicht unter 10 Pa ($\approx 0,1 \text{ Torr}$) absinkt. Darunter kann die Wärmeleitfähigkeit sehr klein werden, was man bei Isoliergefäßen mit doppelten Wänden und evakuiertem Zwischenraum ausnutzt.

b) Konvektion

In Flüssigkeiten und Gasen finden wir noch einen Wärmetransport, der mit einem Massetransport gekoppelt ist. Durch thermische Ausdehnung werden wärmere Schichten ausgedehnt und ihre Dichte nimmt ab. Daher erhalten sie gegenüber dichteren Schichten einen Auftrieb. Die wärmeren Schichten steigen nach oben. Dadurch sinken die schwereren kälteren Schichten nach unten. Es ergibt sich also eine Wärmebewegung nach oben, die mit Massetransport verbunden ist. Diesen Transport nennen wir Konvektion.

c) Wärmestrahlung

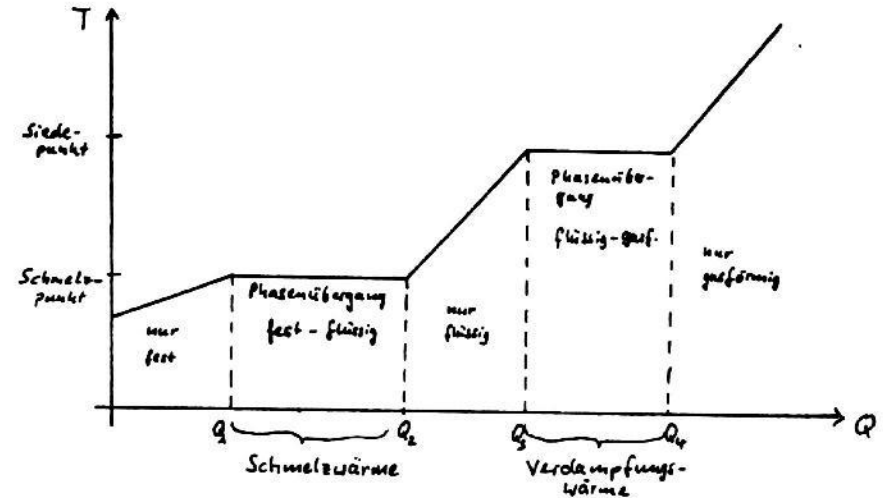
Ein dritter Wärmetransport ergibt sich durch Wärmestrahlung. Alle Körper strahlen Wärme ab und nehmen auch Wärme auf. Diese Abstrahlung erfolgt in Form von elektromagnetischen Wellen. Daher kann Wärme auch durch Vakuum gestrahlt werden - zum Glück - wir würden ganz schön frieren, wenn es keine Wärmestrahlung gäbe ! Wenn ein Körper strahlt (Ofen, Sonne etc.), so ist die Energieabgabe nur von dessen Temperatur, nicht aber von der Umgebungstemperatur abhängig.

3. Phasenübergänge

a) Umwandlungswärmen

Durch Wärmezufuhr an einem Festkörper, kann man seinen Aggregatzustand ändern. Er wird flüssig. Führt man noch mehr Wärme zu, so wird er schließlich gasförmig. Die Aggregatzustände, in denen der Stoff einheitlich ist (fest, flüssig, gasförmig) nennt man Phasen. Wir nehmen uns nun einen Festkörper und erwärmen ihn. Wir führen ihm also kontinuierlich Wärmeenergie zu. Dabei messen wir dauernd die Temperatur. Wir zeichnen dies in einem Q-T-Diagramm auf.

Wir beginnen bei einer bestimmten Temperatur und von dort ab erwärmen wir.



Bei einer bestimmten Wärmemenge Q_1 beginnt das Material flüssig zu werden. Die Temperatur an dieser Stelle (Schmelzpunkt) bleibt nun solange konstant, bis alles Material flüssig geworden ist. Das ist bei Q_2 der Fall. Die Differenz zwischen Q_2 und Q_1 nennen wir Schmelzwärme. Das ist die Energie, die man braucht, um eine Festkörperstruktur zu zerstören. Denn man muß gegen die Bindungskräfte im Festkörper Arbeit aufwenden, um die festgebundenen Moleküle voneinander zu trennen. Erwärmen wir nun weiter, steigt auch die Temperatur unserer Flüssigkeit linear an. Bis zum Punkt Q_3 . Dort herrscht die Temperatur, die wir Siedepunkt nennen. Dort beginnt die Flüssigkeit ihr Volumen zu vergrößern und gasförmig zu werden. Bei Q_4 ist alle Flüssigkeit verdampft, von dort ab steigt die Temperatur wieder weiter. Die Differenz zwischen Q_3 und Q_4 nennen wir Verdampfungswärme. Dort werden (ziemlich kleine) Bindungskräfte überwunden, aber sehr viel Energie wird verbraucht, um das Volumen zu vergrößern. Diese Energie muß ziemlich groß sein, wenn man bedenkt, daß der Wasserdampf im Gegensatz zur gleichen Masse flüssigen Wassers das 1300fache Volumen einnimmt.

Es gibt noch eine Umwandlungsform, die hier nicht berücksichtigt ist. Es handelt sich dabei um die Sublimation. Das ist die direkte Umwandlung vom festen in den gasförmigen Zustand. Die dazu nötige Energie ist die Sublimationswärme. Die drei genannten Umwandlungswärmen nennt man auch latente Wärmen.

Als Beispiel seien die vom Wasser genannt. Es handelt sich dabei um die spezifischen Umwandlungswärmen (also auf die pro Masseneinheit)

Phasenübergang	latente Wärme	Wert
fest-flüssig	Schmelzwärme	$3,35 \cdot 10^5$
fest-gasförmig	Sublimationswärme (bei 0°C)	$\approx 28 \cdot 10^5$
flüssig-gasförmig	Verdampfungswärme	$22,6 \cdot 10^5$

In erster Näherung ist die Sublimationswärme die Summe aus Schmelz- und Verdampfungswärme. Dies ist auch einsichtig, da die Sublimation sozusagen eine Überlagerung von Schmelzen und Verdampfen (bzw. Sieden) ist.

Laufen wir die Kurve rückwärts, so werden bei den betreffenden Umwandlungen (kondensieren und erstarren) die hineinsteckten Energien wieder frei.

b) Lösungswärme

Löst man einen festen Stoff in einer Flüssigkeit, beispielsweise Kochsalz in Wasser, so werden die festen Gitterstrukturen an der Phasengrenzfläche (fest-flüssig) aufgebrochen und der ursprünglich feste Stoff liegt in molekularer Form vor. Durch die Wärmebewegung werden die einzelnen Moleküle verteilt.

Ist zum Lösen Arbeit gegen die Kohäsionskräfte auszuüben, so wird die Energie aus dem Lösungsmittel (der Flüssigkeit) entnommen, die sich dabei abkühlt. Andererseits kann es passieren, daß das Lösungsmittel bei Lösung sich erwärmt. Dann gibt es eben zwischen gelöstem Stoff und Molekülen des Lösungsmittels starke Wechselwirkungen und es wird mehr Energie frei, als bei der Lösung gebraucht wurde. Die Energie, die zum Lösen eines Stoffes gebraucht wird, nennt man Lösungswärme, bzw. spezifische Lösungswärme, wenn sie auf eine Masseneinheit bezogen wird.

c) Reaktionswärme

Bei chemischen Reaktionen werden Bindungskräfte geändert. Bei den Ausgangsprodukten werden diese Bindungen aufgehoben und bei den Endprodukten neu gebildet. Die Bindungsenergien können bei den einen oder bei den anderen stärker sein. Entsprechend wird bei der Reaktion Energie mit der Umgebung ausgetauscht. Und zwar je nachdem - wenn die Reaktion mehr Energie erfordert, als frei wird, so nennt man eine solche endotherm, wird mehr Energie frei, heißt die Reaktion exotherm. Dies daher, da der Energieaustausch meist in Form von Wärme erfolgt. Diese ausgetauschte Wärme bezeichnet man als Bildungswärme oder Wärmetönung. Diese kann positiv oder negativ sein, je nachdem, ob es sich um einen exo- oder einen endothermen Vorgang handelt.

d) Koexistenzen

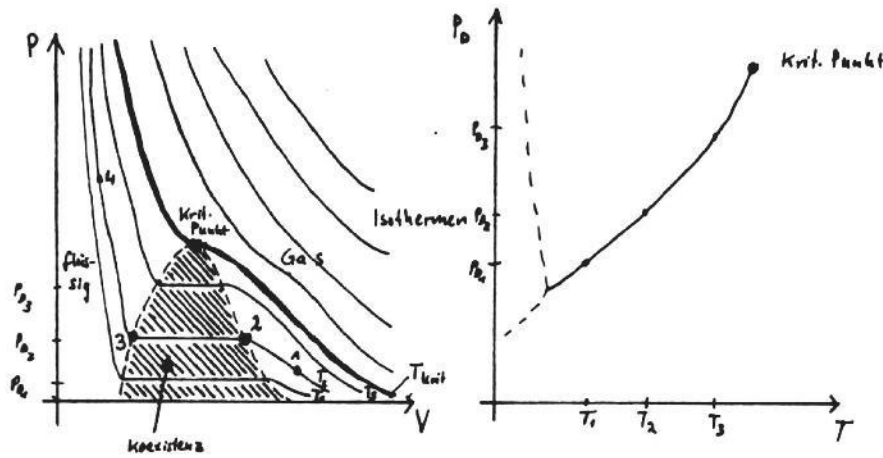
Vorhin haben wir von fester, flüssiger und gasförmiger Phase gesprochen. Und von Bereichen, in denen z.B. feste und flüssige Phase gemeinsam vorkamen. Man bezeichnet dieses Phänomen als Koexistenz. Dort können mehrere Phasen des gleichen Stoffes gemeinsam vorkommen. Wir werden sehen, daß dies etwas normales ist und daß unter Normalbedingungen mehrere Koexistenzen auftreten können.

α) Flüssigkeit - Dampf

Bringt man in ein vorher evakuiertes Gefäß eine Flüssigkeit, die dieses Gefäß nicht ganz ausfüllt, so verdampft ein Teil der Flüssigkeit und der Dampf sammelt sich oberhalb der Flüssigkeit unter einem bestimmten Druck (dem Dampfdruck).

Wenn wir nun das Volumen bei konstanter Temperatur verkleinern oder vergrößern, so bleibt der Dampfdruck über einem gewissen Bereich konstant (siehe Skizze, zwischen Punkten 2 und 3). Dort liegen beide Phasen gleichzeitig vor, und je nach Volumen verdampft ein bestimmter Teil, sodaß der Dampfdruck

konstant bleibt. Wir sehen uns diese Kurve genauer an :



Als Beispiel wählen wir CO_2 . Man komprimiert CO_2 bei Zimmertemperatur. Im Punkt 2 beginnt es flüssig zu werden, der Dampfdruck bleibt von da ab konstant. Erst wenn alles Gas flüssig ist (bei 3) steigt der Druck bei weiterer Kompression stark an - klar, wir haben jetzt eine Flüssigkeit vorliegen, die viel weniger kompressibel ist. Die Strecke auf denen der Dampfdruck konstant bleibt, ist temperaturabhängig.

Trägt man den Dampfdruck über der Temperatur auf, so stellt man fest, daß dieser zunimmt. Dies deshalb, da durch höhere Temperatur viel mehr Moleküle eine so hohe Energie bekommen, daß sie die Austrittsarbeit aus dem Flüssigkeitsverband überwinden und austreten (somit verdampfen) können.

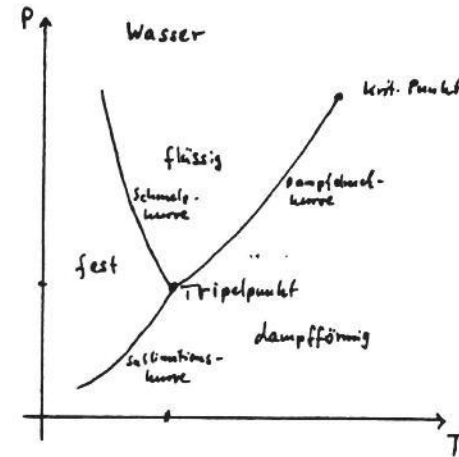
Nur auf dieser Dampfdruckkurve können Dampf und Flüssigkeit gleichzeitig koexistieren. Oberhalb der Kurve ist der Stoff flüssig, unterhalb gasförmig. Nur bis zu einer kritischen Temperatur ist eine solche Koexistenz möglich. Darüber hinaus gibt es keine Koexistenz, dort ist alles gasförmig. Die Dampfdruckkurve endet dort.

β) Festkörper - Flüssigkeit

Bei einer bestimmten Temperatur gehen alle festen Körper in die flüssige Phase über. Nur bei dieser Temperatur können beide Phasen koexistieren. Wir können in unser Bild der Dampfdruckkurve nun noch die Schmelzpunktcurve eintragen.

γ) drei Phasen

Dann erhalten wir folgendes Bild :



Nun gibt es noch eine dritte Linie, die uns die Koexistenz von festem und gasförmigem Zustand zeigt. Diese Sublimationskurve hat stets eine positive Steigung und geht durch den Schnittpunkt der beiden anderen Kurven. Dieser Punkt, den man auch Tripelpunkt nennt, gibt an, bei welchem Druck und bei welcher Temperatur alle drei Phasen gleichzeitig auftreten können.

Koordinaten des Tripelpunktes bei CO_2 : $p = 3,75 \cdot 10^3$ Torr , $T = - 56^\circ\text{C}$, Tripelpunkt für H_2O : $p = 4,6$ Torr, $T = 0,0075^\circ\text{C}$.

Die drei Zweige des p-T-Diagramms trennen drei Bereiche voneinander, in denen die Substanz nur fest, flüssig oder gasförmig sein kann. Nur auf den Kurven ist Koexistenz möglich.

δ) Verdampfung

Wir sprachen von Verdampfen, von Schmelzen usw. Wovon hängen nun die Schmelz- und die Verdampfungswärmen ab ? Wir suchen uns eine Beziehung dafür. Betrachten wir zunächst den Verdampfungsvorgang : gegen die molekularen Anziehungskräfte wird Arbeit verrichtet. Makroskopisch wird Wärme verbraucht.

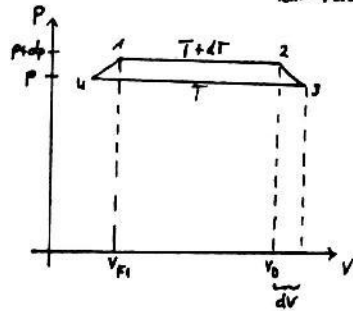
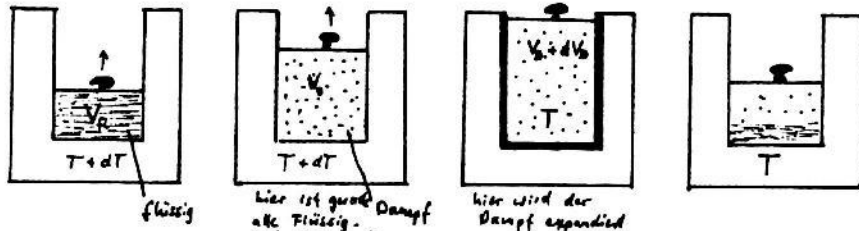
$$\text{spezifische Verdampfungswärme} = \Delta H_{\text{verd}}$$

$$\Delta H_{\text{verd}} = \frac{\text{zugeführte Wärme}}{\text{Masse der verdampften Flüssigkeit}}$$

Wovon hängt diese Größe nun ab ? Zunächst von der Verdampfungstemperatur, außerdem von den Volumina V_{fl} und V_D (Volumen des flüssigen, bzw. dampfförmigen Stoffes). Von was noch ? Wir suchen die Arbeit, die zum Verdampfen verbraucht wird. Also

verdampfen wir.

Wir nehmen einen Zylinder, in dem eine Flüssigkeit verdampft. Die Volumina sind verschieden. Wir führen diesen Prozeß so durch, daß wir einen Kreisprozeß haben, bei dem wir die verbrauchte Gesamtarbeit ermitteln können.



Welche Arbeiten werden nun geleistet?
Wir gehen wieder Schritt für Schritt vor.

1 → 2 : Isotherme Verdampfung durch Expansion :

$$-W = \int_{V_{f1}}^{V_D} p \, dV = \int_{V_{f1}}^{V_D} (p + dp) \, dV = (p + dp)(V_D - V_{f1})$$

2 → 3 : Adiabatische Expansion : (Abkühlung von $T + dT \rightarrow T$)
 V_D wird um dV vergrößert.

3 → 4 : Isotherme Kompression (Verflüssigung), $V_D + dV$ wird bis auf V_{f1} verkleinert.

4 → 1 : die Flüssigkeit wird weiter komprimiert und erwärmt sich von $T \rightarrow T + dT$

$\Delta W_2 = p(V_D - V_{f1})$ Falls dT sehr klein ist gilt
 (3→4) $V_D(3) \approx V_D(2)$ und $V_{f1}(1) \approx V_{f1}(4)$.

Die Arbeiten von 2→3 und von 4→1 sind zu vernachlässigen. Also ergibt sich

$$-\Delta W_{\text{ges}} = -\Delta W_1 + (-\Delta W_2) = (p + dp)(V_D - V_{f1}) - p(V_D - V_{f1}) = dp(V_D - V_{f1})$$

also ergibt sich für den Wirkungsgrad :

$$\eta = \frac{-\Delta W}{Q_1} = \frac{dp(V_D - V_{f1})}{H_{\text{verd}}} = \frac{dp V_D - dp V_{f1}}{H_{\text{verd}}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{nach Carnot}$$

$$\eta = \frac{(T + dT) - T}{T + dT} = \frac{dT}{T + dT} \quad \text{und da } T + dT \approx T \text{ ergibt sich}$$

$$\eta = \frac{dp(V_D - V_{f1})}{H_{\text{verd}}} = \frac{dT}{T} \quad \text{oder}$$

$$H_{\text{verd}} = T \frac{dp}{dT} (V_D - V_{f1})$$

Dieses ist die Clausius - Clapeyron'sche Gleichung.

Um eine Flüssigkeit mit dem Volumen V_D zu verdampfen (sie erhält dann das Volumen V_{f1}) muß man ihr die Wärmemenge

$$Q = H_{\text{verd}} \cdot m \quad \text{zuführen (} m = \text{Masse)}$$

Ganz analoges gilt auch für den Schmelzvorgang. Dort sieht die Clausius-Clapeyron'sche Gleichung so aus :

$$H_{\text{schmelz}} = T \frac{dp}{dT} (V_{f1} - V_{\text{fest}})$$

Hieran sieht man sofort, daß man die Schmelztemperatur durch Druckänderung beeinflussen kann. Nur so ist die Funktion von Schlittschuhen auf dem Eis verständlich : durch den hohen Druck der Kufen auf das Eis, schmilzt dieses und der Schlittschuh gleitet auf einem Wasserpolster .

ε) Reales Gas

Diese ganzen Phasenübergänge, die wir hier in diesem Kapitel besprechen, sind natürlich nicht mit idealen Gasen zu machen. Solche kann man nämlich nicht verflüssigen. Und wenn wir, wie vorhin CO_2 komprimieren, so ist das natürlich kein ideales Gas. Es handelt sich um ein reales Gas.

Wir werden jetzt von der Gleichung der idealen Gase ausgehend die Vereinfachungen, die wir dort gemacht haben, rückgängig machen und zu einer Zustandsgleichung gelangen, die man Gleichung der realen Gase oder Van der Waals'sche Zustandsgleichung nennt.

Ideale Gase : $pV = nRT$

Im Realen Gas wird das Volumen etwas verkleinert, da jedes Molekül ein Eigenvolumen hat, was vom freien Volumen abzuziehen ist. Wir machen das so : wir nennen die Größe b Kovolumen.

Wir ersetzen das V des idealen Gases durch

$$V \rightarrow V - b$$

Was machen wir mit den Wechselwirkungen ?

Durch die gegenseitige Anziehung erhalten wir eine Vergrößerung des Drucks. Zu unserem Druck p kommt noch ein sogenannter Binnendruck hinzu. Dieser ist $\frac{a}{V^2}$ also

$$p \rightarrow p + \frac{a}{V^2}$$

somit sieht unsere Zustandsgleichung der realen Gase wie folgt aus :

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = n R T$$

e) Joule - Thomson - Effekt

Diesen Effekt will ich hier nur ganz kurz ansprechen, weil er große praktische Bedeutung hat.

Wenn wir ein Gas adiabatisch entspannen (man entspannt es dazu über eine Drossel oder eine Düse, damit es ganz langsam geht) so sinkt die Temperatur ab. Dieses Prinzip wird im Kühlschrank verwendet, und jeder kennt den Effekt, wenn er eine Sprayflasche bedient, die sich abkühlt, wenn Gas ausströmt.

Noch kurz zur Erklärung :

Der erste Hauptsatz sagt $\Delta Q = \Delta U + p \Delta V$.

Der Vorgang soll adiabatisch sein, d.h. $\Delta Q = 0$ oder

$\Delta U = - p \Delta V$. Entspannen wir das Gas, heißt das, wir vergrößern das Volumen. Bleibt p konstant, so heißt das, daß ΔU abnehmen muß.

Was bedeutet aber Verringerung der inneren Energie ? Das bedeutet einfach eine Senkung der Temperatur, also Abkühlung.

f) Fixpunktverschiebungen

Wenn man Salz in Wasser löst, dann ist die Wechselwirkung zwischen gelösten Salz-Ionen und Wassermolekülen größer, als zwischen Wassermolekülen untereinander. Man muß dann größere

Arbeit aufwenden, um Wassermoleküle aus dem Verband zu entfernen. Das bedeutet aber, daß weniger Moleküle verdampfen. Wir haben dann bei gleicher Temperatur eine Dampfdruckerniedrigung des Lösungsmittels. Sie ist proportional zur Konzentration des gelösten Stoffes.

Eine Flüssigkeit siedet dann, wenn ihr Dampfdruck gleich dem äußeren Luftdruck ist (weshalb Wasser in den Bergen früher siedet, da der Luftdruck dort kleiner ist). Hier ist der Dampfdruck aber heruntersgesetzt, da es sich um ein Lösungsmittel mit gelöster Substanz handelt. Was geschieht also ?

Der Siedepunkt ist nach oben gerutscht. Das Wasser, in dem das Salz gelöst ist siedet bei höheren Temperaturen, als wenn es in reiner Form vorliegt.

Diesen Effekt nennt man einfach Siedepunktserhöhung.

Auch der Gefrierpunkt hat sich verschoben. Er ist niedriger. (Gefrierpunktserniedrigung) Wir stellen es uns so vor. Die gelösten Moleküle stellen so etwas wie Verunreinigungen, wie Fremdkörper dar. Sie behindern die regelmäßige Ausbildung eines Kristallgitters, das sich ja beim Erstarren aufbaut.

Praktisch verwenden wir die Gefrierpunktserniedrigung, wenn wir im Winter die Straßen streuen. Durch das gelöste Salz liegt die Erstarrungstemperatur unter der Außentemperatur, und in den Bereichen, wo konzentrierte Salzlösungen auf der Straße sind, taut der fallende Schnee sofort weg.

H. ATOMPHYSIK

1. Photonen

Licht !

Darüber haben wir schon gesprochen. Das Licht aber, genau genommen die elektromagnetische Wellenausbreitung ist aber viel komplexer. Bisher betrachteten wir solches auch als Welle. Klar. Dazu nun ein verblüffendes Experiment, den sogenannten "Photoeffekt".

Wir nehmen eine negativ aufgeladene Platte und bestrahlen sie mit ultraviolettem Licht. Danach messen wir die Ladung auf ihr und beobachten den Zusammenhang zwischen Ladungsänderung und Einstrahlung des ultravioletten Lichts :

1. Beim Lichteinstrahlen nimmt die negative Ladung ab.
Das bedeutet : das Licht "schlägt" gewissermaßen Elektronen aus dem Metallverband der Platte heraus.
2. Dieser Effekt tritt erst oberhalb einer bestimmten Lichtfrequenz auf. Diese Grenzfrequenz ist abhängig vom Plattenmaterial.
3. Die ausgeschlagenen Elektronen haben natürlich eine kinetische Energie (sie fliegen ja mit irgendeiner Geschwindigkeit von der Platte weg). Diese kann man messen. Man erkennt, daß die kinetische Energie der Elektronen abhängig von der Einstrahlungsfrequenz ν ist.
4. Ändert man die Intensität des Lichtes (also die Helligkeit), so ändert sich nicht die kinetische Energie der ausgeschlagenen Elektronen, sondern lediglich ihre Zahl. Bei höherer Lichtintensität werden mehr Elektronen ausgeschlagen.
5. Es gibt beim Photoeffekt keinen "Auslöseverzögerung". Das heißt : direkt nach dem Einstrahlen werden Elektronen frei. Der Effekt tritt mindestens innerhalb von 10^{-9} sec ein.

Einstein erkannte : beim Licht verteilt sich die Energie nicht kontinuierlich über die durch den Raum sich

ausbreitende Welle, sondern sie wird lokal in sogenannten "Korpuskeln" konzentriert. Diese Korpuskeln fliegen im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit c . Man nennt sie auch Lichtquanten oder "Photonen". Mit diesem Korpuskelbild können wir den Photoeffekt verstehen, der mit dem Wellenbild des Lichtes nicht zu erklären ist.

Annahme: die Photonen schlagen - ähnlich wie kleine Geschosse - Elektronen aus der aufgeladenen Platte. Sie übertragen dabei ihre Energie auf die Elektronen:

$$\text{Photonenenergie} = W_A + \frac{1}{2} m_e \cdot v^2$$

Das heißt : die Energie eines Photons wird verwendet, um ein Elektron aus der Platte zu schlagen. Dabei muß zunächst die Auslösearbeit W_A überwunden werden (denn jedes Elektron ist an seinen Metallverband mit einer bestimmten, materialcharakteristischen Energie gebunden). Zudem erhält das Elektron noch von der übrigbleibenden Photonenenergie einen kinetischen Anteil $\frac{1}{2} m_e v^2$, woraus sich seine Geschwindigkeit v ergibt. Das erklärt schon einmal die Punkte 1. und 5.

Frage : ab welcher Photonenenergie werden Elektronen ausgelöst ?

Falls $E_{\text{Photon}} < W_A$	wird nichts ausgelöst
" $E_{\text{Photon}} = W_A$	beginnt gerade der Auslösevorgang. $E_{\text{kin}} = 0$
" $E_{\text{Photon}} > W_A$	Auslösung und Elektronen erhalten kinetische Energie.

Das heißt : ab einer gewissen Grenzfrequenz beginnt der Effekt. Diese Grenzfrequenz hängt direkt mit W_A zusammen. Das erklärt Punkt 2. Auch der Punkt 3. wird klar : die kinetische Energie hängt von der Frequenz des eingestrahlteten Lichtes ab :

$E_{\text{Photon}} = \text{Funktion}(\nu)$ und zwar hängt E_{Photon} linear von ν ab : $E_{\text{Photon}} \sim \nu$ bzw. $E_{\text{Photon}} = h \cdot \nu$

Dabei ist h das sogenannte "Planck'sche Wirkungsquantum"

$h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ J sec}$
$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J sec.}$

oft verwendet man auch $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Also - jedes Photon hat die Energie $E = h \cdot \nu$ und da nur ganze, keine halben Photonen auftreten können, tritt die Lichtenergie nur portionsweise (diskret, oder "gequantelt") auf.

Genau können wir jetzt schreiben :

$$h \cdot \nu = W_A + \frac{1}{2} m_e \cdot v^2$$

Jetzt noch zu Punkt 4. : Größere Intensität bedeutet eine Vergrößerung der Photonenzahl also $n \cdot h \nu$. Jedes Photon schlägt ein Elektron aus. Mehr Photonen, größere Elektronenausbeute. Die sogenannte "Austrittsarbeit" W_A liegt ungefähr zwischen 2 und 6 Elektronenvolt (eV), je nach Material.

Was ist jetzt das - eV ? Dies wurde schon in Kap. E. VI. 1. (S. 177) erörtert. Dort wurde übrigens auch schon der Photoeffekt besprochen.

Aber noch einmal : die Energie, um ein Elektron (der Ladung $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C) in einem elektrischen Feld der Potentialdifferenz 1 V zu beschleunigen, nennt man 1 Elektronenvolt (eV).

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} [\text{C}] \cdot 1 [\text{V}] = 1.602 \cdot 10^{-19} [\text{C} \cdot \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = \text{J}]$$

also $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} [\text{J}]$ und $1 \text{ J} = 6.24 \cdot 10^{18} [\text{eV}]$.

Wir haben gesehen :

Photonen "schlagen" Elektronen aus dem Metallverband aus. Das heißt wir stellen uns die Photonen wie kleine Kügelchen vor, die einen Impuls - somit auch eine Masse - haben. Nach Einsteins Relativitätstheorie hat jede Masse eine Energie : $E = m \cdot c^2$, sodaß für ein Photon gilt $h \nu = m \cdot c^2$

oder $m_{\text{Photon}} = \frac{h \nu}{c^2}$ somit gilt für ihren Impuls :

$$p = \text{Masse} \cdot \text{Geschwindigkeit} = m \cdot c = \frac{h \nu}{c^2} \cdot c \Rightarrow p = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

2. Dualismus Welle - Korpuskel

So - verblüffend ist das schon : um Experimente zu erklären muß man einmal das Wellenbild (Interferenz, Beugung) ein andermal das Teilchenbild (Photoeffekt) verwenden. Was ist das Licht denn nun ? Teilchen oder Welle ?

Nun es ist beides. Wir wählen immer das brauchbarste Bild !

Nun - das ist aber komisch. Wo bleibt die Exaktheit der Naturwissenschaften ? Nun ja ein Welle-Teilchen-Dualismus muß ja nicht unmöglich sein, nur weil wir ihn nicht begreifen !

Betrachten wir uns die Sache noch etwas genauer :

Es besteht natürlich eine Beziehung zwischen beiden Bildern :

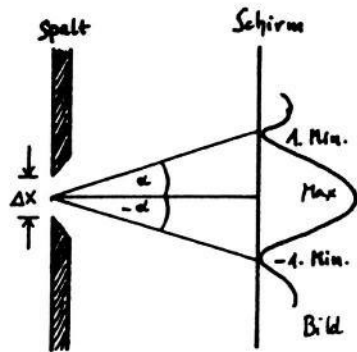
Die Wellengrößen (λ, ν) sind mit korpuskularen Größen (E, p) über das Planck'sche Wirkungsquantum verknüpft. Daraus ersieht man auch die hervorragende Rolle dieses h in der gesamten Quantenmechanik, Atomphysik, Molekülphysik (jedem physikalischen Zweig, der sich in atomaren Größenverhältnisse abspielt).

$E = h \cdot \nu$ <p style="text-align: center;"><u>Energie</u> <u>Frequenz</u></p> <p style="text-align: center;">(Teilchen- Wellen- eigenschaft)</p>	$p = \frac{h}{\lambda}$ <p style="text-align: center;"><u>Impuls</u> <u>Wellenlänge</u></p> <p style="text-align: center;">(Teilchen- Wellen- eigenschaft)</p>
--	--

Mittlerweile bewegen wir uns in Bereichen mit sehr kleinen Dimensionen. Dort wird es natürlich sehr schwierig zu experimentieren. Wollen wir zum Beispiel ein einzelnes Elektron "sehen", so beeinflussen wir es so stark, daß es sich anders verhält, als wenn wir es in Ruhe gelassen hätten. Also werden die Eigenschaften von Elektronen, Atomen usw. durch die Versuchsbedingungen eventuell verändert. Dies gilt nicht, wenn wir es mit einer Vielzahl dieser kleinen Teilchen zu tun haben. Wir können mit einem Magneten einen Elektronenstrahl ablenken. Dabei wird jedes einzelne Elektron nur so wenig durch die Beobachtbarkeit gestört (die durch die Wechselwirkung Elektron-Gas ["Leuchtspur"] ermöglicht wird), daß sich an unserem makroskopischen Ergebnis kaum etwas ändert.

Betrachten wir aber den Weg eines einzelnen Elektrons, indem wir z.B. Licht an ihm streuen lassen, um es zu "sehen", so wird das Elektron in seinem Lauf so stark gestört, daß eine experimentelle Aussage nahezu wertlos wird. Wie groß ist nun diese Empfindlichkeit - mithin : wie genau können wir eigentlich experimentieren ?

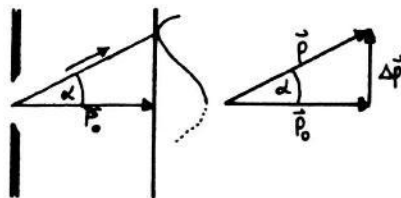
Dazu ein Beispiel : wir betrachten die Beugung am Spalt im Teilchenbild



Spaltbreite sei Δx . Diese wird auf dem Schirm vergrößert dargestellt (sie liegt zwischen den ersten Minima). Wie wir wissen, liegen diese Minima dort wo die Bedingung $\Delta x \sin \alpha = \lambda$ erfüllt ist.

Wir betrachten nun das Licht als Quantenerscheinung. Alle Lichtquanten haben einen Impuls p .

Vor dem Spalt sei der Photonenimpuls \vec{p}_0 . Man weiß nun nicht, wohin sich jedes einzelne Photon bewegt. Jedes bewegt sich mit einem Winkel zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ auf den Schirm zu. Es hat also eine zusätzliche Impulskomponente senkrecht zur Richtung von \vec{p}_0 . Die seitlich abgelenkten Photonen haben somit den Impuls $\vec{p} = \vec{p}_0 + \Delta \vec{p}$. Wie groß



ist nun $\Delta \vec{p}$? Keine Ahnung!

Dieses wissen wir nicht! wir können nur Näherungswerte angeben: $\Delta p = p \cdot \sin \alpha \iff \Delta x \cdot \frac{\Delta p}{p} = \lambda$ und mit $p = h/\lambda$ ergibt sich die Beziehung: $\Delta x \cdot \Delta p = h$ Dies stimmt nicht genau, da Δp auch kleiner als $p \cdot \sin \alpha$ sein kann:

$$\Delta p \leq p \cdot \sin \alpha \iff \sin \alpha \geq \frac{\Delta p}{p} \quad \text{und} \quad \Delta p \cdot \Delta x \geq h.$$

Eine exakte Rechnung würde liefern

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$$

Das heißt in Worten: Das Produkt aus "Ungenauigkeit des Ortes" und "Ungenauigkeit des Impulses" ist größer oder gleich \hbar . Allgemeiner heißt das: man kann Ort und Impuls eines Teilchens nie genau gleichzeitig bestimmen. Dies gilt nicht nur für Photonen, Elektronen usw. es gilt auch für makroskopische Körper. Dabei merken wir das aber garnicht, da die Zahl \hbar sehr klein ist. Ein Beispiel: wir lassen eine kleine Stahlkugel (Radius sei 1 mm) fliegen. Ihren Ort können wir mit einer Genauigkeit von vielleicht 100 nm (Lichtwellenlänge) bestimmen. Dann ergibt sich für die Genauigkeit des Impulses $\Delta p \sim 10^{-27} \text{ Ns}$. Das ist ein so kleiner Impuls, daß wir ihn sowieso nicht messen können.

Man verwendet oft statt "Ungenauigkeit" den Begriff "Unschärfe". Daher ist die Beziehung

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \quad \text{als}$$

Heisenberg'sche Unschärferelation bekannt.

Sie gilt nicht nur für Ort und Impuls in x -Richtung, sondern natürlich auch allgemeiner

$$|\Delta \vec{r}| \cdot |\Delta \vec{p}| \geq \hbar$$

Aber sie gilt auch für andere Paare von Größen, z.B.

$$\Delta p = \frac{h}{c} \cdot \Delta \nu = \frac{\Delta E}{c} \quad \text{und} \quad \Delta x = c \cdot \Delta t \iff \Delta p \cdot \Delta x = \Delta E \cdot \Delta t$$

$$\text{oder} \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

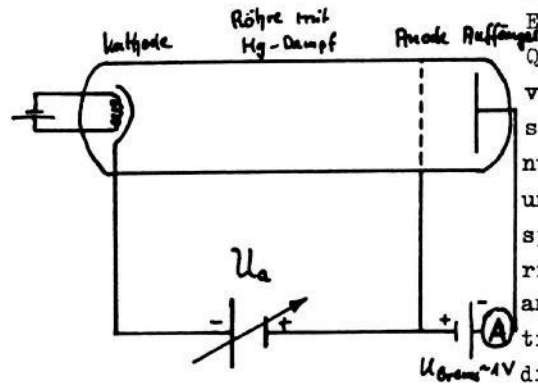
Dazu ein kleines Beispiel, was dem folgenden etwas vorgreift. Ein Elektron in einem Atom hat einen bestimmten Energiezustand (also eine bestimmte Energie). Strahlt man in irgendeiner Form Energie ein, kann das Elektron diese zusätzliche Energie aufnehmen und einen höheren Energiezustand einnehmen. Irgendwann "fällt" es wieder hinunter und emittiert genau diesen Energiebeitrag wieder. So - wir können diese emittierte Energie sehr genau messen (durch spektrale Zerlegung). Das heißt ΔE ist sehr klein. Dann muß Δt sehr groß sein! Was bedeutet das aber? Nun - es bedeutet, daß wir die Zeit nicht genau kennen, wann es wieder herunterspringt, oder wir kennen nicht - oder nur ungenau - die Lebensdauer des "angeregten Zustandes".

Mit diesen angeregten Zuständen - Emission von Licht usw. wollen wir uns nun befassen.

3. Bohr'sches Atommodell

Generationen von Physikern überlegten sich, wie ein Atom aufgebaut sein könnte. Man wußte, daß Elektronen in einem Atom waren, das Atom selbst aber neutral schien. Daher mußten auch positive Ladungen vorhanden sein. Nachdem Rutherford durch Streuexperimente (er ließ α -Teilchen an einer dünnen Goldfolle streuen) erkannte, daß das Atom hauptsächlich aus leerem Raum bestand und alle positive Ladung in einem relativ kleinen

Kern konzentriert war, entwickelte Bohr sein Atommodell, das große Ähnlichkeiten mit dem Planetensystem aufwies : um einen positiven Kern kreisen Elektronen auf verschiedenen Kreisbahnen. Dabei ist der Bahnradius ein Maß für die entsprechende Elektronenenergie. Es ergeben sich so für die Elektronen bestimmte "Energieniveaus". Diese konnten durch den Versuch von Franck und



Hertz nachgewiesen werden. Elektronen werden in einer mit Quecksilberdampf gefüllten Röhre von einer Kathode zur Anode beschleunigt. Dazu wird eine Spannung U_a angelegt. Zwischen Anode und Auffänger besteht eine Bremsspannung (sie ist U_a entgegengerichtet), gegen die die Elektronen anlaufen müssen. Nur solche Elektronen erreichen den Auffänger, die genügend Energie haben, um

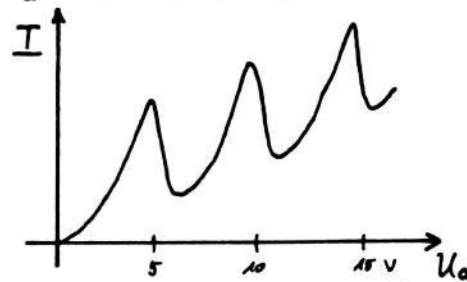
die Bremsspannung zu überwinden. Die Auffängerstromcharakteristik (Auffängerstrom gegen Spannung U_a aufgetragen) zeigt zunächst

einen ansteigenden Strom, der bei einer bestimmten Spannung stark abfällt. Beim Maximum haben die Elektronen soviel Energie, daß sie ein Hg-Atom anregen (das heißt das Elektron in einem Hg-Atom auf ein höheres Energieniveau heben)

können. Bei höherer Beschleunigungsspannung haben die Elektronen dann soviel Energie, daß sie (nachdem sie ein Hg-Atom angeregt und dabei ihre kinetische Energie verloren haben) wieder soviel kinetische Energie gewonnen haben, um ein zweites Hg-Atom anzuregen. Dies kann sogar noch weiter gesteigert werden.

Die Abstände zwischen den Maxima liegen bei 4.9 V. Das heißt, die Anregungsenergie für einen bestimmten Energieübergang im Quecksilberatom liegt bei 4.9 eV. Diese Energie wird dann vom angeregten Hg-Atom also Lichtquant der Energie $h \cdot \nu = 4.9 \text{ eV}$ wieder abgestrahlt (meßbar als UV-Strahlung).

Ergebnis des Versuches : Zumindest beim Quecksilber können die



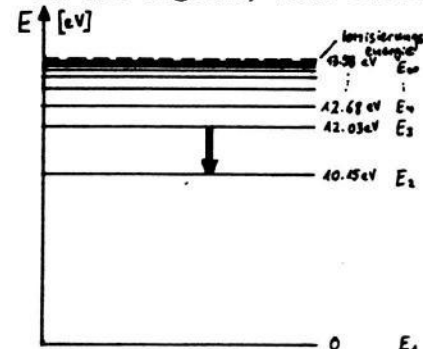
Elektronen nur ganz bestimmte (diskrete) Energiewerte aufnehmen. (Warum soll das nur beim Quecksilber so sein ?!)

Also : Die Elektronen im Atom bewegen sich auf verschiedenen Bahnen. Wenn ein Elektron von einer auf eine andere Bahn springt (dabei also einen Energieübergang von Bahn n nach Bahn m macht, $E_n \rightarrow E_m$), so nimmt es ein Energiequant der Größe $E_m - E_n$ auf, wenn die m-te Bahn über der n-ten liegt, bzw. es emittiert Strahlung der Energie $E_n - E_m$ in Lichtquanten, wenn die m-te Bahn unter der n-ten liegt.

Haben wir ein angeregtes Atom vorliegen (d.h. Elektronen sind auf höheren Bahnen, als in ihrem "Grundzustand" üblich), so fallen sie irgendetwann wieder herunter, z.B. von E_n nach E_m . Das Elektron gibt die Energie $E_n - E_m = h \cdot \nu$ ab. Bei der Vielzahl von Atomen ergibt sich ein kontinuierliches Emittieren von Licht der Frequenz ν . Absorbiert ein Atom Lichtquanten, so dient die Energie $h \cdot \nu$ dazu, ein Elektron in jedem Atom auf eine energetisch um $h \cdot \nu$ höhere Bahn zu bringen.

a) Bohr'sche Postulate

Absorption und Emission von Energie im Atom zwischen E_n und E_m ist nur möglich, wenn ein Energiequant $h \cdot \nu = E_n - E_m$ aufgenommen oder abgegeben wird.



Beispiel : H - Atom
Übergang $h \cdot \nu = E_3 - E_2$

Das H-Atom strahlt mit

$$\nu = \frac{E_3 - E_2}{h} = \frac{(12.03 - 10.15) \text{ eV}}{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J sec}}$$

$$\nu = 2.84 \cdot 10^{33} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{eV} \cdot \text{J}}{\text{J sec} \cdot \text{eV}}$$

$$\nu = 4.54 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \hat{=} 600 \text{ nm}$$

Dies ist eine rote Linie, die man in einem Prismenspektroskop sehr deutlich sehen kann.

Weiter : Auf Kreisbahnen sollen also Elektronen kreisen. Nach der Elektrodynamik müßten diese strahlen, also Energie abgeben. Denn : kreisende Elektronen sind beschleunigte Elektronen (da sich ihre Richtung laufend ändern) und beschleunigte Ladungen bilden ein Magnetfeld. Von der Seite gesehen "schwingen" die Elektronen hin und her, wie in einem Hertz'schen Dipol.

Und dann müßten sie auch, wie wir es im Kap. F. I. gesehen haben, elektromagnetische Wellen abstrahlen. Wenn dem so wäre, würde ein Elektron auf einer bestimmten Bahn Energie verlieren. Dadurch würde es eine kleinere Bahn annehmen usw. Insgesamt gesehen würde das Elektron auf einer Spiralbahn zum Kern hin fliegen. Das bedeutet aber, das Atom könnte nicht lange existieren. Es wäre nicht stabil !

Daher machte Bohr einige Annahmen (Postulate), die er zwar nicht erklären konnte, die sein Atommodell ermöglichen. Warum er so sehr an diesem Modell festhielt hat einen einleuchtenden Grund : es erklärte sehr gut die bekannten Spektren von allen möglichen Elementen und Verbindungen. Also mußte ja etwas dran sein.

Bohr'sche Postulate (oder auch "Quantenbedingungen" :

- ① Auf bestimmten Bahnen kann das Elektron strahlungsfrei kreisen. Die Bahnen sind dort, wo der Drehimpuls $|\vec{L}|$ ein ganzzahliges Vielfaches von \hbar ist.

$$r \cdot m_e \cdot v = n \cdot \hbar \quad (n \in \mathbb{N})$$

- ② Die Emission von Strahlung erfolgt in Form von Lichtquanten bei spontanen Übergängen des Elektrons von einer Bahn höherer auf eine Bahn niedrigerer Energie $h \cdot \nu = E_n - E_m$

Das erste Postulat ist klar (nur wieso diese Bedingung mit dem Drehimpuls ?) Das soll hier kurz erläutert werden.

Es versteht sich von selbst, daß jeder Leser noch in der Lage sein sollte, den Drehimpuls zu definieren. Falls einem der Drehimpuls zu einem böhmischen Dorf geworden sein sollte, so soll er schleunigst zurückblättern Kap. A. II. 7. , S. 52f !!!

Bisher ordneten wir dem Licht zwei verschiedene Eigenschaften (Welle und Teilchen) zu. Gut. Es galten dabei die Beziehungen $E = h \cdot \nu$ und $p = h/\lambda$.

Schauen wir uns nun reine Teilchen an (oder das, was wir dafür halten) : Elektronen, Protonen usw. Sind das wirklich Teilchen, oder sind das vielleicht auch Wellen, vielleicht auch solche Zwitterwesen ? Ordnen wir einmal solch einem Teilchen, z.B. einem Elektron eine Welleneigenschaft zu : wir nehmen die gleiche Be-

ziehung $p = h/\lambda$ bzw. $\lambda = h/p$. Unser Elektron soll also die Wellenlänge $\lambda_B = \frac{h}{p}$ haben.

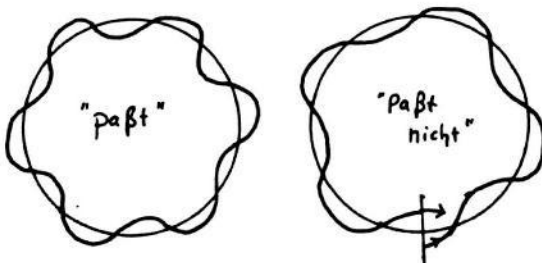
Dies wurde erstmals von Louis de Broglie versucht. Er ordnete auch Materie eine Welleneigenschaft zu : jedes Teilchen ist eine Welle mit der Materiewellenlänge (de-Broglie-Wellenlänge)

$$\lambda_B = h/p. \text{ Für unser Elektron also } \lambda_B = h / m_e v.$$

Wir wissen ja, daß Wellen miteinander interferieren können. Gilt das auch für solche Materiewellen ? Ja - denn macht man Interferenzversuche mit Elektronen, erhält man das gleiche Resultat wie beim Licht. Erstaunlich, was ? Das heißt also, daß Elektron + Elektron nichts ergeben kann ? Ja und nein ! Haben zwei Elektronen in ihren Materiewellen eine bestimmte Phasenbeziehung, so erscheinen sie nicht am Ort, den man ihnen klassisch zuordnen würde, sondern an einem anderen.

Zurück zum Atom : Wenn wir die de-Broglie-Welle des Elektrons als ebene Welle in der Kreisbahnebene auffassen, so kann sich

diese nur dann ausbilden, wenn der Umfang $2\pi r$ ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ_B ist; die Welle muß also in den Kreis "hineinpassen". Ist dies nicht der Fall, so interferiert die Welle bei jedem erneuten Umlauf mit sich selbst. Irgend-



wann ist der Gangunterschied so groß, daß sie sich selbst auslöscht. Das sind dann die Bahnen, auf denen ein ("wellenförmiges") Elektron nicht existent wäre. Daher muß die Bedingung gelten

$$2\pi r = n \cdot \lambda_B \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Mit $\lambda_B = h / m_e v$ ergibt sich $2\pi r = \frac{n \cdot h}{m_e v}$ oder

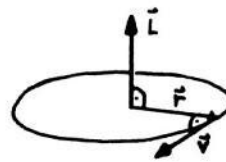
$$r \cdot m_e \cdot v = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n \cdot \hbar$$

Betrachten wir noch kurz den Drehimpuls : $|\vec{L}| = |\vec{r} \times m_e \cdot \vec{v}|$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot m_e \cdot (v \cdot \sin 90^\circ) = r \cdot m_e \cdot v$$

$$\text{Somit wird aus } r \cdot m_e \cdot v = n \cdot \hbar$$

die Bedingung $|\vec{L}| = n \cdot \hbar$, wie Bohr sagt: der Betrag des Drehimpulses



muß ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda = \frac{h}{2\pi} \cdot n$ sein.

Noch kurz zu den Materiewellen : natürlich kreist kein Elektron im Atom auf solch einer Schlangenbahn herum. Dies ist nur ein Denkmodell. Wir können uns nicht vorstellen, wie die Materiewelle eines Teilchens aussehen mag. Bei sehr kleinen Teilchen - wie in atomaren Größenordnungen - macht die Wellennatur der Materie natürlich viel mehr aus, als in der makroskopischen Welt. Denn auch dort kann man der Materie Welleneigenschaften zuordnen. Beispiel : Ein Fußballspieler schießt den Ball ($m = 300g$) mit einer Geschwindigkeit von 20 m/sec weg. Dann ist seine Materiewellenlänge etwa 10^{-34} m , also unvorstellbar klein (um ein Vielfaches kleiner als ein Atomkern) - er bewegt sich also praktisch geradlinig !

b) Bohr'scher Radius

Zurück zum Atommodell. Wir bestimmen den Radius des einfachsten Atoms, des Wasserstoffatoms :

Kreisbahn - dort muß also Zentrifugal- und Zentripetalkraft einander ausgleichen. Zentripetalkraft ist in diesem Falle die Coulombkraft $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$. r ist der Bahnradius. Zentrifugalkraft war ja $m_e v^2/r$. Also Gleichsetzen : $\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$

$$\Rightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2}$$

Hier stecken allerdings nun alle Bahnradien drin, also alle Energien. Nicht nur die erlaubten. Um zu diesen zu kommen, setzen wir noch das erste Bohr'sche Postulat ein :

$$r m_e v = n \cdot \hbar \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{n^2 \cdot \hbar^2}{r^2 m_e^2}, \text{ einsetzen :}$$

$$\Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar^2 \cdot n^2}{e^2 \cdot m_e} \quad \text{oder} \quad r = \frac{\epsilon_0 \cdot \hbar^2 \cdot n^2}{\pi m_e \cdot e^2}$$

Setzen wir die bekannten Konstanten ein :

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Assec}}{\text{Vm}}$$

$$h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Jsec} \quad m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

so ergibt sich ein Radius von $r = 5.3 \cdot 10^{-11} \cdot n^2 \text{ [m]}$

Das heißt : im Grundzustand (also auf der niedrigsten Bahn, $n = 1$) hat das H-Atom einen Radius der Elektronenbahn von $r_0 = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Diesen Radius nennt man auch den Bohr'schen Radius.

c) Energiestufen des Wasserstoffatoms

Nun berechnen wir die Wellenlänge, die eine H-Atom aussenden kann :

Zunächst bestimmen wir das Energieniveau E_n , das zur n -ten Bahn gehört.

$E_n = E_{n,pot} + E_{n,kin}$; E_{pot} = die Arbeit, um ein Elektron vom Unendlichen in einen Abstand r zum pos. Kern zu bringen.

$$E_{n,pot} = \int_{\infty}^r F \cdot dr = \int_{\infty}^r \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad \text{hier } r_0 \text{ eingesetzt :}$$

Coulombkraft

$$E_{n,pot} = -\frac{m_e e^4}{4 \epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

$$E_{n,kin} = \frac{m_e}{2} v^2 ; \text{ vorhin fanden wir } v^2 = \frac{n^2 \cdot \hbar^2}{r^2 m_e^2} = \frac{e^2}{2n \epsilon_0 \hbar} \quad (r_n \text{ eingesetzt})$$

$$E_{n,kin} = \frac{m_e}{2} \cdot \frac{e^4}{4n^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

$$E_n = E_{n,pot} + E_{n,kin} = -\frac{m_e \cdot e^4}{8n^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

Für eine Übergangsenergie $E_{nm} = E_n - E_m$ ergibt sich dann

$$E_{nm} = -\frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = h \cdot \nu = h \frac{c}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 \hbar^3 \cdot c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R_y \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$n > m$ $R_y = \text{Rydberg-Konstante}$

$R_y = 1.097 \cdot 10^7 \frac{1}{m}$. Man kann auch eine Rydberg-Energie definieren, ganz analog

$$E_{nm} = - \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R_{ye} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$R_{ye} = 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13.58 \text{ eV}.$$

Betrachten wir uns noch die Ionisierungsenergie des Wasserstoffs. Wir bestrahlen das Atom mit Licht einer Frequenz, die so groß ist, daß das Atom ionisiert wird, das das Atom also sein Elektron abgibt. Das heißt $n = 1, m = \infty$:

$$E_{nm} = R_{ye} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R_{ye} = 13.58 \text{ eV} .$$

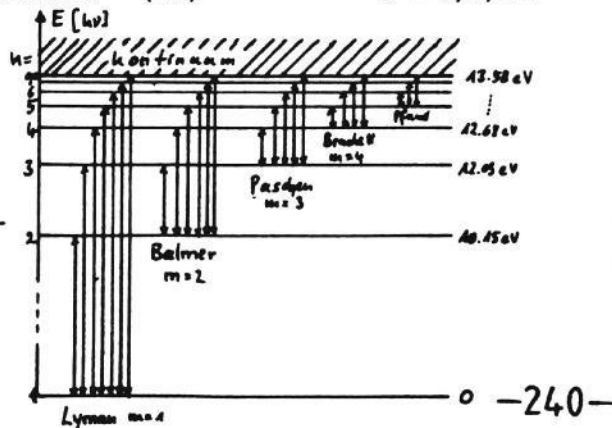
Somit ist die Rydbergenergie gerade die Ionisierungsenergie des Wasserstoffes.

d) Spektralserien des Wasserstoffatoms

Je nach den Energiesprüngen teilt man die H-Atom-Spektrallinien in besondere Gruppen ein

Sprung nach	$m = 1$	Lyman-Serie (UV-Strahlung)	$n = 2, 3, 4, 5..$
	$m = 2$	Balmer-Serie (4 sichtbare Linien, einige im UV)	$n = 3, 4, 5, 6..$
	$m = 3$	Paschen-Serie (IR)	$n = 4, 5, 6..$
	$m = 4$	Brackett-Serie (IR)	$n = 5, 6, 7..$
	$m = 5$	Pfund-Serie (IR)	$n = 6, 7, 8..$

Die Serien sind in nebenstehendem Termschema dargestellt. Wo die Energie größer als die Ionisierungsenergie wird, können die freien (weil ionisierten) Elektronen wieder alle möglichen Energien annehmen. Wir befinden uns in einem Energiekontinuum.



e) Quantenzahlen

Durch vier Quantenzahlen werden die Bahnen der Elektronen vollständig dargestellt :

- Hauptquantenzahl n** : entspricht der Nummer der Bahn
 $n = 1, 2, 3..$ man bezeichnet auch
 $n = 1$ - K - Schale
 $n = 2$ - L - Schale
 $n = 3$ - M - Schale usw.
- Nebenquantenzahl l** : sie gibt die Form der Bahn an (es muß kein Kreis sein, ein Kreis ist nur eine besondere Ellipse). l gibt die Exzentrizität der Ellipse an.
 $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$
entspricht s, p, d, f, ...
- magnetische Quantenzahl m** : kennzeichnet die Lage (Ebene) der Bahn. Sie kann $(2l+1)$ verschiedenen Werte annehmen :
 $m = -l, -(l-1), \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$
- Spinquantenzahl s** sie kennzeichnet den Eigendreh Sinn des Elektrons (den Eigendrehimpuls) der Spin kann zwei Einstellungen annehmen $s = \pm 1/2$

Noch ein Wort zu 2. und 4.: Beides sind Drehimpulsquantenzahlen. Multipliziert mit \hbar ergeben sie direkt den Drehimpuls :

$$2. \quad |\vec{L}| = l \cdot \hbar \rightarrow \text{Bahndrehimpuls des Elektrons auf der Bahn}$$

(exakt gilt $|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$)

$$4. \quad |\vec{S}| = s \cdot \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar \rightarrow \text{Eigendrehimpuls (man betrachtet Elektron als ausgedehnten starren Körper mit einer Eigendrehung)}$$

Dies zeigt wieder die wichtige Bedeutung der Größe h bzw. \hbar als Drehimpuls von Elektronen im Atom.

f) Pauli - Prinzip

Die einzelnen Bahnen (bzw. Schalen) werden nach bestimmten Schema besetzt : 1. Jedes Elektron nimmt einen möglichst niedrigen Energiezustand ein

2. Zwei Elektronen in einem Atom können niemals in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen (Pauli-Prinzip)

Daraus ergibt sich folgendes Besetzungsschema :

Schale	n	l	Bezeichnung (nl)	m	s	Anzahl der	
						Zustände	Elektronen pro Schale
K	1	0	1s	0	$\pm \frac{1}{2}$	2	2
L	2	0	2s	0	$\pm 1/2$	2	8
		1	2p	0 ± 1	$\pm 1/2$ $\pm 1/2$	2 4 } ₆	
M	3	0	3s	0	$\pm 1/2$	2	18
		1	3p	0 ± 1	$\pm 1/2$ $\pm 1/2$	2 4 } ₆	
		2	3d	0 ± 1 ± 2	$\pm 1/2$ $\pm 1/2$ $\pm 1/2$	2 4 4 } ₁₀	
N	4	0	4s	0	$\pm 1/2$	2	32
		1	4p	0 ± 1	$\pm 1/2$ $\pm 1/2$	2 4 } ₆	
		2	4d	0 ± 1 ± 2	$\pm 1/2$ $\pm 1/2$ $\pm 1/2$	2 4 4 } ₁₀	
		3	4f	0 ± 1 ± 2 ± 3	$\pm 1/2$ $\pm 1/2$ $\pm 1/2$ $\pm 1/2$	2 4 4 4 } ₁₄	

Im Periodensystem werden die Elemente ihrer Elektronenkonfiguration nach eingereiht.

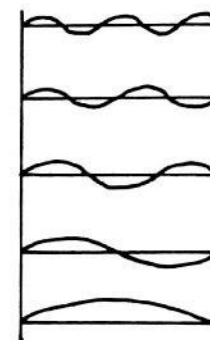
4. Quantenmechanisches Atommodell

Wendet man auf unser Atom-Modell die Heisenberg'sche Unschärferelation an, so werden wir merken, daß die Elektronenbahn keine Ellipsenbahn (im Spezialfall $l = 0$ - keine Kreisbahn) sein kann. Da die Energie des Elektrons genau bekannt ist, ist natürlich auch der Impuls bekannt, da $E = p^2 / 2m$. Der Ort müßte also ganz unscharf sein. Dies trifft für eine bestimmte Bahn aber nicht zu.

Die Quantenmechanik (Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Pauli u.a.) lehrt uns, wie ein Atom aussehen könnte, berücksichtigt man alle Bedingungen.

Gehen wir zurück zu Materiewellen. Solche Materiewellen haben bestimmte Wellenlängen. Wir haben schon einmal gelernt, daß Schwingungen, die ^{sich} auf einen bestimmten Raum beschränken müssen, keine beliebigen Frequenzen annehmen können.

Im Kap. B. III. 3., S. 98 "Eigenschwingungen" wurde darüber berichtet. Man betrachte als Beispiel einmal eine Schnur, die



an beiden Enden festgehalten wird. Sie kann nur bestimmte Schwingungen durchführen : eine Grundschwingung und verschiedene Oberschwingungen. Deutlich ist dieser Effekt auch bei Blasinstrumenten zu finden. Nun ist beim Atom ein Ähnliches feststellbar : wir betrachten zwar nicht den verfügbaren Raumbereich, dafür tut uns das Potential den gleichen Dienst.

a) Schrödinger - Gleichung

Wir hatten schon einmal die Schrödinger-Gleichung entwickelt.

Was war das noch ? (\rightarrow Kap. C. II. 3. S. 105)

Es war dies die Wellengleichung für eine ganz bestimmte Wellenart, nämlich für die de-Broglie'schen Materiewellen. Was ist

ein Elektron im Atom, bzw. wie äußert es sich? Nun, wie eine Materiewelle.

Wir gehen vor, wie bei den anderen Wellen auch.

Zunächst haben wir als Wellengleichung die Schrödinger-Gleichung:

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0$$

Was steckt da drin?

Zunächst die Masse und die Energie des Elektrons. Außerdem das Potential. Und diese ist wichtig. Schreiben wir die Gleichung etwas um:

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} U \Psi = \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi$$

Lösen wir diese Gleichung, so erhalten wir Ψ . Und das ist die sogenannte Wellenfunktion. Ganz analog zu den anderen Wellen. Nur nannten wir sie dort öfter $\xi(x, t)$.

b) Wellenfunktionen

Ich versuche das an einem Beispiel etwas klarer zu machen:

Wir wollen wissen, wie ein Wasserstoffatom aussieht. Das heißt, wir wollen die Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom benutzen, um die entsprechenden Wellenfunktionen zu erhalten.

Diese geben uns Auskunft darüber, wie die möglichen Energiezustände in diesem Atom aussehen. Außerdem erhalten wir Auskunft über den Raumbereich, in dem sich die Elektronen befinden. Denn das ist ganz wichtig: wir wissen, daß wir den Ort des Elektrons nicht genau angeben können. Wir können nur eine Wahrscheinlichkeit angeben, daß sich das Elektron in bestimmten Raumbereichen, sogenannten "Orbitalen" aufhält, und wir können das Aussehen dieser Orbitalen erkunden.

Zunächst einmal zur Schrödinger-Gleichung. Für dieses Problem verwenden wir oben angegebene Schrödinger-Gleichung. Wieso -

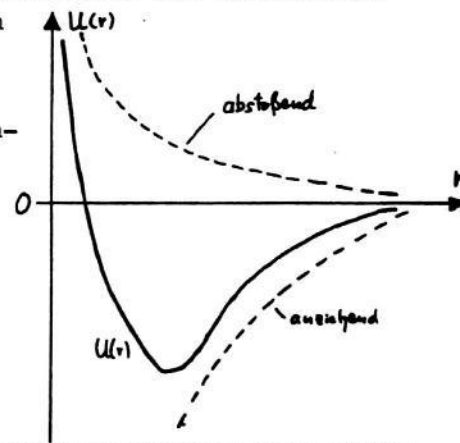
Gibt es denn noch eine andere? Nun - im Prinzip ja. Diese andere ist die sogenannte zeitabhängige Schrödinger-Gleichung. In dieser steckt die etwas einfachere zeitunabhängige Gleichung drin. Und die benutzen wir, da so ein Atom ein zeitunabhängiges System ist.

Ich werde an dieser Stelle allerdings nicht diese Rechnung vornehmen. Das ist viel zu kompliziert und braucht zu viel Zeit. Wir wollen uns die Sache nur in ganz groben Zügen ansehen. Dann ist sie auch verständlicher.

Zurück zum Wasserstoffatom. Was charakterisiert denn dieses?

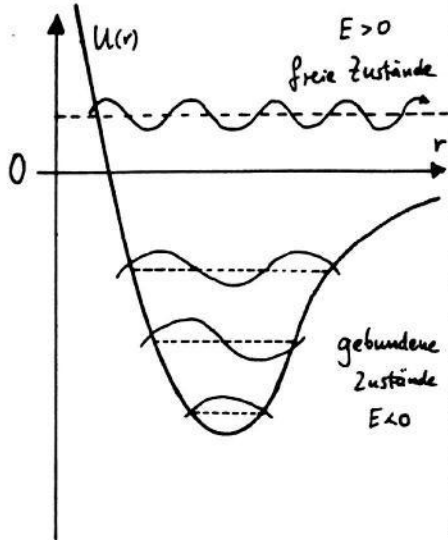
Zunächst einmal haben wir nur ein Elektron vorliegen. Das ist gut, denn kompliziertere Atome kann man gar nicht berechnen. Dort muß man Näherungsrechnungen machen und erhält entsprechend auch nur Näherungslösungen. Also - ein Elektron. Gut. Des Weiteren ist ein wichtiges Kennzeichen das Wasserstoff-

Potential. Dieses ergibt sich aus den Anteilen der Potentiale für anziehende und abstoßende Kräfte. Die anziehenden Kräfte ergeben sich aus der elektrostatischen Anziehung von Elektron und Proton (dem Kern), die abstoßende Kraft wird durch eine Art Zentrifugalkraft bewirkt. Ich sage extra "eine Art", da ja gar keine festen



Bahnen vorliegen. Die Überlagerung von beiden Potentialen (gestrichelt) ist in der Zeichnung zu erkennen ($U(r)$). Sehr nützlich ist, daß das Wasserstoffpotential kugelsymmetrisch ist. Also nur vom Mittelpunkts- (= Kern-) Abstand r abhängt. Setzt man nun die Gleichung dieses Potentials $U(r)$ in die Schrödinger-Gleichung ein, findet man, nach etwas Rechenaufwand verschiedene Wellenfunktionen Ψ_n . Zu jeder dieser Wellenfunktionen gehört ein ganz bestimmter Energiewert E_n , der sich auch aus der Schrödinger-Gleichung ergibt.

Die Skizze soll nur anhand des Potentials die möglichen



Wellenfunktionen verdeutlichen. Man sieht: es gibt sogenannte gebundene Zustände (bei denen die Energie-Niveaus nur ganz bestimmte Werte annehmen können) und es gibt ungebundene Zustände wo die Energie kontinuierlich ist. Das ist gerade dort, wo die Energie größer als die Ionisierungsenergie wird. Dort wird das Elektron frei und kann alle Energien annehmen.

Den Index n bei Ψ_n und E_n nennen wir die Hauptquantenzahl. Sie hat die gleiche Bedeutung, wie im letzten Kapitel dargestellt.

Bisher haben wir uns nur um den sogenannten radialen Anteil gekümmert. Es gibt noch einen winkelabhängigen Anteil, bei dem allerdings das Potential null wird. Die Lösungen dieses winkelabhängigen Anteiles der Schrödinger-Gleichung ergeben für verschiedene diskrete Quantenzahlen l und m die verschiedenen räumlichen Ausdehnungen der Orbitale.

Kurz noch einmal: Radialer Anteil \rightarrow Wellenfunktion und damit Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Energiewerte E_n (Index: Hauptquantenzahl n), Bezeichnung $\Psi_r(r)$.

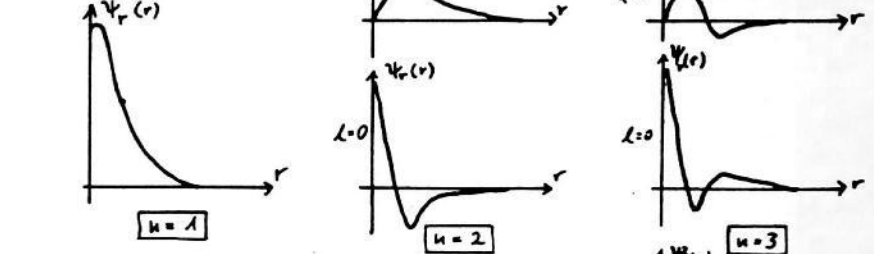
Winkelabhängiger Anteil \rightarrow Winkelfunktionen damit Ausdehnung der Orbitale für die verschiedenen Drehimpulsbeträge (Kenntlich durch die Quantenzahl l) und die verschiedenen Drehimpulsrichtungen (beschrieben durch die Quantenzahl m), Bezeichnung $\Psi_w(\theta, \varphi)$.

Spin-Anteil (den gibt's nämlich auch noch) \rightarrow mögliche Einstellung des Eigendrehimpulses $\pm \frac{1}{2} \hbar$ (Quantenzahl $s = \pm 1/2$), wie gehabt.

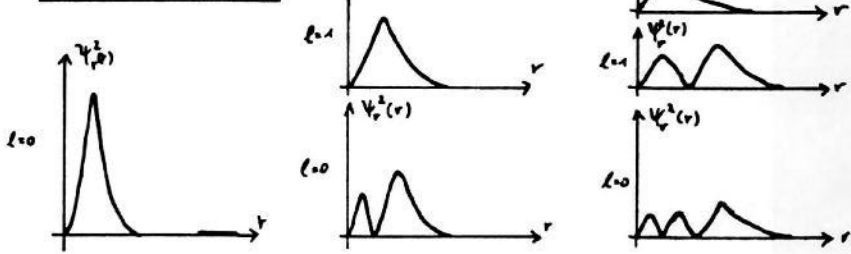
Auf der nächsten Seite sind einige dieser Orbitale dargestellt. Außerdem ist die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit und die Wellenfunktion für die ersten drei Zustände $n=1, 2, 3$ dar-

gestellt. Wichtig ist noch zu erwähnen, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit gerade das Quadrat der Wellenfunktion ist.

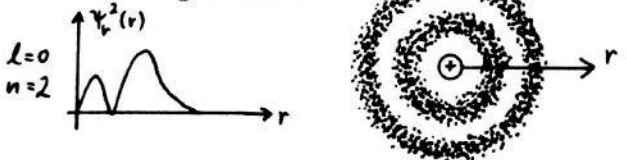
Ψ_r Wellenfunktionen



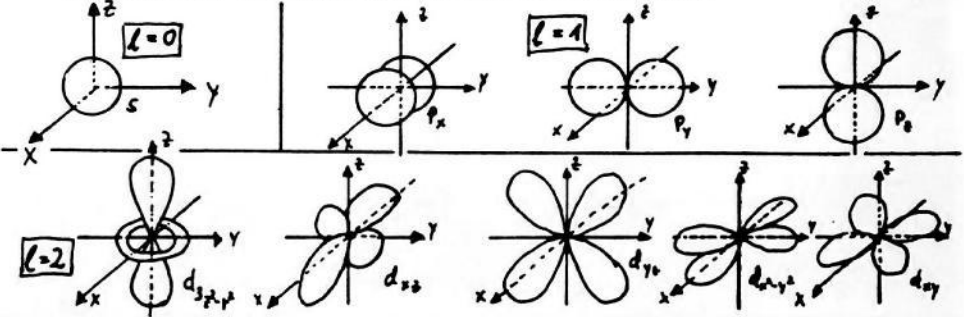
Ψ_r^2 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten



hier z.B. die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für $n=2, l=0$ von "oben" gesehen:



und hier die Winkelfunktionen, also die winkelabhängige Ausdehnung der Orbitale mit ihren Bezeichnungen.



1. Radioaktivität

Es gibt eine natürliche und eine künstliche Radioaktivität. Betrachten wir schwere Kerne, also solche, die aus vielen Protonen und Neutronen bestehen. Solche schweren Kerne sind oft instabil und zerfallen in andere Elemente. Das heißt: sie geben Protonen und/oder Neutronen und sogar auch Elektronen ab und werden damit zu Kernen anderer Elemente. Das geht so lange, bis ein Kern erreicht wird, der stabil ist. Bei solch einem Umwandlungsprozeß werden solche Teilchen als Strahlungen frei. Man unterscheidet:

α -Strahlen: das sind schnelle He-Kerne. Sie können aufgrund ihrer großen Energie Atome sehr gut ionisieren, haben dafür aber nur eine kurze Reichweite.

β -Strahlen: das sind Elektronen mit Geschwindigkeiten bis zu 99% der Lichtgeschwindigkeit. Sie entstehen dann, wenn sich ein Neutron in ein Proton umwandelt. Man kann nämlich vereinfacht annehmen, daß ein Neutron aus Proton und Elektron besteht. Das Ionisierungsvermögen ist kleiner als bei α -Strahlen, dafür ist die Reichweite umso größer.

γ -Strahlen: dies ist tatsächlich eine Strahlung, nämlich sehr energiereiche elektromagnetische Strahlung. Sie hat ein sehr großes Durchdringungsvermögen.

So betrachten wir uns den radioaktiven Zerfall zunächst einmal etwas quantitativ, besprechen dann einige Nachweisgeräte für die radioaktiven Strahlen und betrachten dann den α - und den β -Zerfall etwas genauer, das ist der jeweilige Zerfallsprozeß, bei dem α - bzw. β -Strahlung frei wird.

Atomkerne zerfallen spontan (wenn sie instabil sind). In der Zeit dt zerfallen dN Atome. Diese Zahl dN ist einmal proportional zu dt (klar!) und natürlich auch proportional zur ursprünglich vorhandenen Zahl N . Also

$$dN \sim dt \quad \text{und} \quad dN \sim N \quad \text{oder} \quad dN \sim N \cdot dt$$

bzw., $dN = -\lambda N \cdot dt$

Wieso minus? Nun - da N abnimmt, definieren wir λ so, daß das Minuszeichen steht.

es ergibt sich: $\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt$ $N(t)$ erhalten wir durch Integration:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\lambda t = \ln \left(\frac{N}{N_0} \right)$$

Bei $t=0$ seien N_0 Atome vorhanden, bei Zeit t nur noch N , bzw. $N(t)$:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \quad \text{oder} \quad \boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}}$$

Dieses ist das radioaktive Zerfallsgesetz.

Halbwertszeit: das ist die Zeit, in der die Hälfte aller ursprünglichen Atome zerfallen ist: also $N(T_{1/2}) = N_0 / 2$ ins Zerfallsgesetz eingesetzt:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$\Rightarrow e^{\lambda T_{1/2}} = 2 \quad \text{oder} \quad \boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

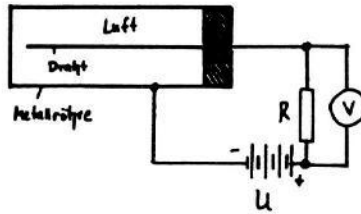
Als **mittlere Lebensdauer** τ bezeichnet man die Zeit, in der der anfängliche Bestand N_0 auf den Bruchteil $1/e$ reduziert wurde:

$$\frac{N_0}{e} = N_0 \cdot e^{-\lambda \tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{1}{\lambda}}$$

2. Detektoren

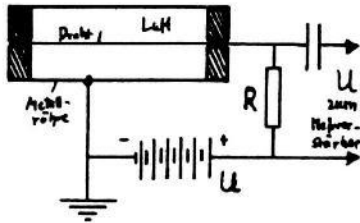
Noch kurz zu den Nachweisgeräten für ionisierende Strahlung. Man läßt Atome ionisieren und kann damit die ionisierende Wirkung vorhandener radioaktiver Strahlung nachweisen.

①. Ionisationskammer :



Einfliegende α , β - und γ -Strahlung ionisieren die Gasmoleküle. Durch das elektrische Feld zwischen Außenwand und innerem Draht ergibt sich ein kurzzeitiger Ionenstromtransport, also ein kurzer Stromfluß. Dieser bewirkt am Widerstand R ein Spannungsstoß, der gemessen wird.

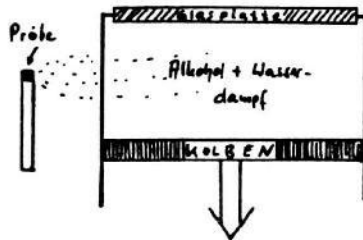
②. Zählrohr :



Einfliegende Primärteilchen erzeugen auch hier Ionen und Elektronen. Diese werden sehr stark beschleunigt und erzeugen durch Stoßionisation viele weitere Elektronen \Rightarrow sehr starker Stromstoß, also an R ein Spannungsstoß. Die gemessene Spannung U ist der Menge der primär entstandenen Ionen (also der Stärke der Strahlung) proportional.

Noch ein Wort zur Totzeit. Das ist die Zeit, in der ein Zählrohr nach einem gerade erfolgten Zählvorgang, nicht funktionsfähig ist, da das Gas noch ionisiert ist. Die Totzeit ist die Zeit, die vergeht, bis die ionisierten Gasatome wieder zu kompletten Atomen "rekombiniert" sind.

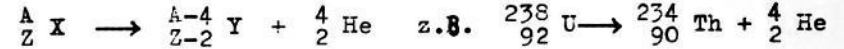
③. Nebelkammer :



Ionisierte Atome bilden Kondensationskeime, um die sich Nebeltröpfchen bilden, wenn plötzlich ein Wasser-Alkohol-Dampfgemisch abgekühlt wird. Die Abkühlung erfolgt durch plötzliche adiabatische Ausdehnung des Gasraums. In solch einer Nebelkammer kann man sehr deutlich die Spuren von einfliegenden α - und β -Teilchen sehen und ihre Geschwindigkeit - also auch ihre Energie - bestimmen. Mit der Nebelkammer wurden schon viele Elementarteilchen entdeckt.

3. α -Zerfall

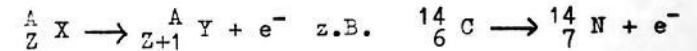
Die Reaktionsgleichung sieht folgendermaßen aus :



Diese Symbole bedeuten : links oben vom chemischen Element-Zeichen steht die Massenzahl (Summe von Neutronen und Protonen). Links unten steht die Ordnungszahl (= Zahl der im Kern vorhandenen Protonen).

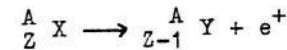
4. β -Zerfall

Der entstehende Tochterkern erhält eine Ordnungszahl um eins vergrößert als beim Mutterkern. Es scheint, daß beim β -Zerfall ein Neutron in ein Proton verwandelt wird unter Abgabe eines Elektrons :



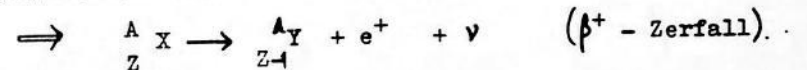
Dabei bleiben Ladung und Nukleonenzahl (=Zahl von Neutronen und Protonen) erhalten.

Ein Kern kann auch ein Positron abgeben. Das ist das Antiteilchen eines Elektrons : ein Elektron mit positiver Ladung:



Beim β -Zerfall haben die β^+ oder β^- -Teilchen eine kontinuierliche (also nicht gleiche) Energieverteilung. Eigentlich müßte aber die Energie in zwei Teile mit konstantem Verhältnis zwischen Mutter und Tochterkern aufgespalten werden.

Pauli postulierte 1930, daß ein drittes Teilchen eine Rolle spielen müsse, das neutral ist (da die Erhaltung der Ladung garantiert sein muß) und das eine sehr kleine Masse haben mußte. Man nannte dieses: Neutrino ν



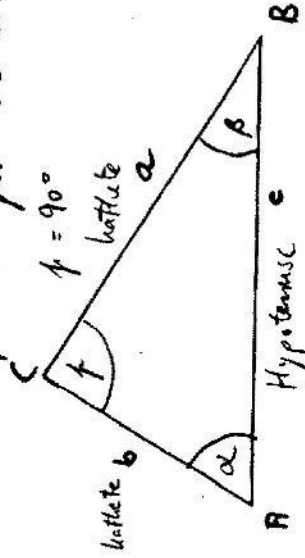
KLEINER MATHEMATISCHER EXKURS

I. TRIGONOMETRIE

Wir kennen die Winkelfunktionen

Sinus, Cosinus, Tangens (↓ kope so!)

In rechtwinkligen Dreieck sind:



Hypotenuse = Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. (= längste Seite)

Katheten = Schenkel des rechten Winkels.

Falls wir den Winkel α betrachten, so ist b die Ankathete (sie liegt an α) und a die Gegenkathete (sie liegt α gegenüber)

Nun gilt:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Nun gilt weiterhin:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\text{Sekans})$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\text{Cosekans})$$

diese beiden
können ihr
gleich wieder
vergessen!

In der Hoffnung, ihr lacht über die Trivialität der gesagten, nehmen wir uns einige wichtige trigonometrische Sätze und Formeln vor.

Sinussatz: In einem Dreieck verhalten sich je zwei Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

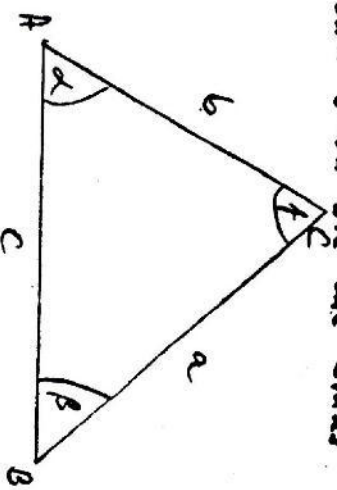
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



- einige wichtige trig. Formeln (zum gefälligen Gebrauch):

Additionstheoreme:

① $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \mp \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$$

② $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

③ $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

④ $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

⑤ $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

⑥ $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

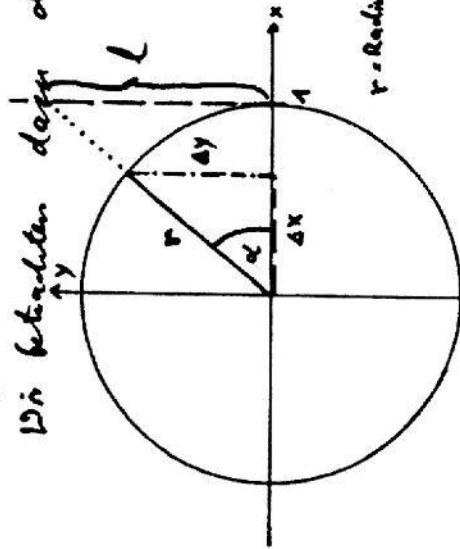
↳ diese Kenntnisse ist, darauf können wir noch zurück!

7) $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$; $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$; $\tan \varphi = \frac{i(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}$

8) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}$
 $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
 $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

* wollen wir kurz beweisen.

Wir betrachten dazu den Einheitskreis, das ist ein Kreis mit dem Radius 1. Dort tragen wir den Winkel α ab. Dann ist die y-Abschnitt $\sin \alpha$ und die x-Abschnitt $\cos \alpha$.



denn $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkath.}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{dy}{1} = \frac{dy}{1} \Rightarrow dy = \sin \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{\text{Ankath.}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{dx}{1} = \frac{dx}{1} \Rightarrow dx = \cos \alpha$
 $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1} \cdot 1 \Rightarrow \tan \alpha = 1$

so - jetzt zu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$: Nach Pythagoras gilt:

$dx^2 + dy^2 = r^2$ oder $\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$.

Bei beliebigen Winkeln α erhalten wir das Quadrat der Ankathete + das Quadrat der Gegenkathete = r^2 .

9) Tabelle:

	\sin	\cos	\tan	\cot
$\sin \alpha =$	-	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	-	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha =$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	-	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha =$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	-

10) Besondere Werte:

α	0°	30°	45°	60°	90°
\sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
\cos	1	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{2}$	0
\tan	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	± 1	$\pm \sqrt{3}$	$\pm \infty$
\cot	$\pm \infty$	$\pm \sqrt{3}$	± 1	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	0

das Vorzeichen für oben Winkel wählen = unten =

11) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
 $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

II. FOLGEN - REIHEN - GRENZWERTE

A) FOLGEN - REIHEN

arithmetrische Folge : $a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, \dots, a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
 oder $a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \dots, a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
 Das nächste Glied ist immer um d größer, als das vorhergehende

arithmetrische Reihe : endlich:

Anfangsglied a_1

Endglied $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = n a_1 + \frac{d}{2} n (n-1) = \sum_{i=1}^n a_i$$

geometrische Folge : $a_1, a_2 = a_1 \cdot q, a_3 = a_1 \cdot q^2, \dots, a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
 geometrische Reihe :
 endlich: $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$
 unendlich: $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = a_1 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q^i$
 An Quotient aus ein Glied durch seinen linken Nachbarn n immer $= q$.

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

gilt nur für $|q| < 1$
 für $|q| \geq 1$ konvergiert die Reihe nicht!

2) EINIGE WICHTIGE GRENZWERTE

a) $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 \quad (a > 0)$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^{(n)}(x)}{x} = \log a \quad (a > 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^{(n)}(x)}{x} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x-1}}{x} = \ln a \quad (a > 0)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{2}{x})^x = e^2$ i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-1}}{x} = 1$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \ln a \quad (a > 0)$ l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = 1$

3) Taylor'sche Reihe:

Wir entwickeln eine Funktion $f(x)$ in der Nähe des Werts x_0 (Genauer: in einer Umgebung $x_0 \pm h$).

Das bedeutet: Wir nähern eine Funktion $f(x)$ einem Polynom an (Polynom = Summe von Potenzen der Unbekannten)

$$\text{z.B. es ist } \sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Um irgendeine Fkt. zu entwickeln brauchen wir die sog.

$$\text{Taylor-Reihe } f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + \dots$$

Um zu den Näherungsformeln zu kommen entwickeln wir um

$$x_0 = 0:$$

$$\sin x = \left. \begin{array}{l} f(0) = \sin 0 = 0 \\ f'(0) = \cos 0 = 1 \\ f''(0) = -\sin 0 = 0 \\ f'''(0) = -\cos 0 = -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(0) = 1 \\ f^{(6)}(0) = 0 \\ f^{(7)}(0) = 1 \end{array} \text{ usw.}$$

$$\sin x = f(0+x)$$

$$\Rightarrow \text{folgt } \sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5 + \dots$$

$$\text{also } \sin x \approx 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 - \dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

anderes Beispiel:

$$\sqrt{1+x} = ? \quad \left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} \end{array} \right| \begin{array}{l} f''(0) = -\frac{1}{4\sqrt{1+0}^3} = -\frac{1}{4} \\ f'''(0) = \frac{3}{8} \end{array}$$

$$f(0+x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} x - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3!} x^3 - \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^3 - \dots$$

Solche Reihenentwicklungen werden in der Physik häufig verwendet. Falls die Größe x sehr klein ist, so kann man die hohen Potenzen von x vernachlässigen.

Beispiel: Pendel ~~will~~

Wir betrachten die Pendelbewegung als Funktion
des Winkels φ .

Es soll φ oder $\dot{\varphi}$ sein

$$0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$$

z.B. $\varphi = 45^\circ$

$$0,5 \text{ rad } 0,5 \text{ rad } 300^\circ \approx 2\pi$$



Wir wissen: $\sin 0,5 = 0,4794255386$

jetzt prüfen wir nach die Reihe

$$\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots$$

Wir sehen: Wenn wir die Reihe nach dem

fünften Glied abbrechen, so erhalten

wir eine Genauigkeit bis zur

11. Stelle hinterm Komma !!!

$$\frac{x}{1!} = 0,5$$

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} = 0,47916$$

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = 0,47942$$

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} = 0,479425$$

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = 0,4794255386$$

Einige wichtige Näherungsformeln

$$a) \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45} x^6 - \dots$$

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2}{45} x^6 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{43}{450} x^7 - \dots$$

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} x^4 - \frac{67}{210} x^6 + \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

$$b) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{(x \ln a)}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad |x| < 1 \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

$$c) \text{ Binomische Reihe: } (1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \dots \left\{ \text{mit } \binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \right\}$$

$$d) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

e) Näherungen

Falls $\epsilon \ll 1$ ist gilt es viele einfache Näherungen:

$$(1 \pm \epsilon)^n \approx 1 \pm n\epsilon$$

$$\sqrt{1 \pm \epsilon} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\epsilon$$

$$(a \pm \epsilon)^n \approx a^n \left(1 \pm n \frac{\epsilon}{a} \right)$$

$$\sqrt[n]{1 \pm \epsilon} \approx 1 \pm \frac{\epsilon}{n}$$

$$e^\epsilon \approx 1 + \epsilon$$

$$a^\epsilon \approx 1 + \epsilon \ln a$$

$$\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon$$

$$\sin \epsilon \approx \epsilon$$

$$\tan \epsilon \approx \epsilon$$

$$\epsilon \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2$$

$$\cot \epsilon \approx \frac{1}{\epsilon}$$

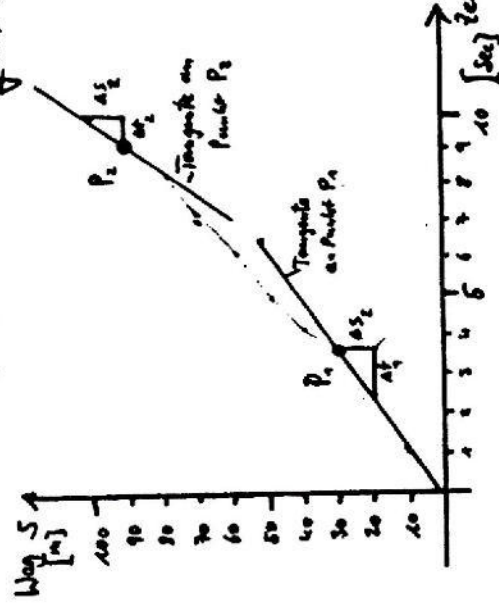
allgemein gilt für kleine ϵ :

$$f(\epsilon) \approx f(0) + f'(0) \cdot \epsilon$$

III. DIFFERENTIALRECHNUNG

1) Ableitung:

Wir haben eine Funktion $f(x) = y$: Es soll dies einen 100-m-Lauf



beschreiben.

Wir messen alle 10m die Zeit, die der Läufer (es soll ein guter sein!) bis dahin gebraucht hat.

Weg s	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Zeit t	0	1	1.8	3.6	4	4.8	6	7.2	8.4	9.2	10

Wir wollen nun wissen, welche Momentangeschwindigkeit der Läufer an der 20-m und an der 90-m-Marke hat.

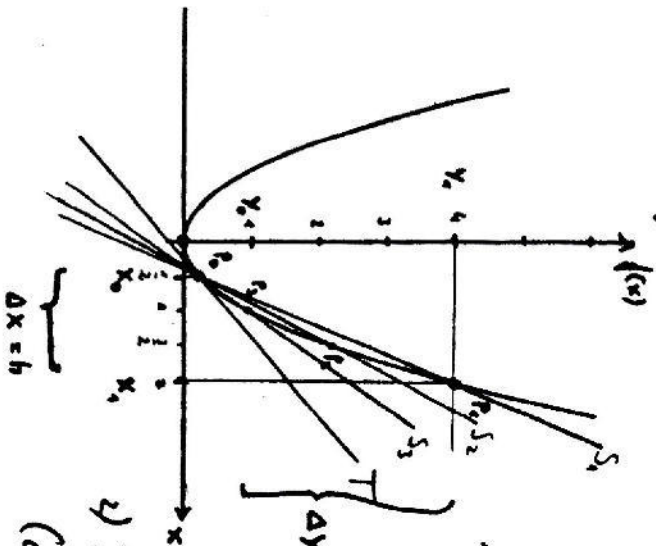
Wir wissen $v = \frac{s}{t}$, also Momentangeschwindigkeit = Tangente an die Kurve in diesem Punkt. - Wir zeichnen die Tangente an P_1 und P_2 . Dann bestimmen wir ihre

$$\text{Steigungen} \quad \text{Steigung } v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\text{m}}{2\text{s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\text{m}}{0.71\text{s}} = 13.5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Das sind nun die Momentangeschwindigkeit bei den zwei ganz bestimmten Punkten.

So - das kann man auch berechnen.

Wir wählen irgend eine Funktion. z.B. $f(x) = x^2$



Wir suchen die Steigung für den Punkt P_0

$$P_0 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) = P_0 \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = P_0 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \text{ also die Tangente}$$

Wir wählen ein 2. Punkt P_1

Dann beide verbinden wir die Sekante S_1 .

So hat die Steigung

$$M_{S_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2) Betrachten wir nun die Sekante S_2 (durch P_2 und P_0), so sehen wir, dass diese unsere gesuchte Tangente T

sehen wird näher liegt.

3) Je näher ein Punkt P_i unserem P_0 liegt, desto weniger unterschiedlich sind die Sekante durch P_i und P_0 von der Tangente durch P_0 .

Wie lassen wir $P_i \rightarrow P_0$ gehen?

Lassen wir $x_i \rightarrow x_0$ gehen, lassen oder $h \rightarrow 0$!

\rightarrow Steigung Tangente:

$$M_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \equiv f'(x_0)$$

Berechnen wir das nun für jeden Funktionswert x , erhalten wir eine neue Funktion $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

z.B.: $f(x) = 2x^2 \Rightarrow f(x+h) = 2(x+h)^2$ also

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4x+2h)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x+2h) = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + \lim_{h \rightarrow 0} 2h = 4x + 0 = 4$$

also: Wenn $f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x$

Man nennt $f'(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$.
Es gibt noch weitere Ableitungen.

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad \text{usw.} \quad f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x) \text{ usw.}$$

Wir führen eine neue Bezeichnung ein

Wir gehen aus von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = Steigung in der Sekante S ,

Wenn nun $\Delta x \rightarrow 0$ geht, geht $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x)$.

Da die Steigung der Tangenten ja auch das Verhältnis des y -Abt. -
schnittes zum x -Abchnitt ist, belassen wir auch die Buchst. x und
 y bei und schreiben

$$\text{Steigung der Tangente} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{dy}{dx}$$

d.h. wir ersetzen Δy und Δx durch die infinitesimal kleinen

dy und dx . Das sind x - und y -Abchnitte die nur ganz
wenig von 0 verschieden sind.

Wir leiten die Funktion $f(x)$ ab $\rightarrow f'(x)$.

Auch können wir sagen $f(x) = x^2$ oder $y = x^2$ also $y = f(x)$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{d}{dx}(y)$$

So können wir's auch schreiben.

Die Funktion $f(x)$ hängt von x ab. Gut - wir leiten sie ab
- nach x ($\Delta x \rightarrow 0$). Die Funktion des 100-m-Läufers verhin-
dert von der Zeit t ab: $S = f(t)$

Weg = Funktion der Zeit

Jetzt schreiben wir nicht mehr $f'(t) = \frac{d}{dx} y$, sondern

$$f'(t) = \frac{d}{dt}(S)$$

$\frac{d}{dt}$ $\left(\frac{d}{dx} \right)$ und hier abt,
hier steht, was wir ableiten.
Vom abt wir ableiten

Also nochmal -

Funktion $f(a) = b$ (z.B. $4a^3 + 2a^2 - a + 1$)

das ableiten nennen wir $\frac{d}{da}$ oder $\frac{d}{da}$

Also $f(x) = y \Rightarrow f'(x) = y' = \left(\frac{d}{dx}\right) y = \left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Dieses Ding ist ein Operator.

Ein Operator gibt an, was mit dem zu gestalten hat, was hinter dem Operator steht.

Hier: $\frac{d}{dx} y$, leite die Funktion y nach x ab!

zum Beispiel zu machen: erst einmal die Differentialrechenregeln.

$f(x)$	$f'(x) = \frac{dy}{dx}$	$f(x)$	$f'(x) = \frac{dy}{dx}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$\sin x$	$\cos x$
a	0	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$		$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	$\frac{1}{e} x$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

also z.B. $y = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{dy}{dx} = 3 \cdot 4 x^{3-1} + 2 \cdot 2 x^{2-1} - 1 \cdot x^{1-1} + 0$$
$$= 12x^2 + 4x - 1$$

Darum ableiten wir nun die 2. Ableitung:

$$f''(x) = y'' = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y = \frac{d^2}{dx^2} y = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (y') = \frac{d}{dx} (12x^2 + 4x - 1)$$

Der Operator wird einfach quadriert, denn $\left(y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} y\right) = \frac{d^2}{dx^2} y\right) \Big| = 24x + 4$

usw. $\frac{d^3}{dx^3}, \frac{d^4}{dx^4}, \dots$

Merke: In der Physik benutzen wir ein eigenes Zeichen für Ableiten:

$$\text{nach der Zeit } f(t) \quad f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t) \quad (\dot{f} = \text{Ableit}) \quad \text{und } f''(t) = \ddot{f}(t)$$

Zur Vereinfachung des Differenzierens lernen wir einige Regeln:

a) $\frac{d}{dx}(c \cdot f(x)) = c \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
(Faktorregel)

c) $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{d}{dx} u \cdot v + u \cdot \frac{d}{dx} v$
(Produktregel)

b) $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx} u + \frac{d}{dx} v$
(Summenregel)

d) $\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$
(Potenzregel)

e) $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} \left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right)$ bzw. einfacher

$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
(Quotientenregel)

Beispiele a) $\frac{d}{dx}(3x^4) = 3 \cdot \frac{d}{dx}(x^4) = 3 \cdot 4 \cdot x^3 = 12x^3$

b) $\frac{d}{dx}(3x^4 + 2x^2) = \frac{d}{dx}(3x^4) + \frac{d}{dx}(2x^2) = 12x^3 + 2 \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = 12x^3 + 4x$

c) $\frac{d}{dx}(x^2 \cdot \sin x) = \frac{d}{dx}(x^2) \cdot \sin x + x^2 \cdot \frac{d}{dx} \sin x = 2x \sin x + x^2 \cos x$

d) -

e) $\frac{d}{dx} \left(\frac{3x^2 - 5}{x^4 + 2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right)$
 $\Rightarrow u = 3x^2 - 5 \Rightarrow u' = 6x$
 $\Rightarrow v = x^4 + 2 \Rightarrow v' = 4x^3$

$\Rightarrow \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{6x(x^4 + 2) - 4x^3(3x^2 - 5)}{(x^4 + 2)^2} = \frac{2x(6 + 10x^2 - 3x^4)}{(x^4 + 2)^2}$

f) Kettenregel $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$f'(x) = f'(t) \cdot g'(x)$

z.B. $y = (3x^2 + 5)^4$ wir erhalten $3x^2 + 5$ drinn +

$\Rightarrow f(t) = t^4$ und $g(x) = 3x^2 + 5$

$f'(t) = 4t^3$ innere Ableitung
 $g'(x) = 6x$ innere Ableitung

$\Rightarrow f'(x) = 4t^3 \cdot 6x = 4(3x^2 + 5)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2 + 5)^3$

oder

$y = 8 \sin(2x) \quad 2x = t$

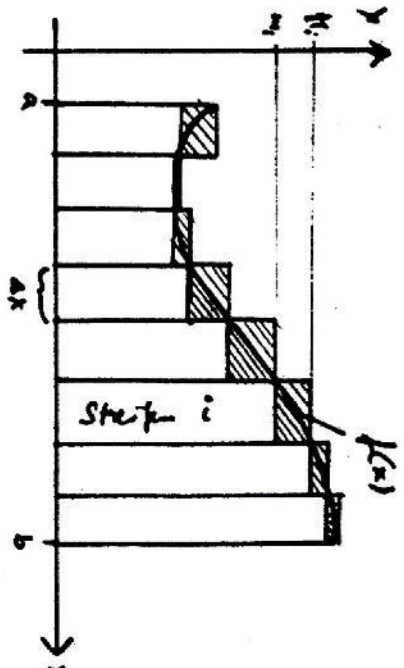
$\Rightarrow f(t) = 8 \sin t$

$g(x) = 2x$

$f'(t) = 8 \cos t$

$\Rightarrow f'(x) = \cos t \cdot 2 = 2 \cdot \cos 2x$

IV. INTEGRALRECHNUNG



Wir suchen die Fläche unter der Kurve $f(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$.

Wir teilen die Fläche in Streifen auf, deren Breite ist $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (n Streifen)

Nun bestimmen wir die Fläche der Streifen (unteren (untere) Streifen) = Untere Summe.

Dann bestimmen wir die Obersumme = Fläche der oberen (oben, + der oberen (oberen) Streifen).

Betrachten wir den Streifen i : es hat die Breite Δx . Außerdem die beiden Ordinaten w_i und h_i ($h_i > w_i$).

\Rightarrow Fläche des i -ten Streifens:

$$F_i^u = \underbrace{\Delta x \cdot w_i}_{\text{untere Streifen}} \quad F_i^o = \underbrace{\Delta x \cdot h_i}_{\text{obere Streifen}}$$

Wir haben zwischen $x=a$ und $x=b$ n Streifen. Lassen wir sie immer schmäler werden (also n immer größer), so nähern sich F_i^u und F_i^o an, bzw. Untere- und Obersumme nähern sich an. Im Idealfall $n \rightarrow \infty$ geht die Untersumme in die Obersumme über.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n w_i \cdot \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h_i \cdot \Delta x = F_{\text{alt}} = \int_a^b f(x) dx$$

Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ heißt die Fläche unter der Fkt. $f(x)$ an zwischen $x=a$ und $x=b$.

Ganz allgemein:

Haben wir eine Reihe mit n Gliedern $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ und suchen den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ so geht die Summe in das Integral über.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

Eigenschaften:

$$a) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$b) \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$c) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$d) \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Das Integral ist die Umkehrung der Differentiation:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(s) ds$$

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(s) ds = f(x)$$

Grundintegrale

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) = \ln|x| + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \arcsin x + C$$

(mit angegebenen Grenzen handelt es sich um bestimmte Integrale. Ohne Grenzen sind es unbestimmte Integrale.)

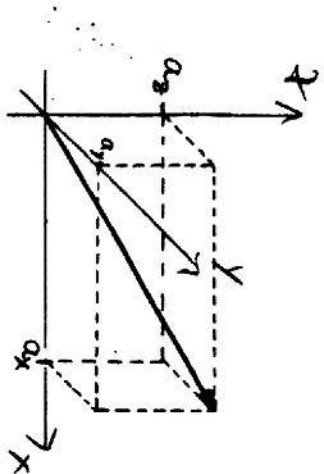
Diese letzteren unterscheiden sich von den erstere um eine beliebige konstante C :

$$\int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

V. KOORDINATENSYSTEME

1. Kartesische Koordinaten : X, Y, Z



Ortsvektor : $\vec{r} = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

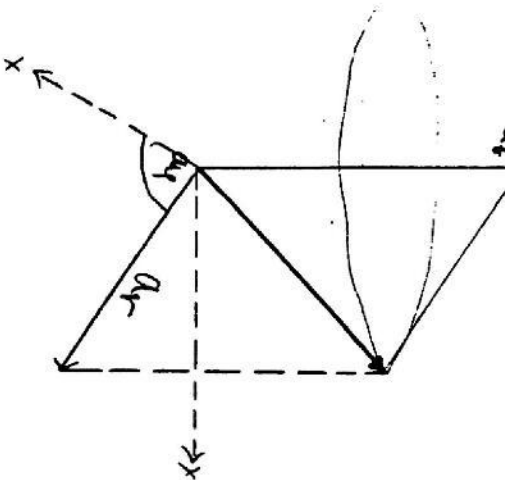
$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

Linienelement : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Flächenelemente : $dF_{xy} = dx dy, dF_{yz} = dy dz, dF_{xz} = dx dz$

Volumenelement : $dV = dx dy dz$

2. Zylindrische Koordinaten : r, φ, z



Ortsvektor $\vec{r} = (r, \varphi, z)$

$\vec{a} = (a_r, a_\varphi, a_z)$

Umrechnung:

$x = r \cos \varphi$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r \sin \varphi$ $\varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

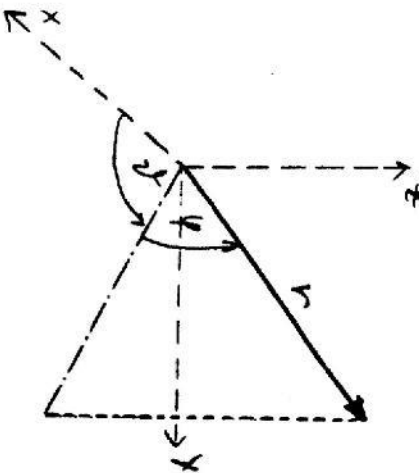
$z = z$ $z = z$

Linienelement : $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$

Flächenelemente : $dF_{rz} = r dr dz$; $dF_{r\varphi} = r dr d\varphi$; $dF_{\varphi z} = r d\varphi dz$

Volumenelement : $dV = r dr d\varphi dz$

3. Kugel - oder Polar koordinaten : r, ϑ, φ



Ortsvektor $\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$; $\vec{a} = (a_r, a_\vartheta, a_\varphi)$

Umrechnung:

$x = r \cos \varphi \sin \vartheta$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$y = r \sin \varphi \sin \vartheta$ $\vartheta = \arctan \frac{z}{r}$

$z = r \cos \vartheta$ $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

Linienelement : $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$

Flächenelemente : $dF_{r\vartheta} = r dr d\vartheta$; $dF_{r\varphi} = r \sin \vartheta dr d\varphi$

$dF_{\vartheta\varphi} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$

Volumenelement : $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$